Aufgabe 12: Zeitabhängige Störung (schriftlich, 5 Punkte)

Betrachten Sie noch einmal die Situation aus Aufgabe 9, aber diesmal soll die Störung bei $t = 0$ abrupt eingeschaltet werden und anschließend exponentiell abklingen:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0 \\ \vec{E}\,\vec{e}_z\,e^{-\gamma\,t} & \text{für} \quad t > 0 \end{cases} \quad .$$

Zu $t = 0$ befinde sich das System im Grundzustand. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, im Grenzfall $t \to \infty$ das System in irgendeinem der $(n = 2)$-Zustände vorzufinden. Hierzu stellen Sie die Wellenfunktion im Dirac-Bild als Linearkombination der Energie-Eigenzustände dar (mit zeitabhängigen Koeffizienten $c_m(t)$) und lösen die auftretende(n) Bewegungsgleichung(en) für die Koeffizienten. Nutzen Sie hierbei die „zeitabhängige Störungsrechnung 1. Ordnung“ aus, bei der Sie annehmen, dass in der treibenden Funktion der Differenzialgleichung die Koeffizienten $c_n(t)$ als konstant betrachtet werden können.

Aufgabe 13: Fermi’s Goldene Regel (mündlich, 8 Punkte)

Betrachten Sie ein Wasserstoff-Atom im Grundzustand. Das Atom befinde sich in einem zeitlich oszillierenden elektrischen Feld der Feldstärke $E_0 \cos(\omega\,t)$; $\hbar\omega$ sei größer als die Bindungsenergie des Elektrons. Durch das elektrische Feld kann das Elektron aus dem Atom herausgeschlagen und das Atom somit ionisiert werden.

Hierzu nehme man vereinfachend an, dass die Endzustände des Elektrons durch ebene Wellen beschrieben werden können. Bestimmen Sie mittels zeitabhängiger Störungsrechnung niedrigster Ordnung die Übergangsrate in den ionisierten Zustand sowie die Winkelverteilung der herausgeschlagenen Elektronen. Gehen Sie hierzu folgendermaßen vor:

a) [4P] Bestimmen Sie die Wechselwirkungsmatrixelemente zwischen dem Ausgangszustand und den möglichen Endzuständen.

b) [2P] Bestimmen Sie die Übergangsraten in die Endzustände.

c) [2P] Bestimmen Sie die Zustandsdichte der Endzustände; diese brauchen Sie, um letztlich den Schritt von einer Zustandssummation zum kontinuierlichen Integral durchzuführen.

Ihre Ergebnisse werden schließlich der Fermi’schen Goldenen Regel ähneln; allerdings wird die dort verwendete Mittelung der Matrixelemente über alle Endzustände im vorliegenden Falle durch eine richtungsabhängige Mittelung ersetzt!

Aufgabe 14: Kurzzeitig getriebener harmonischer Oszillator (schriftlich, 7 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m_0 und der Ladung q befinde sich im eindimensionalen Potential eines harmonischen Oszillators mit der Kreisfrequenz ω. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich der Oszillator im Grundzustand $|0\rangle$. Ein elektrisches Feld werde für einen Zeitraum τ hinzugeschaltet, so dass die Störung die Form

$$H_1(t) = \begin{cases} -q\,E\,x & \text{für} \quad 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit E als elektrischer Feldstärke hat.

a) [3P] Berechnen Sie die Koeffizienten $c_1(\tau)$ und $c_2(\tau)$ am Ende der Störung für die Übergänge vom Grundzustand in den ersten bzw. zweiten angeregten Zustand in **erster** Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie.

b) [3P] Berechnen Sie nun die Koeffizienten $c_1(\tau)$ und $c_2(\tau)$ in **zweiter** Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie.

c) [1P] Bis zu welcher Ordnung müssten Sie in der Störungstheorie gehen, um einen endlichen Übergangskoeffizienten in den Zustand $|n\rangle$ zu erhalten?