Übungen zu Atom- und Quantenphysik (SS 2019)

Krüger/Weinheimer

Blatt 5: Ausgabe: 25.04.2019, Abgabe: 02.05.2019

Aufgabe 16: Zweidimensionaler Potentialtopf [11 Punkte, schriftlich]

Ein Teilchen mit der Masse m befinde sich in einem zweidimensionalen rechteckigen Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden

$$V(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \le x \le A\,, \qquad 0 \le y \le B \\ \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} .$$

a) [8P] Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des zugehörigen Hamiltonoperators (Lösung der stationären Schrödingergleichung) unter Benutzung eines Produktansatzes der Form

$$\varphi(x, y) = f(x) \cdot g(y) \,.$$

Beachten Sie die Normierung von $\varphi(x, y)$.

Hinweis: Führen Sie die Lösung der zweidimensionalen Schrödingergleichung mit Hilfe des Produktansatzes auf die Lösung von zwei eindimensionalen Gleichungen zurück.

b) [3P] Geben Sie jeweils die zwei energetisch tiefsten Eigenwerte für $A \neq B$ und für $A = B$ an.

Aufgabe 17: Hermitesche Operatoren [6 Punkte, schriftlich]

Gegeben seien zwei beliebige hermitesche Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$, die auf quadratintegrable Funktionen wirken. Folgende Kombinationen dieser Operatoren werden gebildet:

$$\hat{O}_1 = \hat{A}\,\hat{B}\,, \qquad \hat{O}_2 = \hat{A}^2\,,$$

$$\hat{O}_3 = \hat{A}\,\hat{B} + \hat{B}\,\hat{A}\,, \qquad \hat{O}_4 = \hat{A}\,\hat{B} - \hat{B}\,\hat{A}\,.$$

Geben Sie an, welcher der Operatoren $\hat{O}_1$ bis $\hat{O}_4$

a) [2P] ebenfalls ein hermitescher Operator ist,

b) [2P] rein imaginäre Erwartungswerte hat,

c) [2P] keine negativen reellen Erwartungswerte hat.

Aufgabe 18: Eindimensionale Schrödingergleichung [3 Punkte, mündlich]

Zeigen Sie, dass es zu jedem Eigenwert E der eindimensionalen Schrödingergleichung

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\frac{d^2}{d\,x^2} + V(x)\right\} \varphi(x) = E\,\varphi(x)$$

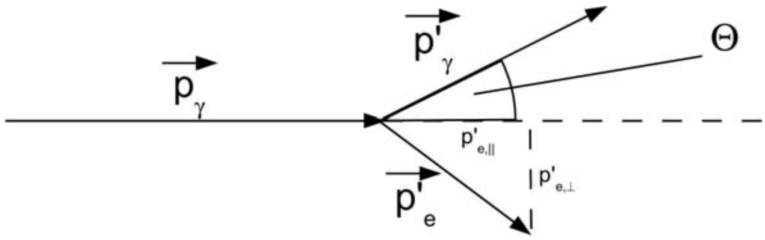
nur eine Eigenfunktion gibt, d. h., der Fall der Entartung tritt nicht auf.

Hinweis: Behaupten Sie das Gegenteil und führen Sie die Behauptung zum Widerspruch.

Aufgabe 19: Compton-Streuung **[6 Punkte, schriftlich]**

a) [4P] Leiten Sie die Compton-Streuformel ab:

$$E'_\gamma \;=\; E_\gamma \,\cdot\, \frac{1}{1 \,+\, \frac{E_\gamma}{m_e\,c^2} \,\cdot\, (1 \,-\, \cos\,\theta)}\;.$$



Betrachten Sie dazu die Streuung eines einlaufenden Photons der Energie E_γ an einem vor der Streuung ruhenden Elektron (Ruheenergie $m_e\,c^2$). Benutzen Sie dabei Energie- und Impulserhaltung. Es ist vorteilhaft, wenn Sie die Impulserhaltung einmal für die Longitudinal- und einmal für die Transversalimpulse (z. B. $p_{e,\,\parallel}$ und $p_{e,\,\perp}$) in der Streuebene aufstellen (siehe Abb.). Da die Compton-Streuung nur für höherenergetische Photonen (Röntgen- und Gammastrahlung im 100 keV- bis 1 MeV-Bereich) überwiegt, müssen Sie für die Elektronen die relativistische Energie-Impulsbeziehung benutzen:

$$E_{\text{kin},\,e} \,+\, m_e\,c^2 \;=\; E_{\text{tot}} \;=\; \sqrt{p_e^2\,c^2 \,+\, m_e^2\,c^4}\;.$$

b) [2P] Bei welchem Streuwinkel θ tritt der maximale Energieübertrag $E_\gamma \,-\, E'_\gamma$ auf das Elektron auf? Berechnen Sie den maximalen Energieübertrag $E_\gamma \,-\, E'_\gamma$ für große Photonenergien $E_\gamma \gg m_e\,c^2$.

Aufgabe 20: De Broglie-Wellenlänge **[4 Punkte, mündlich]**

Auch Materieteilchen zeigen Wellencharakter. Ihre Wellenlänge, die sogenannte *de Broglie-Wellenlänge* λ_{dB}, hängt wie folgt vom Impuls p und dem Planck'schen Wirkungsquantum h ab:

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{p}\;.$$

Berechnen Sie die de Broglie Wellenlänge für folgende Teilchen:

a) [1P] thermisches Neutron ($m_n\,c^2 \;\cong\; 9{,}40 \,\cdot\, 10^8$ eV) mit einer kinetischen Energie von $E_{\text{kin}} = 25$ meV,

b) [1P] Elektron mit einer kinetischen Energie von $E_{\text{kin}} = 20$ eV,

c) [1P] Elektron mit einer kinetischen Energie von $E_{\text{kin}} = 200$ keV (typische Energie bei einem Elektronenmikroskop, bitte relativistisch rechnen),

d) [1P] Staubkorn mit Durchmesser $d = 1\ \mu$m ($\rho = 1$ g/cm^3) und Geschwindigkeit $v = 1$ mm/s.

Hinweis: $h/(2\pi)\ c \;=\; \hbar\,c \;\cong\; 197$ eV nm!