9. Übung zur Statistischen Physik [Krüger, SS 2020]
Ausgabe: 23.06.2020, Abgabe: 30.06.2020, 12 Uhr

WWU

Aufgabe 23: Fermionengas bei $T = 0\,\mathrm{K}$ [7 Punkte]

Ein Gas von wechselwirkungsfreien Elektronen (Spin $S = 1/2$) lässt sich infolge des Pauli-Prinzips bei der Temperatur $T = 0\,\mathrm{K}$ nicht beliebig komprimieren. Berechnen Sie für dieses Gas den Nullpunktsdruck und die isotherme Kompressibilität bei $T = 0\,\mathrm{K}$. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

a) Bestimmen Sie zunächst allgemein für ein System von wechselwirkungsfreien Fermionen mit den Einteilchenenergien ε_j den Grenzwert $T \to 0$ des großkanonischen Potentials ϕ und der mittleren Teilchenzahl $\bar{n}_j$. Der Grenzwert $\mu\,(T = 0\,\mathrm{K})$ wird als Fermienergie ε_F bezeichnet.

b) Betrachten Sie jetzt ein dreidimensionales Elektronengas mit den Einteilchenenergien $\varepsilon_{\vec{k}} = \dfrac{\hbar^2\,k^2}{2\,m}$. Bestimmen Sie für $T = 0\,\mathrm{K}$ den größten Wellenvektor k_F eines besetzten Einteilchenzustandes und die zugehörige Einteilchenenergie ε_F.

c) Berechnen Sie $\phi\,(T = 0\,\mathrm{K})$ für das Elektronengas und bestimmen Sie damit den Nullpunktsdruck und die isotherme Kompressibilität $\kappa = -\dfrac{1}{V}\,\dfrac{\partial V}{\partial p}\Big|_T$ als Funktion der Dichte $\dfrac{N}{V}$.

Aufgabe 24: 2-dimensionales Fermionengas [5 Punkte]

Gegeben sei ein ideales 2-dimensionales Fermionengas (mittlere Teilchenzahl N, „Volumen“ $\widehat{=}$ Fläche (Area) $= A$, Spin $S = 1/2$) mit den Einteilchenenergien

$$\varepsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2\,k^2}{2\,m} \qquad \text{und} \qquad \vec{k} = (k_x,\,k_y)\;.$$

Die zugehörige großkanonische Zustandssumme lautet:

$$Y\,(T,\,A,\,\mu) = \prod_{\sigma\,\vec{k}} \left\{ 1 + \mathrm{e}^{-\beta\,(\varepsilon_{\vec{k}} - \mu)} \right\}\;.$$

a) Wie lautet das großkanonische Potential $\phi\,(T,\,A,\,\mu)$?

b) Berechnen Sie aus $\phi\,(T,\,A,\,\mu)$ die mittlere Teilchenzahl $N\,(T,\,A,\,\mu)$, indem Sie die diskrete Summe über $\vec{k} = (k_x,\,k_y)$ mit Hilfe von

$$\sum_{\vec{k}} \to \frac{A}{(2\,\pi)^2} \int d^2\,k = \frac{A}{(2\,\pi)^2} \int\limits_0^{2\,\pi} d\,\varphi \int\limits_0^{\infty} d\,k\;k$$

durch ein kontinuierliches Integral ersetzen.

c) Berechnen Sie aus $N\,(T,\,A,\,\mu)$ das chemische Potential $\mu\,(T,\,A,\,N)$. Wie verhält sich μ für $T \to 0$? Skizzieren Sie μ als Funktion von T für verschiedene Teilchendichten $\dfrac{N}{A}$.

Aufgabe 25: Photonengas [8 Punkte]

Photonen sind als Gas wechselwirkungsfreier Bosonen mit verschwindendem chemischen Potential (Pseudobosonen) beschreibbar.

a) Der Logarithmus der Zustandssumme dieses Systems hat die Form

$$\ln Y \;=\; -2 \sum_{\vec{k}} \ln\left(1 \,-\, \mathrm{e}^{-\beta\,\varepsilon_{\vec{k}}}\right) \qquad \text{mit} \qquad \varepsilon_{\vec{k}} \,=\, \hbar\, c\, k \;.$$

Der Faktor 2 berücksichtigt dabei die zwei Polarisationsrichtungen der elektromagnetischen Wellen. Berechnen Sie $\ln Y$, indem Sie die Summe über $\vec{k}$ durch ein (dreidimensionales) Integral ersetzen und anschließend partiell integrieren.

b) Berechnen Sie die freie Energie F, die Entropie S und die innere Energie E des Photonengases.

c) Bestimmen Sie den Druck $p\,(T,\,V)$ und die Wärmekapazität C_V des Gases.

d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Temperatur T und dem Volumen V bei einer adiabatischen Zustandsänderung des Photonengases?

e) Berechnen Sie die mittlere Photonenzahl in einem Volumen von 1 cm^3 bei $T \;=\; 2{,}73\,\mathrm{K}$ und $T \;=\; 300\,\mathrm{K}$.

Hinweis: Bei der statistischen Beschreibung von Pseudobosonen treten häufig Integrale der Form

$$\int_0^\infty \frac{x^n}{\mathrm{e}^x \,-\, 1}\, d\,x \;=\; n!\,\zeta\,(n \,+\, 1)$$

auf. Die Riemann'sche Zetafunktion hat die folgenden Werte:

$$\zeta\,(1) \,=\, \infty\;, \qquad \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \,=\, 2{,}612\;, \qquad \zeta\,(2) \,=\, \frac{\pi^2}{6}\;, \qquad \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \,=\, 1{,}341\;,$$

$$\zeta\,(3) \,=\, 1{,}202\;, \qquad \zeta\left(\frac{7}{2}\right) \,=\, 1{,}127\;, \qquad \zeta\,(4) \,=\, \frac{\pi^4}{90}\;.$$