Aufgabe 31: Faltungssatz (2 Punkte)

Rufen Sie sich kurz den Faltungssatz in Erinnerung, indem Sie zeigen, dass die Fouriertransformierte $F(q)$ des Faltungsintegrals

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(y-x)\, d\,x$$

proportional zum Produkt der Fouriertransformierten $f(q)$ und $g(q)$ ist.

Aufgabe 32: Erzeugende Funktionen und Mittelwerte (5 Punkte)

Die erzeugende Funktion $\tilde{F}_Y(k)$ einer Verteilungsfunktion $F_Y(x)$ ist definiert als

$$\tilde{F}_Y(k) := \langle \mathrm{e}^{i\,k\,Y} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\,k\,x}\, d\,F_Y(x) \; = \int_{-\infty}^{\infty} p_Y(x)\, \mathrm{e}^{i\,k\,x}\, d\,x\ .$$

a) Berechnen Sie die erzeugende Funktion

   i) für die Binomialverteilung $P_n(j)$

   ii) für die Normal- bzw. Gaußverteilung $p(x)$.

b) Berechnen Sie für die Fälle i) und ii) unter a) jeweils das nullte, erste und zweite Moment der Verteilungen und damit jeweils den Mittelwert und die Varianz. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen aus Aufgabe 28.

Aufgabe 33: Random Walk (4 Punkte)

Ein reichlich angetrunkener Zeitgenosse versucht, von der Gastwirtschaft, in der er gezecht hat, zu seiner Wohnung zu gelangen. Beide liegen an einer streng eindimensionalen Straße. Die Wahrscheinlichkeiten für einen Schritt (der Länge a) in die richtige oder falsche Richtung seien gleich und sie hängen nicht von den vorherigen Schritten ab. Für n äquidistante Schritte benötigt der Zecher die Zeit $t_n = n \cdot t_{\mathrm{S}}$, wobei t_{S} die Zeit für einen Schritt ist.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er nach n Schritten (n sehr groß) den Weg $N \cdot a$ in der gewünschten Richtung zurückgelegt hat.

b) Berechnen Sie daraus die Wahrscheinlichkeit $p(x,\, t)$ dafür, dass er sich zur Zeit t im Wegintervall x und $x + d\,x$ befindet (Kontinuumslimes).

c) Skizzieren oder zeichnen Sie $p(x,\, t)$ für $t = 0$, t_1 und t_2 mit $0 < t_1 < t_2 < \infty$.

Aufgabe 34: Volumen und Oberfläche einer n-dimensionalen Kugel (4 Punkte)

Betrachten Sie eine n-dimensionale Kugel vom Radius R. Sie hat das Volumen $V_n(R) = C_n\, R^n$.

a) Wie groß ist das Volumen einer Kugelschale $V_n^s(d,\, R)$ der Dicke d an der Oberfläche dieser Kugel? Zeigen Sie, dass für festes $\dfrac{d}{R} \ll 1$ und sehr große n das Volumen $V_n^s(d,\, R)$ praktisch gleich dem Volumen $V_n(R)$ der ganzen Kugel ist.

b) Berechnen Sie das Volumen $V_n(R)$ und die Oberfläche $S_n(R)$ der n-dimensionalen Kugel. Benutzen Sie dazu die Tatsache, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)\right\} d\,x_1 \cdots d\,x_n$$

wohldefiniert und endlich ist. Benutzen Sie außerdem die Integraldarstellung und die Rekursionsformel für die Γ-Funktion:

$$\text{i)}\quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,d\,t\ , \qquad \text{ii)}\quad \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)\ .$$

Aufgabe 35: Der Phasenraum des harmonischen Oszillators (5 Punkte)

In der Vorlesung wurde eine Reihe von Eigenschaften eines klassischen N-Teilchen-Systems im $6\,N$-dimensionalen Phasenraum diskutiert. Gehen Sie noch einmal am Beispiel eines denkbar einfachen Phasenraumes, nämlich dem des eindimensionalen harmonischen Oszillators, durch die Argumente, indem Sie ausgehend von

$$\mathcal{H}(p,\,q) \;=\; \frac{p^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,q^2 \;=\; \frac{p^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\,f\,q^2 \qquad \text{mit} \qquad \omega^2 \;=\; \frac{f}{m}$$

die folgenden Punkte bearbeiten:

a) Welche Dimension hat der Phasenraum dieses Oszillators, der durch $\boldsymbol{x}(t)$ aufgespannt wird?

b) Berechnen Sie das zugehörige verallgemeinerte Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}(t)$ mit Hilfe der Hamiltongleichungen.

c) Bestimmen Sie die „Energiehyperfläche“ im Phasenraum, die durch die Bedingung $\mathcal{H}(p,\,q) = E = \text{const.}$ definiert ist. Benutzen Sie die Abkürzungen

$$p_0 \;=\; \{2\,m\,E\}^{\frac{1}{2}} \qquad \text{und} \qquad q_0 \;=\; \left\{\frac{2\,E}{f}\right\}^{\frac{1}{2}} \;=\; \left\{\frac{2\,E}{m\,\omega^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\ .$$

d) Bestimmen Sie die Phasenbahn bzw. die Trajektorie des Systems im Phasenraum, auf der sich das System mit der Zeit bewegt.

e) Lösen Sie die Hamiltongleichungen unter den Anfangsbedingungen

$$(p(0),\,q(0)) \;=\; (0,\,q_0)\ .$$

f) Berechnen Sie $\operatorname{grad}\mathcal{H}$, $|\boldsymbol{v}|$, $|\operatorname{grad}\mathcal{H}|$ und $\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\mathcal{H}$.

g) Zeichnen Sie die Phasenbahn des Oszillators in ein $q-p$-Diagramm. Zeichnen Sie auch die folgenden drei Bildpunkte

$$\boldsymbol{x}_1 \;=\; (p_0,\,0)\ , \qquad \boldsymbol{x}_2 \;=\; \left(\frac{p_0}{\sqrt{2}},\,\frac{q_0}{\sqrt{2}}\right)\ , \qquad \boldsymbol{x}_3 \;=\; (0,\,q_0)$$

sowie die verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_i$ und die Gradienten $\operatorname{grad}\mathcal{H}\big|_{\boldsymbol{x}_i}$ in diesen Bildpunkten des Phasenraumes ein. Wie verläuft die Bewegung des Systems im Phasenraum? Kontrollieren Sie, ob Ihre Ergebnisse im Einklang mit den Ergebnissen unter Punkt e) sind.