Aufgabe 48: Bose- und Fermi-Vertauschungsrelationen (10 Punkte)

Seien a_i^+, a_i und c_i^+, c_i Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren und

$$\hat{n}_i^B := a_i^+ \, a_i \qquad \text{sowie} \qquad \hat{n}_i^F := c_i^+ \, c_i$$

Teilchenzahloperatoren für Bosonen und Fermionen in Zuständen $|\varphi_{\lambda_i}\rangle$.

a) Zeigen Sie, dass die Boseoperatoren folgende Vertauschungsrelationen erfüllen:

$$\begin{aligned} \left[a_i, \, a_j\right] &= a_i \, a_j - a_j \, a_i = 0 \\ \left[a_i^+, \, a_j^+\right] &= a_i^+ \, a_j^+ - a_j^+ \, a_i^+ = 0 \\ \left[a_i, \, a_j^+\right] &= a_i \, a_j^+ - a_j^+ \, a_i = \delta_{ij} \; . \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass die Teilchenzahloperatoren für Bosonen miteinander kommutieren, d. h.

$$\left[\hat{n}_i^B, \, \hat{n}_j^B\right] = 0 \qquad \forall \; i, \, j \; .$$

c) Zeigen Sie, dass die Fermioperatoren folgende Antivertauschungsrelationen erfüllen:

$$\begin{aligned} \left\{c_i, \, c_j\right\} &= c_i \, c_j + c_j \, c_i = 0 \\ \left\{c_i^+, \, c_j^+\right\} &= c_i^+ \, c_j^+ + c_j^+ \, c_i^+ = 0 \\ \left\{c_i, \, c_j^+\right\} &= c_i \, c_j^+ + c_j^+ \, c_i = \delta_{ij} \; . \end{aligned}$$

d) Zeigen Sie, dass auch die Teilchenzahloperatoren für Fermionen miteinander kommutieren, d. h.

$$\left[\hat{n}_i^F, \, \hat{n}_j^F\right] = 0 \qquad \forall \; i, \, j \; .$$

Aufgabe 49: Verteilungsfunktionen (10 Punkte)

Betrachten Sie die mittlere Besetzungszahl $\bar{n}_\lambda^F$ bzw. $\bar{n}_\lambda^B$ eines Zustandes $|\lambda\rangle$ mit der Energie ε_λ für ein ideales Quantengas aus Fermionen bzw. Bosonen.

a) i) Untersuchen Sie das Verhalten von $\bar{n}_\lambda^F$ für $\varepsilon_\lambda < \mu$ und $\varepsilon_\lambda > \mu$. Was ergibt sich für kleine Temperaturen $k_B \, T \ll |\varepsilon_\lambda - \mu|$ bzw. große Temperaturen $k_B \, T \gg |\varepsilon_\lambda - \mu|$?

ii) Welchen Wert hat $\bar{n}_\lambda^F$ für $\varepsilon_\lambda = \mu$? Wie ändert sich dieser als Funktion der Temperatur? Die „Aufweichung“ der Fermiverteilung für $T \approx 0$ K wird mit $\pm 2 \, k_B \, T$ bezeichnet. Leiten Sie dieses durch Entwickeln von $\bar{n}_\lambda^F$ um $\varepsilon_\lambda = \mu$ her!

iii) Berechnen Sie

$$\bar{n}_\lambda^F \qquad \text{für} \qquad \varepsilon_\lambda = \mu \; , \qquad \varepsilon_\lambda = \mu \pm k_B \, T \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_\lambda = \mu \pm 3 \, k_B \, T \; .$$

iv) Skizzieren Sie $\bar{n}_\lambda^F$ für $T = 0$ und verschiedene $T > 0$.

b) i) Untersuchen Sie das Verhalten von $\bar{n}_\lambda^B$ für $\varepsilon_\lambda > \mu$. Warum ist der Bereich $\varepsilon_\lambda < \mu$ nicht zulässig? Was ergibt sich für kleine bzw. große Temperaturen?

ii) Berechnen Sie

$$\bar{n}_\lambda^B \qquad \text{für} \qquad \varepsilon_\lambda = \mu \ , \qquad \varepsilon_\lambda = \mu + k_B T \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_\lambda = \mu + 3\, k_B T \ .$$

iii) Skizzieren Sie $\bar{n}_\lambda^B$ für $T = 0$ und verschiedene $T > 0$.

c) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse für $\bar{n}_\lambda^F$ bzw. $\bar{n}_\lambda^B$ für $(\varepsilon_\lambda - \mu) \gg k_B T$ mit der Boltzmannverteilung. Zeichnen Sie für diesen Fall $\bar{n}_\lambda^F$ bzw. $\bar{n}_\lambda^B$ zusammen mit der Boltzmannverteilung.

Nicht vergessen!

Am Donnerstag, 22. Juli 2010, findet von 14:00 bis 17:00 Uhr

im HS 1 die Klausur zur Statistischen Physik statt.

Denken Sie bitte daran, sich in R. 707 zur Klausur anzumelden!