Aufgabe 36: Stirlingformel (3 Punkte)

In der Statistik werden wir häufig von der Stirlingformel

$$\ln N! \simeq N \cdot \ln N - N \qquad \text{für große } N$$

Gebrauch machen.

a) Testen Sie die Formel mit Hilfe eines PC's. Vergleichen Sie auch mit der weit besseren Näherung

$$\ln N! \simeq N \cdot \ln N - N + \ln \sqrt{N} + \ln \sqrt{2\,\pi} + \frac{1}{12\,N}\,,$$

die bis auf Terme der Ordnung $O\,(N^{-3})$ genau ist.

b) Zeichnen Sie den absoluten Fehler

$$\Delta_{\text{abs}} = \ln N! - \{N \cdot \ln N - N\}$$

und den relativen Fehler

$$\Delta_{\text{rel}} = \frac{\ln N! - \{N \cdot \ln N - N\}}{\ln N!}$$

als Funktion von N.

Aufgabe 37: Eigenschaften des Dichteoperators (4 Punkte)

Gegeben sei der Operator $\hat{A}$ und der Dichteoperator $\hat{\rho}_N$ eines quantenmechanischen N-Teilchensystems. Zeigen Sie, dass gilt:

a) $\mathrm{Sp}\,(\hat{\rho}_N\,\hat{A}) = \mathrm{Sp}\,(\hat{A}\,\hat{\rho}_N)$.

b) $\hat{\rho}_N = \hat{\rho}_N^{+}$, d. h. $\hat{\rho}_N$ ist hermitesch.

c) $\hat{\rho}_N$ hat nur positive Erwartungswerte.

d) $\mathrm{Sp}\,(\hat{\rho}_N) = 1$, d. h. die Wahrscheinlichkeitsdichte ist normiert.

e) Zeigen Sie, dass der statistische Mittelwert $\langle\hat{A}\rangle$ eines Operators $\hat{A}$ gleich dem quantenmechanischen Erwartungswert von $\hat{A}$ ist, falls das System in einem reinen Zustand vorliegt.

Aufgabe 38: Dichteoperator für einen eindimensionalen unendlich hohen Potentialtopf (5 Punkte)

Der Anfangszustand $|\psi\,(0)\rangle$ eines Teilchens in einem unendlich hohen eindimensionalen Potentialtopf mit $V\,(x) = 0$ für $0 < x < L$ und $V\,(x) = \infty$ sonst sei so präpariert, dass die sechs tiefsten Eigenfunktionen mit der Wahrscheinlichkeit $P_\alpha \equiv P_n = \dfrac{A}{n}$ mit $n = 1, \ldots, 6$ enthalten sind und alle höheren Zustände nicht vorkommen.

a) Wie ist dann $\hat{\rho}\,(t = 0) =: \hat{\rho}$ gegeben?

b) Was folgt für den Energieerwartungswert in diesem Zustand?

c) Wie ist $\hat{\rho}\,(t)$ gegeben?

d) Was folgt für den Energieerwartungswert $\langle \hat{H} \rangle\,(t \neq 0)$, d. h. wie entwickelt sich der Energieerwartungswert mit der Zeit?

Aufgabe 39: Entropie des idealen Gases: mikrokanonisches Ensemble (4 Punkte)

Durch Extremalisierung des Gibbs'schen Funktionals für die Entropie eines mikrokanonischen Ensembles wurde in der Vorlesung gezeigt, dass gilt:

$$S^{\mathrm{kl}}\,(E,\,V,\,N) = k_B\,\ln\left\{\frac{\omega\,(E,\,V,\,N)}{C_N}\right\} \qquad \text{mit} \qquad C_N = N!\,h^{3N}\;.$$

a) Berechnen Sie die Entropie eines klassischen, monoatomaren Gases aus N identischen Teilchen im Volumen V mit der Gesamtenergie E.

b) Betrachten Sie das Ergebnis im thermodynamischen Limes und überprüfen Sie, ob sich die aus der Thermodynamik bekannte Fundamentalrelation ergibt. Bestimmen Sie S_0.

Aufgabe 40: Monotonie von $S^{\mathrm{kl}}\,(E,\,V,\,N)$: mikrokanonisches Ensemble (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Entropie eines klassischen N-Teilchensystems mit der Energie E im Volumen V (mikrokanonisches Ensemble) monoton wachsend mit E ist, d. h.

$$\left.\frac{\partial\,S^{\mathrm{kl}}}{\partial\,E}\right|_{V,\,N} = \frac{1}{T} > 0\;.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst ein einkomponentiges System und nutzen Sie für mehrkomponentige Systeme die Additivität der Entropie.