Quantentheorie (WS 2017/18) Blatt 10 Prof. Rohlfing

Ausgabe: 12.12.2017, Rückgabe: 19.12.2017, Besprechung: 21.12.2017

Aufgabe 24: Eindimensionales Streuproblem (schriftlich 10, mündlich 3 Punkte)

Völlig analog zum dreidimensionalen Streuproblem kann Streuung auch im Eindimensionalen betrachtet werden. Hierzu betrachte man ein (schwaches) Potenzial $V(x)$ (das nur in einem kleinen Raumbereich $0 \le x \le a$ von Null verschieden sein möge), lasse aus $x < 0$ ein Teilchen mit Wellenfunktion $\exp(i\,k\,x)$ einfallen, und betrachte die resultierende Wellenfunktion vor dem Streuer (d. h. $x < 0$) sowie hinter dem Streuer (d. h. $x > 0$).

Im Einzelnen:

a) [3P] [Etwas knifflig:] Zeigen Sie, dass die retardierte Greenfunktion (hier im Eindimensionalen!) durch

$$\langle x|G_0^{(+)}(E)|x'\rangle = \frac{m}{i\,\hbar^2\,k} e^{i\,k|x-x'|}$$

gegeben ist, mit $k = \sqrt{2\,m\,E}/\hbar$ (*Hinweis*: Stellen Sie $G_0^{(+)}(E)$ zunächst im Impulsraum dar und transformieren Sie dann in den Ortsraum. Das auftretende eindimensionale Integral können Sie per Residuensatz lösen. Die Vorzeichen verdienen im Komplexen besondere Beachtung!).

b) [1P] Formulieren Sie nun die Lippmann-Schwinger-Gleichung im Eindimensionalen.

c) [1P] Betrachten Sie die Lösung der Lippmann-Schwinger-Gleichung im Rahmen der 1. Born'schen Näherung, d. h. nehmen Sie an, die Wellenfunktion innerhalb des auftretenden Integrals sei durch die ungestörte Wellenfunktion gegeben.

d) [2P] Zeigen Sie, dass die resultierende Wellenfunktion *vor* dem Streupotenzial durch eine einlaufende und eine zurücklaufende Welle gegeben ist.

e) [2P] Zeigen Sie, dass die resultierende Wellenfunktion *hinter* dem Streupotenzial durch eine durchlaufende Welle gegeben ist, die aber gegenüber dem ungestörten Problem phasenverschoben ist. Wie groß ist die Phasenverschiebung? Um welche Streulänge wird die durchlaufende Welle verschoben?

f) [1P] Wäre die hier benutzte Vorgehensweise auch für starke Streupotenziale (z. B. eine Tunnelbarriere) geeignet? Warum/warum nicht?

[ab hier mündlich]

g) [3P] Bestimmen Sie für den einfachen Fall eines Rechteck-Potenzials [$V(x) = V_0$ für $0 < x < a$] die Phasenverschiebung zwischen einlaufender und auslaufender Welle explizit, indem Sie (analog zum Tunnelproblem, vgl. Abschnitt 4.4 im Sommersemester 2017) die Anschlussbedingungen bei $x = 0$ und $x = a$ auswerten. Verwenden Sie (für $|V_0| \ll E$) geeignete Näherungen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus e).

Aufgabe 25: Streuung in erster Born'scher Näherung (mündlich, 7 Punkte)

a) [2P] In der Vorlesung wurde für das Yukawa-Potential

$$V(r) = \frac{\alpha}{r}\, e^{-\beta r}$$

der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\,\alpha^2\, m_0^2}{\hbar^4}\, \frac{1}{(\beta^2 + q^2)^2} \qquad \text{mit} \qquad q^2 = 2\,k^2\,[1 - \cos(\vartheta)] = 4\,k^2\, \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

berechnet.

Bestimmen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt σ. Was ergibt sich für das Coulomb-Potential?

Hinweis: Eine Integration über q statt über ϑ erleichtert die Rechnung.

b) [5P] Berechnen Sie für das Potential einer sphärischen Potentialbarriere

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & \text{für} \quad r < r_0 \\ V & \text{für} \quad r > r_0 \end{cases}$$

in erster Born'scher Näherung den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ und den totalen Wirkungsquerschnitt σ.

Was ergibt sich für die Streuung an einem Potentialtopf ($V_0 \to -V_0$)?

Hinweis:

$$\int_0^a \frac{[x\,\cos(x) - \sin(x)]^2}{x^5}\, dx = \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{a^2} + \frac{\sin(2\,a)}{a^3} - \frac{\sin^2(a)}{a^4}\right] .$$