


Aufgabe 28: Zwei Teilchen im Potentialtopf (schriftlich, 10 Punkte)

Zwei identische Spin- $\frac{1}{2}$ -Fermionen befinden sich in einem eindimensionalen unendlichen Potentialtopf der Breite L , also

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} .$$

- [2P] Wie lauten die Grundzustandswellenfunktion und die Grundzustandsenergie, wenn die beiden Teilchen einen Triplet-Zustand (Orthozustand) bilden?
- [2P] Wiederholen Sie Teil a) für einen Singulett-Zustand (Parazustand).
- [3P] Nehmen Sie nun an, dass sich das System im angeregten Zustand mit der Energie $E = 5 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$ befindet. Berechnen Sie das mittlere Abstandsquadrat der beiden Teilchen $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$ für Triplet- und Singulett-Zustand.
- [3P] Die beiden Teilchen sollen nun über eine kurzreichweitige, anziehende Kontaktwechselwirkung $H_1 = -\lambda \delta(x_1 - x_2)$ interagieren. Was ergibt sich in erster Ordnung Störungstheorie für die Energien in Teil a) und b)?

Aufgabe 29: Grundzustand des Heliumatoms (mündlich, 10 Punkte)

Um die Energie des Grundzustands des Heliumatoms anzunähern, soll das Ritz'sche Variationsverfahren verwendet werden.

Der Hamiltonoperator des Systems lautet

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} .$$

- [7P] Berechnen Sie unter Verwendung des Ritz'schen Variationsverfahrens eine obere Schranke für die Grundzustandsenergie. Verwenden Sie dazu (kombiniert mit der Singulett-Spinfunktion) die wasserstoffähnliche Testwellenfunktion

$$\psi(r_1, r_2) = \varphi_0(r_1) \varphi_0(r_2)$$

mit den Einteilchenwellenfunktionen in Ortsdarstellung

$$\varphi_0(r_i) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z^*}{a_B} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-Z^* r_i / a_B} .$$

Z^* ist der Variationsparameter (nicht zu verwechseln mit Z).

Hinweis: Die Rydbergenergie ist gegeben als

$$\text{Ry} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_B} = 13.6 \text{ eV} .$$

- [1P] Wie lässt sich der Variationsparameter Z^* interpretieren?
- [2P] Was ergibt sich aus Ihrer Abschätzung für die Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms H^- ? H^- ist ein stabiles Ion. Wird dies durch Ihr Ergebnis bestätigt?