Aufgabe 1 (mündlich): Wahrscheinlichkeitsverteilungen (6 Punkte)

Wir betrachten normale Würfel mit 6 Seiten, auf denen die Zahlen 1 – 6 stehen.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(n)$ an, die angibt, mit welcher Wahrscheinlich die Zahl n gewürfelt wird. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle n \rangle = \sum_{n=1}^{6} n\, p(n)$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\left\langle \left(n - \langle n \rangle\right)^2 \right\rangle} = \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}$ der Würfelergebnisse. Dabei ist $\langle n^2 \rangle = \sum_{n=1}^{6} n^2\, p(n)$.

b) Geben Sie nun die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(n)$ an, bei einem Wurf mit zwei Würfeln die Gesamtzahl n zu erhalten. Berechnen Sie wiederum den Erwartungswert und die Standardabweichung für diese Verteilung.

c) Erstellen Sie je ein (Balken-)Diagramm mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung für einen bzw. zwei Würfel. Tragen Sie in das gleiche Diagramm die Funktion $W(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\langle n \rangle)^2}{2\sigma^2}}$ mit dem jeweiligen Erwartungswert $\langle n \rangle$ und der jeweiligen Standardabweichung σ ein und vergleichen Sie.

Aufgabe 2 (mündlich): Differentiale (5 Punkte)

Ein Differential hat die Form: $\delta f(x,y) = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$. Man nennt ein Differential vollständig, wenn es eine Funktion $f(x,y)$ gibt, so dass gilt: $\delta f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy$.

Dies ist dann erfüllt, wenn gilt $\frac{\partial a(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial b(x,y)}{\partial x}$. Man schreibt ein vollständiges Differential auch als $d f(x,y)$.

Überprüfen Sie für die Differentiale

i) $\delta f = xdx - ydy$

ii) $\delta f = ydx - xdy$

iii) $\delta f = ydx + xdy$

iv) $\delta f = 6xy^3 dx$

v) $\delta f = 6x\,dx$,

ob es sich um vollständige Differentiale handelt. Geben Sie im Fall eines vollständigen Differentials auch jeweils eine mögliche Funktion $f(x,y)$ an.

Aufgabe 3 (schriftlich): Wegintegrale (6 Punkte)

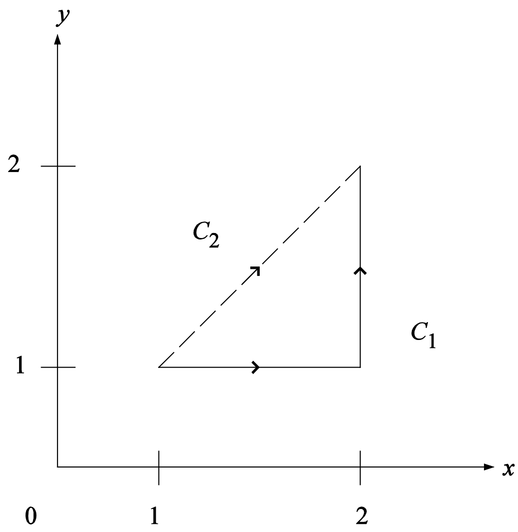
Sei $I=\int_C \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(\vec{r})\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt$ das Integral entlang eines Weges C, der in der zweidimensionalen xy-Ebene vom Punkt (x_0, y_0) zum Punkt (x_1, y_1) führt, und $\vec{r}(t)$ eine Parametrisierung dieses Weges. Dabei sei $\vec{F}(\vec{r})$ das Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})=\begin{pmatrix}a(x,y)\\ b(x,y)\end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie I entlang der Wege C_1 und C_2, die von $(1,1)$ nach $(2,2)$ führen, für

i) $a(x,y)=6xy^3$, $b(x,y)=9x^2y^2+4y$

ii) $a(x,y)=6xy^3$, $b(x,y)=0$

iii) $a(x,y)=x^2-y$, $b(x,y)=x$



Aufgabe 4 (schriftlich): Flüssigkeitsdruck (6 Punkte)

Durch ein gerades, horizontal verlaufendes Rohr ($d_1=2{,}4\,\text{cm}$) strömt Wasser am Einlass und am Auslass mit einer mittleren Geschwindigkeit $v_1=2\,\text{m/s}$. Am Rohr sind nach oben offene Glasröhrchen angebracht. Die Wasserhöhe am Einlass und Auslass ist $h_1=35\,\text{cm}$. Zwischen Ein- und Auslass ist eine Verengung (Durchmesser $d_2=2{,}0\,\text{cm}$) mit einem Steigröhrchen eingebaut.

a) Wie groß ist die mittlere Strömungsgeschwindigkeit v_2 in der Verengung?

b) Wie groß ist an dieser Stelle die Steighöhe im Steigrohr?

c) Was passiert, wenn bei konstantem v_1 und h_1 der Querschnitt der Verengung weiter verkleinert wird?