Übungen zur theoretischen Festkörperphysik II - Zettel 4

Sommersemester 2012 Abgabe: 19.06.

Aufgabe 10: Paar-Anregungen 10P.

Wir betrachten ein Zweibandmodell eines Festkörpers, dessen Valenzband im Grundzustand $|0\rangle$ vollständig gefüllt ist. $c_l^\dagger$ ($d_l^\dagger$) ist der Erzeugungsoperator für ein Elektron (Loch) am Ort $\vec{r}_l$ und c_l (d_l) ist der entsprechende Vernichtungsoperator. Wir definieren die folgenden Paarerzeugungs- bzw. vernichtungsoperatoren

$$B_{\vec{k}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_l e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_l} c_l^\dagger d_l^\dagger, \qquad B_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_l e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_l} d_l c_l,$$

wobei N die Anzahl der Atome im Kristall ist. Solche Operatoren beschreiben Frenkelexzitonen z.B. in organischen Molekülkristallen. Außerdem gilt die Orthogonalitätsrelation

$$\frac{1}{N} \sum_l e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}_l} = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}.$$

a) Berechnen Sie den Kommutator der Paaroperatoren und zeigen Sie, dass er in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\left[B_{\vec{k}}, B_{\vec{k}'}^\dagger\right] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} + A_{\vec{k}\vec{k}'}.$$

Welche lautet der Operator $A_{\vec{k}\vec{k}'}$?

b) Berechnen Sie den Erwartungswert des Kommutators im Ein-Exzitonzustand $B_{\vec{k}_0}^\dagger |0\rangle$.

c) Wir definieren die Normierungskonstante γ_n mit

$$\gamma_n = \langle 0| \left(\alpha_{\vec{k}}\right)^n \left(\alpha_{\vec{k}}^\dagger\right)^n |0\rangle.$$

Berechnen Sie γ_2 für die Fälle, dass es sich bei den Operatoren $\alpha_{\vec{k}}^\dagger$ bzw. $\alpha_{\vec{k}}$ um Bosonen-, Fermionen- oder Paarerzeugungs- bzw. vernichtungsoperatoren handelt. Hinweis: Es ist hilfreich, zuerst den Kommutator $\left[A_{\vec{k}\vec{k}}, B_{\vec{k}}^\dagger\right]$ zu berechnen.

d) Handelt es sich bei Paarteilchen um Bosonen oder Fermionen? Begründen Sie Ihre Antwort mit dem Kommutator und vergleichen Sie die Normierungskonstanten γ_2 für die verschiedenen Fälle. Wann kann man $A_{\vec{k}\vec{k}'}$ vernachlässigen?

Aufgabe 11: Fermion-Boson-Modell 9P.+2

Das einfachste Modell, das eine Kopplung zwischen einem Fermion (Elektron) und einem Boson (Phonon) von der Art wie in der Vorlesung besprochen enthält, ist gegeben durch folgenden Hamiltonian

$$H = \mathcal{E} c^\dagger c + \hbar\omega b^\dagger b + g\left(b^\dagger + b\right) c^\dagger c,$$

wobei $c^\dagger/c$ die Fermi- und $b^\dagger/b$ die Boseoperatoren sind. Der Hilbertraum (Fockraum) wird in der Besetzungszahldarstellung durch die Zustände $|n_f, n_b\rangle$ aufgespannt. $n_f \in \{0, 1\}$ ist die Fermionen-Besetzungszahl und $n_b \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ die Bosonen-Besetzungszahl.

a) Berechnen Sie explizit die Matrixelemente $\langle n_f n_b | H | n'_f n'_b \rangle$. Was fällt auf?

b) Diagonalisieren Sie H analytisch durch den Ansatz $\tilde{b} = b - \alpha c^\dagger c$, wobei α eine komplexe Zahl ist, so dass $H = \tilde{\mathcal{E}} c^\dagger c + \hbar\omega \tilde{b}^\dagger \tilde{b}$ wird. Die Eigenzustände seien nun $|n_f, \tilde{n}_b\rangle$. Bestimmen Sie die Energieeigenwerte.

c) Zur Zeit $t = 0$ werde das System durch Anregung des Fermions aus dem Zustand $|n_f = 0, n_b = 0\rangle$ in den Zustand $|n_f = 1, n_b = 0\rangle$ gebracht. Geben Sie die Zeitentwicklung von $|n_f = 1, n_b = 0\rangle$ an. In was für einem Zustand befinden sich die Phononen? Gehen Sie zur Berechnung wie folgt vor: Entwickeln Sie $|1, 0\rangle$ nach den Eigenfunktionen des Hamiltonoperators $|1, \tilde{n}_b\rangle$,denn in der Eigenbasis ist die Zeitentwicklung bekannt. Bestimmen sie die Entwicklungkoeffizienten, wobei man für $(b - \alpha c^\dagger c)^{\tilde{n}_b}$ die Binomialformel benutzen sollte. Im letzten Schritt kann man die Normierung von $\langle 1, 0|1, 0\rangle$ benutzen, wobei man auch hier die Entwicklung einsetzt.

d) Berechnen Sie den zeitabhängigen Erwartungswert des Ortsoperators $x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(b^\dagger + b)$ in diesem Zustand. (2 BP.)