Übungen zu Atom- und Quantenphysik (SS 2019)

Krüger/Weinheimer

Blatt 10: Ausgabe: 29.05.2019, Abgabe: 06.06.2019

Aufgabe 40: Eigenfunktion des Ortsoperators in Impulsdarstellung [6 Punkte, schriftlich]

a) [3P] Berechnen Sie die Eigenfunktion $\phi_\lambda(p)$ des eindimensionalen Ortsoperators in der Impulsdarstellung $\left(\hat{x} \mathrel{\widehat{=}} i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial\,p}\right)$:

$$\hat{x}\,\phi_\lambda(p) = \lambda\,\phi_\lambda(p)\ .$$

Normieren Sie die Funktionen derart, dass

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi_\lambda^*(p)\,\phi_{\lambda'}(p)\,d\,p = \delta(\lambda - \lambda')$$

erfüllt ist.

b) [3P] Transformieren Sie die Wellenfunktion $\phi_\lambda(p)$ in den Ortsraum (siehe Aufgabe 36). Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem in der Vorlesung vorgestellten Ergebnis. Welche Bedeutung hat der Eigenwert λ?

Aufgabe 41: Harmonischer Oszillator und Unschärferelation [5 Punkte, mündlich]

Zeigen Sie, dass das Vorhandensein der von Null verschiedenen Grundzustandsenergie $E_g = \frac{1}{2}\,\hbar\,\omega$ des harmonischen Oszillators eine unmittelbare Konsequenz der Unschärferelation ist.

Hinweis: Betrachten Sie die mittlere Energie des Oszillators

$$\langle E\rangle = \left\langle \frac{\hat{p}^2}{2\,m}\right\rangle + \left\langle \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,x^2\right\rangle$$

und minimieren Sie diese (Ableitung nach $\langle\hat{p}^2\rangle$) unter Verwendung der Unschärferelation.

Aufgabe 42: Unitäre Operatoren [4 Punkte, schriftlich]

Ein Operator $\hat{U}$ ist unitär, wenn gilt: $\hat{U}\,\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\,\hat{U} = 1$. Der Operator $e^{\hat{B}}$ sei definiert als

$$e^{\hat{B}} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,(\hat{B})^n\ .$$

a) [2P] Beweisen Sie die Aussage: $e^{i\,\hat{A}}$ unitär $\Leftrightarrow$ $\hat{A}$ hermitesch.

b) [2P] Zeigen Sie, dass der Operator $\hat{U}(a) = e^{i\,\frac{\hat{p}}{\hbar}\,a}$ räumliche Translationen bewirkt, d. h.

$$\hat{U}(a)\,\psi(x) = \psi(x + a)\ .$$

Aufgabe 43: Zweidimensionaler harmonischer Oszillator [5 Punkte, schriftlich]

Der Hamiltonoperator eines zweidimensionalen harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2\right) + \frac{m\,\omega^2}{2}\left(\hat{x}^2 + \hat{y}^2\right) .$$

a) [3P] Lösen Sie die Schrödingergleichung in Ortsdarstellung und geben Sie die Eigenfunktionen und die Eigenwerte an. Greifen Sie dabei an geeigneter Stelle auf bekannte Resultate zurück.

b) [2P] Geben Sie die drei niedrigsten Eigenwerte und deren Entartungsgrad an.

Aufgabe 44: Größe des Wasserstoffatoms [5 Punkte, schriftlich]

a) [2P] Bestimmen Sie den Erwartungswert der Wasserstoffwellenfunktion Ψ_{nlm} bzgl. des Operators $\hat{r}$ für $n = 2$, $l = 1$, $m = 0$ ohne Nutzung der Formel von Aufgabenteil b) aber mit

$$\int_0^\infty r^n \, e^{-r/\rho} \, dr = n! \, \rho^{n+1} .$$

b) [3P] Von Rydbergatomen spricht man, wenn die Hauptquantenzahl n sehr groß wird. Berechnen Sie für $n = 100$ die Bindungsenergie sowie für $l = 0$ und $l = 99$ den Radiuserwartungswert $\langle \hat{r} \rangle$ und vergleichen Sie ihn mit dem entsprechenden Radius des Bohr'schen Atommodells für $n = 100$.

Benutzen Sie folgende Fomel für den Radiuserwartungswert

$$\langle \hat{r} \rangle_{nlm} = a_B \cdot \frac{n^2}{Z}\left[1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{l(l+1)}{n^2}\right)\right] .$$

Aufgabe 45: Klassische Beschreibung des Elektronenspins [5 Punkte, mündlich]

Betrachten Sie das Elektron als klassische Kugel mit Radius r, Masse m und Gesamtladung $q = -e$, wobei die Ladung und die Masse homogen verteilt seien. Nehmen Sie an, die Kugel rotiere mit einem Drehimpuls $l = \sqrt{3/4}\,\hbar$. Der Radius dieser Kugel betrage $r = \alpha^2 \cdot a_B = 2{,}82 \cdot 10^{-15}$ m („klassischer Elektronenradius").

a) [3P] Wie groß ist die Bahngeschwindigkeit eines Punktes auf dem Äquator (nicht-relativistische Rechnung)?

b) [2P] Vergleichen Sie die Rotationsenergie mit der Energie aus der Ruhemasse $m\,c^2$. Ergibt diese klassische Betrachtung des Elektronenspins insgesamt Sinn?