Aufgabe 15: Klein-Gordon-Gleichung (schriftlich, 10 Punkte)

a) [6P] Zeigen Sie, dass sich die Klein-Gordon-Gleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \Delta\psi + \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 \psi = 0$$

unter Verwendung der Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

in Form einer Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi$$

mit

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \qquad \phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi + \tilde{\psi}), \qquad \chi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi - \tilde{\psi}), \qquad \tilde{\psi} = \frac{i\hbar}{m_0 c^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

und

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0}(\sigma_3 + i\sigma_2)\Delta + m_0 c^2 \sigma_3$$

schreiben lässt.

Hinweis: Die Definition von $\tilde{\psi}$ und die KGG ergeben zusammen zwei Differentialgleichungen erster Ordnung.

b) [4P] Zeigen Sie, dass sich unter der Verwendung der Matrizen aus Teil a) die Viererstromdichte aus der Vorlesung

$$\varrho = \frac{i\hbar}{2m_0 c^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right), \qquad \vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m_0}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)$$

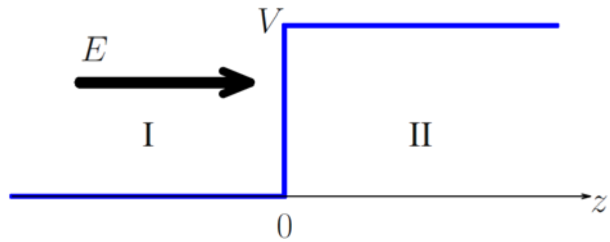
umschreiben lässt als

$$\varrho = \frac{1}{2}(\phi^*\phi - \chi^*\chi) = \frac{1}{2}\Psi^\dagger\sigma_3\Psi,$$

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{4im_0}\left[\Psi^\dagger\sigma_3(\sigma_3 + i\sigma_2)\nabla\Psi - (\nabla\Psi)^\dagger\sigma_3(\sigma_3 + i\sigma_2)\Psi\right].$$

Aufgabe 16: Potentialstufe für relativistische Teilchen (mündlich, 10 Punkte)

Ein Teilchen der Ruheenergie $E_0 = m\,c^2$ und der positiven relativistischen Energie $E = \sqrt{p^2\,c^2 + E_0^2} + V(z)$ bewege sich in z-Richtung auf eine Potentialstufe der Höhe V bei $z = 0$ zu (siehe Skizze).



a) [1P] Welchen Impuls hat das Teilchen in den beiden Bereichen?

b) [2P] In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die beiden Spinoren χ und φ der Lösung der Dirac-Gleichung voneinander abhängen. In Gegenwart eines stückweise konstanten Potentials gilt

$$E\,\varphi = c\,(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\,\chi + E_0\,\varphi + V(z)\,\varphi\,, \qquad E\,\chi = c\,(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\,\varphi - E_0\,\chi + V(z)\,\chi\,.$$

Es sei $\varphi = \binom{1}{0}$. Wie lautet dann χ in den beiden Bereichen?

c) [2P] Machen Sie einen geeigneten Ansatz für die Wellenfunktion in den beiden Bereichen. Verwenden Sie die Anschlussbedingungen $\psi_{\mathrm{I}}(0) = \psi_{\mathrm{II}}(0)$, um die Amplituden in Beziehung zu setzen.

Hinweis: Für eine rücklaufende Welle ändert sich nur das Vorzeichen des Impulses.

d) [2P] Berechnen Sie die Stromdichten $\vec{j} = c\,\psi^\dagger\,\vec{\alpha}\,\psi$ des einfallenden, des reflektierten und des transmittierten Teils der Wellenfunktion, dabei ist $\vec{\alpha}$ der Vektor der Dirac'schen Spinmatrizen, mit

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}\,, \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\,, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

e) [1P] Was ergibt sich damit für den Reflexionskoeffizienten $R = |\vec{j}_{\mathrm{refl}}|/|\vec{j}_{\mathrm{ein}}|$ und den Transmissionskoeffizienten $T = |\vec{j}_{\mathrm{trans}}|/|\vec{j}_{\mathrm{ein}}|$?

Hinweis: Mit den Abkürzungen

$$a = \sqrt{\frac{E - E_0}{E + E_0}} \qquad \text{und} \qquad b = \sqrt{\frac{E - E_0 - V}{E + E_0 - V}}$$

lassen sich R und T in eine bekannte Form bringen. Achtung: im Allgemeinen ist $b \in \mathbb{C}$.

f) [1P] Berechnen Sie die Koeffizienten R und T für folgende Stufenhöhen:

1) $V = 0\,,$
2) $0 < V < E - E_0\,,$
3) $V = E - E_0\,,$
4) $E - E_0 < V < E + E_0\,,$
5) $V = E + E_0\,,$
6) $E + E_0 < V < \infty\,,$
7) $V \to \infty\,.$

g) [1P] Fügen Sie alle sieben Bereiche in Graphen $R(V)$ und $T(V)$ zusammen und vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem bekannten Verhalten für ein nichtrelativistisches Teilchen. Was fällt Ihnen auf?