Übungen zu Atom- und Quantenphysik (SS 2019)

Krüger/Weinheimer

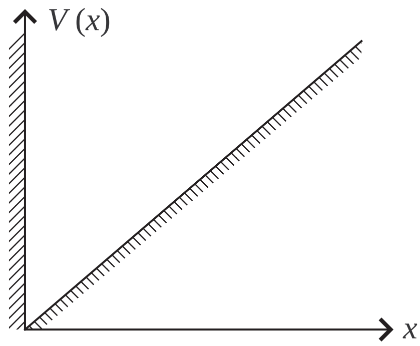
Blatt 9: Ausgabe: 23.05.2019, Abgabe: 29.05.2019

Aufgabe 36: **Stationäre Schrödinger-Gleichung im Impulsraum** **[10 Punkte, mündlich]**

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem Potential der Form

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad -\infty < x < 0 \\ C \cdot x & \text{für} \quad 0 \leq x \leq \infty \,, \end{cases}$$

wobei C eine Konstante ist.



Es erweist sich als zweckmäßig, die stationäre Schrödinger-Gleichung für dieses System im Impulsraum zu lösen. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

a) [4P] Stellen Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung in der Impulsdarstellung $\left(\hat{x} \mathrel{\widehat{=}} i\,\hbar \frac{d}{d\,p}\right)$ auf:

$$\hat{H}\,\phi(p) = E\,\phi(p)$$

und lösen Sie diese Differentialgleichung (z. B. durch Trennung der Variablen).

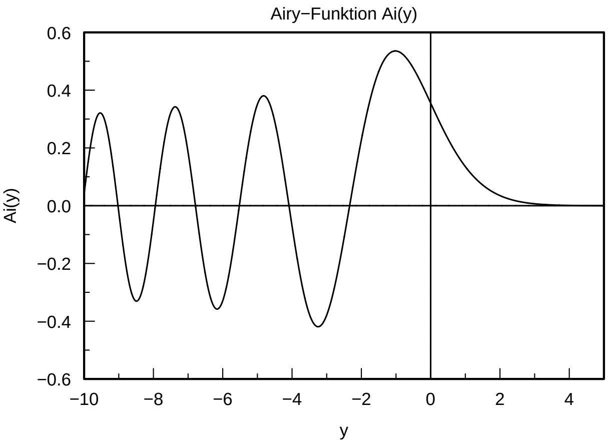
b) [3P] Transformieren Sie die Wellenfunktion $\phi(p)$ in den Ortsraum

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\hbar}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(p)\, e^{\frac{i\,p\,x}{\hbar}}\, d\,p \,.$$

Dies sollte Sie auf ein Integral der Form

$$I(y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \cos\left(\frac{s^3}{3} + s\,y\right) d\,s$$

führen, dessen numerische Lösung in nachfolgendem Bild dargestellt ist. ($I(y)$ wird als Airy-Funktion $Ai(y)$ bezeichnet.)



c) [2P] Verwenden Sie die Randbedingung $\varphi(x = 0) = 0$, um für $C = \frac{\sqrt{16\,m}}{\hbar}\,\mathrm{eV}^{3/2}$ die drei energetisch tiefsten Eigenwerte E_n dieses Systems zu berechnen.

d) [1P] Skizzieren Sie für die Zustände aus c) die zugehörigen Wellenfunktionen.

Aufgabe 37: Harmonischer Oszillator **[10 Punkte, schriftlich]**

Ein Teilchen der Masse m bewege sich unter dem Einfluss eines Potentials $V(x) = \frac{1}{2}\,k\,x^2$.

a) [3P] Das Teilchen befinde sich in einem Zustand, der durch die Wellenfunktion

$$\psi(x,\,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\psi_0(x,\,t) + i\,\psi_1(x,\,t)\Big)$$

beschrieben wird. Dabei ist

$$\psi_n(x,\,t) = \varphi_n(x)\cdot \mathrm{e}^{\frac{E_n}{i\hbar}t}\;,$$

wobei $\varphi_n(x)$ die Eigenfunktionen und E_n die zugehörigen Eigenenergien des harmonischen Oszillators sind.

Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\hat{x}\rangle_t$ in diesem Zustand.

b) [3P] Berechnen Sie für den Zustand aus a) die Energie $E = \langle\hat{H}\rangle$.

c) [2P] Berechnen Sie mit Hilfe der Sätze von Ehrenfest den Erwartungswert $\langle\hat{x}\rangle_t$ als Funktion der Zeit.

d) [2P] Berechnen Sie zum Vergleich die Bahnkurve eines klassischen harmonischen Oszillators mit den Anfangsbedingungen $x(t = 0) = 0$ und $\dot{x}(t = 0) = v_0$. Wie groß ist die Energie E eines Systems mit der Federkonstanten $k = 0{,}04\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ für ein Teilchen der Masse $1\,\mathrm{g}$ bei einer Anfangsgeschwindigkeit von $0{,}05\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$? Drücken Sie E als Vielfaches von $\hbar\omega$ aus.

Aufgabe 38: Erwartungswerte von Wasserstoffwellenfunktionen **[7 Punkte, schriftlich]**

a) [3P] Berechnen Sie die Bindungsenergie E_{200} des Zustands $\Psi_{200}(r,\vartheta,\phi)$, indem Sie den Erwartungswert des Hamilton-Operators $\hat{H}$ ausrechnen.

Hinweis: Im Hamiltonoperator ist der Laplace-Operator enthalten, den Sie in Kugelkoordinatendarstellung benutzen sollten. Bitte überlegen Sie, ob Sie bei dieser speziellen Wellenfunktionen $\Psi_{200}(r,\vartheta,\phi)$, alle Terme des Laplace-Operators benötigen.

b) [2P] Zeigen Sie, dass auch für die quantenmechanisch berechnete Bindungsenergie des obigen Zustands $\Psi_{200}(r,\vartheta,\phi)$ der Virialsatz gilt, indem Sie E_{200} aus Aufgabenteil a) mit dem Erwartungswert des Potentialoperators $\hat{V}(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ vergleichen.

c) [2P] Berechnen Sie das Produkt des Erwartungswertes des $\hat{r}^2$- und des $\hat{p}^2$-Operators für die Grundzustandswellenfunktion von Wasserstoff. Hier dürfen Sie gerne den Virialsatz anwenden, um den Erwartungswert von $\hat{p}^2$ zu bestimmen.

Tipp für alle Aufgaben:

$$\int_0^\infty r^n e^{-r/\rho}\,dr = n!\;\rho^{n+1}\;.$$

Aufgabe 39: **Übergangswahrscheinlichkeit** **[3 Punkte, schriftlich]**

Ein superschwerer Wasserstoffatom (Tritium) macht einen β^--Zerfall, wobei ein Elektron und ein Elektronantineutrino ausgesendet werden. Das zurückbleibende Ion ist ein $^3\mathrm{He}^+$-Ion. Es hat Kernladungszahl $Z = 2$ aber nur ein Hüllenelektron und ist damit wasserstoffähnlich.

a) [2P] Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Ion sich nach dem Zerfall in dem wasserstoffähnlichen $n = 2$, $l = 0$ Zustand $\Psi_{200}(Z = 2)$ befindet.

Die Übergangswahrscheinlichkeit W wird in der sogenannten „sudden approximation" aus dem Überlappintegral der ursprünglichen Wasserstoffwellenfunktion $\Psi_i = \Psi_{100}(Z = 1)$ und der neuen Endzustandswellenfunktion $\Psi_f = \Psi_{200}(Z = 2)$ wie folgt berechnet:

$$W = \left| \int_0^\infty \int_{4\pi} \Psi_i^* \, \Psi_f \, d\Omega \, r^2 \, dr \right|^2 .$$

Benutzen Sie für den wasserstoffähnliche Wellenfunktion des Heliumions $^3\mathrm{He}^+$:

$$\Psi_{200}(Z = 2) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \cdot (1 - r/a_0) \cdot e^{-r/a_0} .$$

b) [1P] Warum gibt es keine Zerfälle, die in Zuständen mit $l \neq 0$ enden?