Aufgabe 1: Impulsdarstellung (mündlich, 10 Punkte)

Eine räumliche Wellenfunktion $\psi(x)$ (hier: im Eindimensionalen) kann durch Fouriertransformation in den Impulsraum überführt werden:

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar} p x}\, d x \;.$$

Die eindimensionale, zeitunabhängige Schrödingergleichung lautet dann in Impulsdarstellung

$$\frac{p^2}{2m} \tilde{\psi}(p) + \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(p - p')\, \tilde{\psi}(p')\, d p' = E\, \tilde{\psi}(p) \;.$$

Dabei ist

$$\tilde{V}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} V(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar} p x}\, d x$$

die Fouriertransformierte des Potentials. Gesucht ist der gebundene Zustand (d. h. $E < 0$) im Potential $V(x) = -\beta\, \delta(x)$.

a) [2P] Wie lautet $\tilde{V}(p)$ und die dazugehörige zeitunabhängige Schrödingergleichung?

b) [3P] Unter der Annahme $E < 0$ erhalten Sie durch geeignete Integration über die Wellenfunktion eine Lösbarkeitsbedingung. Wie lautet der daraus folgende Energie-Eigenwert?

   Hinweis: Das Ergebnis eines bestimmten Integrals ist eine Zahl.

c) [3P] Berechnen Sie die normierte Wellenfunktion im Impulsraum $\tilde{\psi}(p)$.

d) [2P] Berechnen Sie daraus die Wellenfunktion im Ortsraum.

Aufgabe 2: Kopplung zweier Spin-1-Teilchen (schriftlich, 6 Punkte)

Zwei Spins $\vec{S}_1$ und $\vec{S}_2$ mit den Quantenzahlen $s_1 = s_2 = 1$ sollen zum Gesamtspin $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ gekoppelt werden.

a) [2P] Welche Werte nimmt die Quantenzahl s des Gesamtspins an? Wie viele linear unabhängige Zustände gibt es?

b) [4P] Konstruieren Sie die Eigenzustände $|s,\, m\rangle$ zu S^2 und S_z ausgehend von den ungekoppelten Zuständen $|s_1,\, m_1;\, s_2,\, m_2\rangle$.

   Hinweis: Bestimmen Sie zunächst unter Verwendung des Operators S_- die Eigenzustände mit dem größtmöglichen Wert von s. Durch Orthogonalisierung und erneute Anwendung von S_- erhalten Sie dann die Zustände mit dem nächstniedrigeren Wert von s usw. Bekanntlich gilt für die Wirkung eines Absteigeoperators J_- auf einen Zustand:

$$J_- \,|j,\, m\rangle = \hbar \sqrt{j\,(j+1) - m\,(m-1)}\, |j,\, m-1\rangle \;.$$

Aufgabe 3: Bell-Messung (schriftlich, 4 Punkte)

Zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen a und b befinden sich im verschränkten Zustand

$$|\psi\rangle \;=\; \alpha\,|{\uparrow}\rangle_a\,|{\uparrow}\rangle_b \;+\; \beta\,|{\uparrow}\rangle_a\,|{\downarrow}\rangle_b \;+\; \gamma\,|{\downarrow}\rangle_a\,|{\uparrow}\rangle_b \;+\; \delta\,|{\downarrow}\rangle_a\,|{\downarrow}\rangle_b$$

mit

$$|\alpha|^2 \;+\; |\beta|^2 \;+\; |\gamma|^2 \;+\; |\delta|^2 \;=\; 1\ .$$

a) [2P] Die z-Komponente jedes Spins wird gemessen. Wie lauten die möglichen Messergebnisse und mit welchen Wahrscheinlichtkeiten werden sie gemessen?

b) [2P] Statt der z-Komponenten werden nun Messungen durchgeführt, die den Spin-Zustand der beiden Teilchen auf einen der vier Bell-Zustände

$$|\Psi_+\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|{\uparrow}\rangle_a\,|{\uparrow}\rangle_b \;+\; |{\downarrow}\rangle_a\,|{\downarrow}\rangle_b\right)\ , \qquad |\Phi_+\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|{\uparrow}\rangle_a\,|{\downarrow}\rangle_b \;+\; |{\downarrow}\rangle_a\,|{\uparrow}\rangle_b\right)$$

$$|\Psi_-\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|{\uparrow}\rangle_a\,|{\uparrow}\rangle_b \;-\; |{\downarrow}\rangle_a\,|{\downarrow}\rangle_b\right)\ , \qquad |\Phi_-\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|{\uparrow}\rangle_a\,|{\downarrow}\rangle_b \;-\; |{\downarrow}\rangle_a\,|{\uparrow}\rangle_b\right)$$

projiziert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird jeder Bell-Zustand gemessen? Zeigen Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeiten zu Eins summieren.

Hinweis: Die Bell-Zustände bilden eine vollständige orthonormale Basis.