7. Übung zur Statistischen Physik [Krüger, SS 2020]
Ausgabe: 09.06.2020, Abgabe: 16.06.2020, 12 Uhr

WWU

Aufgabe 17: Großkanonische Gesamtheit [6 Punkte]

a) Gegeben sei ein ideales Gas in einem Volumen V. Berechnen Sie für dieses System im Rahmen der klassischen Physik die Zustandssumme Y der großkanonischen Gesamtheit und das großkanonische Potential ϕ. Verwenden Sie ϕ, um den Druck $p\,(T,\,V,\,\mu)$, die Entropie $S\,(T,\,V,\,\mu)$ und die mittlere Teilchenzahl $N\,(T,\,V,\,\mu)$ zu bestimmen.

b) Die mittlere Teilchenzahl lässt sich auch aus

$$N \;=\; \langle \tilde{N} \rangle \;=\; \sum_{\tilde{N}=0}^{\infty} \tilde{N}\, \frac{\mathrm{e}^{\beta\,\mu\,\tilde{N}}\, Z\,(\tilde{N})}{Y} \;:=\; \sum_{\tilde{N}=0}^{\infty} \tilde{N}\, w\,(\tilde{N})$$

berechnen. Dabei ist $Z\,(\tilde{N}) \;=\; Z\,(T,\,V,\,\tilde{N})$ die Zustandssumme von $\tilde{N}$ Teilchen. Zeigen Sie, dass $w\,(\tilde{N})$ einer Poisson-Verteilung entspricht.

(*Hinweis*: Verwenden Sie dazu Ihre Ergebnisse für die mittlere Teilchenzahl N aus Teil a).)

c) Bestimmen Sie unter Verwendung der Resultate aus Aufgabe 7 die Schwankung

$$\Delta\, N \;:=\; \left(\langle \tilde{N}^2 \rangle \;-\; \langle \tilde{N} \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{und die relative Abweichung} \qquad \frac{\Delta\, N}{N}\;.$$

Aufgabe 18: Virialkoeffizient [7 Punkte]

Das Wechselwirkungspotential zwischen den Atomen eines Gases habe die Form

$$U\,(r) \;=\; \begin{cases} -\dfrac{\alpha}{r}\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{L}} & \text{für} \quad r \;>\; r_0 \\[2ex] \infty & \text{für} \quad r \;\leq\; r_0 \end{cases}\;.$$

Dabei sind α und L positive Konstanten. Skizzieren Sie das Potential und berechnen Sie den Virialkoeffizienten $B\,(T)$ für $k_B\,T \;\gg\; \alpha$. Bestimmen Sie damit die Parameter a und b der van der Waals-Gleichung (siehe z. B. Aufgabe 3).

Aufgabe 19: Statistischer Operator [7 Punkte]

Ein Wasserstoffatom mit dem Eigenzustand $|\chi_{nlm}\rangle \;=\; |n,\,l,\,m\rangle$ sei

a) in dem reinen Zustand $|\psi\rangle \;=\; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\left(|1,\,0,\,0\rangle \;+\; |2,\,0,\,0\rangle\right)$,

b) in einem gemischten Zustand, in dem es sich mit je 50 % Wahrscheinlichkeit in den Eigenzuständen $|1,\,0,\,0\rangle$ und $|2,\,0,\,0\rangle$ befindet.

Geben Sie für beide Zustände den jeweiligen statistischen Operator $\hat{\rho}$ an und berechnen Sie für beide Zustände die Erwartungswerte der Energie und der Radialkoordinate r.

Hinweis zur Berechnung von $\langle r \rangle$:

$$\langle n,\,0,\,0|r|n,\,0,\,0\rangle \;=\; \frac{3}{2}\,a_B\,n^2\;, \qquad \langle 1,\,0,\,0|r|2,\,0,\,0\rangle \;=\; -2\,\cdot\,\sqrt{2}\,\left(\frac{2}{3}\right)^4\,a_B\;.$$