6. Übung zur Statistischen Physik [Krüger, SS 2020]
Ausgabe: 26.05.2020, Abgabe: 09.06.2020, 12 Uhr

WWU

Aufgabe 14: Barometrische Höhenformel [5 Punkte]

Ein ideales Gas aus N Atomen befinde sich im Schwerefeld der Erde in einem Volumen V (siehe Abbildung). Das Atom i erfahre das Potential

$$U(z_i) = m \cdot g \cdot z_i \, .$$

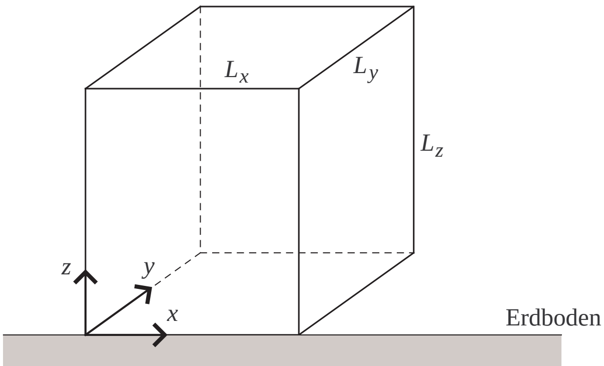
Berechnen Sie den thermodynamischen Mittelwert der Teilchendichte

$$n(\vec{r}) = \left\langle \sum_{j=1}^{N} \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \right\rangle$$

im Rahmen des kanonischen Ensembles. Geben Sie unter Verwendung des idealen Gasgesetzes

$$p = \frac{N}{V} k_B T = n \, k_B T$$

an, wie sich der Druck mit dem Abstand vom Erdboden ändert.



Hinweis: Hier entsprechen die generalisierten Koordinaten $q_1, \ldots, q_{3N}$ den Ortskoordinaten $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N$.

Aufgabe 15: Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung [8 Punkte]

a) In einem Volumen V befinde sich bei der Temperatur T ein ideales Gas aus N Teilchen. Berechnen Sie den thermodynamischen Mittelwert der Impulsdichte der Teilchen

$$w(\vec{p}) = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{j=1}^{N} \delta(\vec{p} - \vec{p}_j) \right\rangle$$

im Rahmen des kanonischen Ensembles. Das Produkt $w(\vec{p})\, d^3 p$ gibt dann die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Gasteilchen aus $d^3 p$ einen Impuls $\vec{p}$ besitzt. Bestimmen Sie damit die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\tilde{w}(\vec{v})\, d^3 v$ der Geschwindigkeiten.

b) Berechnen Sie dann die normierte Wahrscheinlichkeitsdichte $\tilde{\tilde{w}}(v)$ für den Betrag der Geschwindigkeit. Skizzieren Sie $\tilde{\tilde{w}}(v)$ und berechnen Sie die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_w. Bestimmen Sie die Mittelwerte $\sqrt{\langle v_x^2 \rangle}$, $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ und$\langle v \rangle$.

Aufgabe 16: Zweiatomiges ideales Gas [7 Punkte]

Ein Gas von N zweiatomigen starren Molekülen befinde sich in einem Volumen V. Die Moleküle mit der Masse m bestehen aus gleichen Atomen und besitzen das Trägheitsmoment I. Zur Behandlung dieses Systems ist es zweckmäßig, die Schwerpunktskoordinaten $\vec{r}_j = (x_j, y_j, z_j)$ und die Winkelkoordinaten ϑ_j und φ_j jedes Moleküls als generalisierte Koordinaten zu verwenden. Die Lagrange-Funktion des Systems lautet dann:

$$L = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{m\,\dot{\vec{r}}_j^{\,2}}{2} + \frac{I}{2} \left(\dot{\vartheta}_j^2 + \sin^2 \vartheta_j \cdot \dot{\varphi}_j^2 \right) \right] .$$

a) Die kanonischen Impulse sind mit generalisierte Koordinaten über

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial_{\dot{q}_\alpha}}$$

verknüpft. Berechnen Sie die kanonischen Impulse

$$\vec{p}_j = (p_{j\,x}, p_{j\,y}, p_{j\,z}) , \qquad p_{j\,\vartheta} \qquad \text{und} \qquad p_{j\,\varphi} .$$

Geben Sie die Hamiltonfunktion an.

b) Berechnen Sie im Rahmen eines kanonischen Ensembles die Zustandssumme

$$Z = \frac{1}{h^{5N} \cdot N!} \int \mathrm{e}^{-\beta H} \, d^{5N} q \, d^{5N} p$$

dieses Gases. (*Hinweis*: Das Volumenelement im Phasenraum der Winkelkoordinaten lautet $d\varphi_j \, d\vartheta_j \, dp_{j\,\varphi} \, dp_{j\,\vartheta}$.)

c) Bestimmen Sie die freie Energie F, den Druck und die Wärmekapazität C_V des Gases.