

**Aufgabe 56: Energie einer geladenen Metallkugel****(mündlich, 4 Punkte)**

Eine metallische Vollkugel mit Radius  $R$  trage die Ladung  $Q$ .

- Geben Sie das elektrische Feld  $\vec{E}(\vec{r})$  im Inneren der Kugel und im Außenraum an.
- Wie hängt das Feld an der Kugeloberfläche mit der Flächenladungsdichte zusammen?
- Berechnen Sie die Feldenergie der Kugel.

**Aufgabe 57: Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten****(mündlich, 8 Punkte)**

(Wir bezeichnen in dieser Aufgabe das Potential mit  $\phi(\vec{r})$ , um eine Verwechslung mit dem Winkel  $\varphi$  in Kugelkoordinaten auszuschließen.)

- Das Potential  $\phi(\vec{r})$  einer Ladungsverteilung habe in Kugelkoordinaten die Form

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} R^2 \frac{3\cos^2\vartheta - 1}{r^3} \quad \text{mit} \quad R = \text{const.}$$

Berechnen Sie das zugehörige elektrische Feld  $\vec{E}(\vec{r})$ .

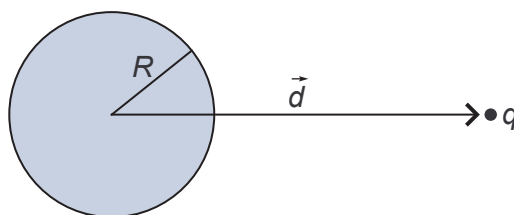
- Bestimmen Sie mit Hilfe der in der Vorlesung angegebenen allgemeinen Formeln den Ausdruck  $\Delta f(\vec{r})$  in Kugelkoordinaten.
- Eine metallische Kugel mit Radius  $R$  wird in ein homogenes elektrisches Feld  $E_0 \vec{e}_z$  gebracht. Dieses Feld induziert auf der Kugeloberfläche eine Ladungsdichte. Das resultierende Potential lautet (in Kugelkoordinaten) außerhalb der Kugel:

$$\phi(r, \vartheta) = -E_0 r \cos\vartheta + E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos\vartheta.$$

- Berechnen Sie  $\Delta\phi(r, \vartheta)$  außerhalb der Kugel.
- Bestimmen Sie die induzierte Flächenladungsdichte  $\sigma(\vartheta)$  an der Oberfläche der Kugel.

**Aufgabe 58: Bildladungsmethode****(schriftlich, 18 Punkte)**

Eine Punktladung  $q$  befinde sich im Abstand  $d$  vom Mittelpunkt einer leitenden Kugel mit Radius  $R$ . Der Mittelpunkt der Kugel falle mit dem Koordinatenursprung zusammen.



- a) Berechnen Sie das Potential dieser Anordnung für den Fall einer geerdeten Kugel, d. h.  $\varphi(\vec{r}) = 0$  für  $|\vec{r}| = R$ . Welche Ladungsdichte wird an der Oberfläche der Kugel induziert? Geben Sie die Kraft an, die durch die auf der Kugeloberfläche induzierte Ladung auf die Punktladung  $q$  ausgeübt wird.
- b) Geben Sie das Potential  $\varphi(\vec{r})$  für den Fall an, dass die Kugel nicht geerdet ist und die Ladung  $Q$  hat.
- c) Wie groß ist  $\varphi(\vec{r})$  im Fall einer Kugel, deren Oberfläche auf dem Potential  $\varphi(\vec{r}) = U$  für  $|\vec{r}| = R$  gehalten wird?

**Aufgabe 59: Bestimmung eines zylindersymmetrischen Potentials (mündlich, 8 Punkte)**

Zur Fokussierung von Elektronen- und Ionenstrahlen werden elektrische Felder benutzt, die durch konzentrisch um eine Achse (z. B.  $z$ -Achse) angeordnete ringförmige Elektroden erzeugt werden. Das Gesamtpotential einer solchen Anordnung kann man schreiben als

$$\varphi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) r^n .$$

Dabei ist  $r$  der zweidimensionale Abstand von der  $z$ -Achse.

Zeigen Sie, dass das Potential im raumladungsfreien Raum bei diesen Systemen eindeutig durch das Potential auf der  $z$ -Achse  $\varphi(r=0, z) = a_0(z)$  bestimmt ist und sich in der Form

$$\varphi(r, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{4^m (m!)^2} \cdot \frac{d^{2m}}{dz^{2m}} a_0(z) \cdot r^{2m}$$

darstellen lässt.

Setzen Sie dazu  $\varphi(r, z)$  in die Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten ein und betrachten Sie die Vorfaktoren zu gleichen Potenzen von  $r$ .

**Aufgabe 60: Kondensator (schriftlich, 2 Punkte)**

Der in der Vorlesung gezeigte Kondensator mit der (ungewöhnlich großen) Kapazität von  $C = 850 \text{ mF}$  wird mit einer Spannung von  $400 \text{ V}$  aufgeladen. Welche Ladung und welche Energie sind dann im Kondensator gespeichert?