Aufgabe 1: Nützliche Integrale

Integrale des folgenden Typs kamen bereits in der Quantentheorie verschiedentlich vor. Sie fanden sich auch in der Formelsammlung zur Klausur in Quantentheorie. Auch in der Statistischen Physik werden wir sie immer mal wieder benötigen. Es ist daher jetzt ein guter Zeitpunkt, ein für allemal zu lernen, wie man sie berechnet.

Berechnen Sie:

a) $$\int_0^\infty x^n \, e^{-a\,x} \, d\,x \qquad \text{für} \qquad n \in \mathbb{N}_0 \; ,$$

b) $$\int_0^\infty x^{2\,n} \, e^{-b\,x^2} \, d\,x \qquad \text{für} \qquad n \in \mathbb{N}_0 \; ,$$

c) $$\int_0^\infty x^{2\,n+1} \, e^{-c\,x^2} \, d\,x \qquad \text{für} \qquad n \in \mathbb{N}_0 \; .$$

Berechnen Sie in jedem Fall zunächst das Integral zu $n = 0$ und leiten Sie daraus alle anderen Integrale durch Parameterdifferentiation ab.

Aufgabe 2: Vollständiges Differential

Bei thermodynamischen Prozessen sind die geleistete Arbeit δW und die umgesetzte Wärme δQ im Gegensatz zur Änderung der inneren Energie $d\,U$ im Allgemeinen nicht nur vom Anfangs- und Endzustand, sondern auch von der Art der Prozessführung abhängig. Mathematisch bedeutet dies, dass δQ und δW keine vollständigen (totalen) Differentiale sind. Zeigen Sie die Äquivalenz der hinreichenden Aussagen für die Existenz eines vollständigen Differentials:

$$d\,F\,(x,\,y) \;=\; A\,(x,\,y)\,d\,x \;+\; B\,(x,\,y)\,d\,y$$

ist vollständiges Differential, falls

1) $$\frac{\partial\,A}{\partial\,y} \;=\; \frac{\partial\,B}{\partial\,x}$$

oder

2) $$\oint_C \{A\,d\,x + B\,d\,y\} \;=\; 0$$

ist. Darin ist 1) die sogenannte Integrabilitätsbedingung für $F\,(x,\,y)$. $A\,(x,\,y)$ und $B\,(x,\,y)$ seien stetig differenzierbar und C ist ein doppelpunktfreier, aber sonst beliebiger geschlossener Weg im $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3: Vollständige und unvollständige Differentiale

Es seien die folgenden Differentialformen gegeben:

1) $\delta F = y\,dx + x\,dy$,

2) $\delta F = y\,dx - x\,dy$,

3) $\delta F = x\,y\,dx + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\,dy$,

4) $\delta F = \frac{\sin(2x)}{y^2 + \sin^2 x + 1}\,dx + \frac{2y}{y^2 + \sin^2 x + 1}\,dy$.

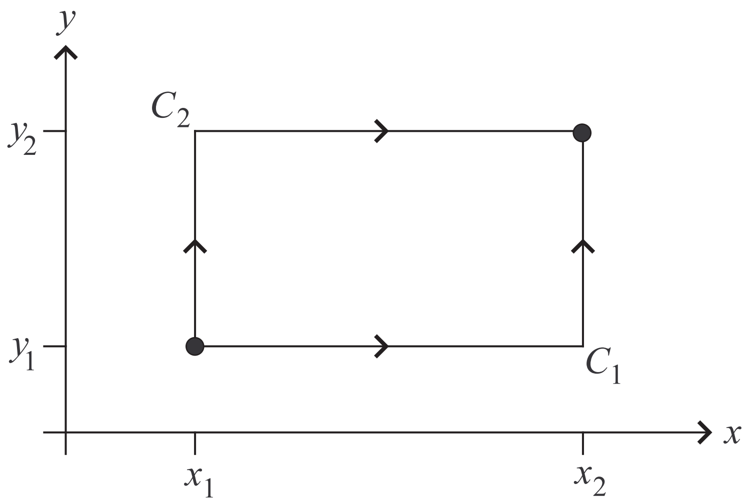
a) Welche dieser Differentialformen $\delta F(x, y)$ sind vollständige Differentiale $dF(x, y)$?

b) Berechnen Sie die Stammfunktion $F(x, y)$ für die vollständigen Differentiale.

c) Berechnen Sie die Wegintegrale

$$\int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} \delta F(x, y)$$

der Differentialformen 1) und 2) entlang der Wege C_1 und C_2.



d) Berechnen Sie die Umlaufintegrale für die Beispiele aus c) über den geschlossenen Umlauf $C = C_1 + (-C_2)$.

Aufgabe 4: Vollständiges Differential und integrierender Faktor

a) Bestimmen Sie eine Funktion $H(x, y)$ (integrierender Faktor) derart, dass das Differential

$$dF(x, y) = H(x, y)\,\{\sinh(x)\,\cos(y)\,dx + \cosh(x)\,\sin(y)\,dy\}$$

vollständig wird.

b) Bestimmen Sie die Stammfunktion $F(x, y)$.