Quantentheorie (WS 2017/18) Blatt 11 Prof. Rohlfing

Ausgabe: 19.12.2017, Rückgabe: 09.01.2018, Besprechung: 11.01.2018

Aufgabe 26: s-Wellen-Streuung an Kugelschale (schriftlich, 12 Punkte)

Eine ebene Welle soll an einem kugelsymmetrischen Potential der Form

$$V(\vec{r}) = -C\,\delta(r-a) \qquad \text{mit} \qquad C,\,a > 0$$

gestreut werden. Wir wollen nur den Fall der s-Wellen-Streuung betrachten, es gilt also immer $l = 0$.

a) [2P] Wie lautet die Radialgleichung in diesem Fall?

b) [2P] Durch die Substitution $u(r) = r\,R_0(r)$ lässt sich die Radialgleichung vereinfachen. Wie lautet die Differentialgleichung für $u(r)$?

c) [2P] Welche Rand- und Anschlussbedingungen müssen $R_0(r)$ und $u(r)$ bei $r = 0$ und $r = a$ erfüllen?

Hinweis: Das Potential im Ursprung ist Null. Was bedeutet das für $R_0(0)$ und damit für $u(0)$?

d) [4P] Zeigen Sie, dass der Ansatz

$$R_0(r) = \begin{cases} A\,h_0^{(-)}(k\,r) + B\,h_0^{(+)}(k\,r) & \text{für} \quad r < a \\ h_0^{(-)}(k\,r) + e^{i\,2\,\delta_0}\,h_0^{(+)}(k\,r) & \text{für} \quad r > a \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad E = \frac{\hbar\,k^2}{2\,m_0}$$

die Differentialgleichung aus b) löst. Dabei sind

$$h_l^{(\pm)} = \mp\,i\,(-x)^l \left(\frac{1}{l}\,\frac{d}{d\,x}\right)^l \frac{e^{\pm\,i\,x}}{x}$$

die sphärischen Hankelfunktionen.

Bestimmen Sie A und B aus den Rand- und Anschlussbedingungen für $u(r)$.

e) [2P] Berechnen Sie die Streuphase δ_0 aus der Sprungbedingung $d\,u/d\,r$ und daraus den Streuquerschnitt

$$\sigma = \frac{4\,\pi}{k^2}\,\sin^2(\delta_0)$$

im Grenzfall der Streuung langsamer Teilchen ($k\,a \ll 1$).

Aufgabe 27: Quantenmechanisches Zweikörperproblem (mündlich, 8 Punkte)

Betrachten Sie zwei Teilchen (mit Massen m_1 und m_2) mit einem Wechselwirkungspotenzial $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$. Der Hamiltonian sei durch die kinetischen Energien beider Teilchen und durch V gegeben.

Betrachten Sie im Folgenden die stationäre Schrödinger-Gleichung $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$, wobei die Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ von den Positionen $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ der beiden Teilchen abhängt. Ignorieren Sie Spin-Freiheitsgrade.

a) [6P] Zeigen Sie, dass die Schrödinger-Gleichung durch einen Separationsansatz

$$\psi\,(\mathbf{r}_1,\, \mathbf{r}_1) \;=\; \chi\,(\mathbf{R})\,\phi\,(\mathbf{r})$$

gelöst werden kann, mit der Schwerpunktskoordinate $\mathbf{R} = (m_1\,\mathbf{r}_1 + m_2\,\mathbf{r}_2)/(m_1 + m_2)$ und der Relativkoordinate $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Bestimmen Sie die beiden getrennten Schrödinger-Gleichungen für $|\chi\rangle$ und $|\phi\rangle$.

b) [2P] Zeigen Sie, dass im Falle gebundener Zustände des Wasserstoff-Atoms die resultierenden Energie-Eigenwerte als

$$E_{n,\mathbf{K}} \;=\; \hbar^2\,K^2/2\,(m_1 \,+\, m_2) \;-\; R^*/n^2$$

mit einer effektiven Rydberg-Konstante R^* und einem Gesamt-Impuls $\hbar\,\mathbf{K}$ dargestellt werden können. Bestimmen Sie R^* in Elektronenvolt.