Aufgabe 10: Elektron vor einer Metalloberfläche **[11 Punkte, schriftlich]**

Elektronen, die sich vor der Oberfläche eines idealen Leiters befinden, spüren ein Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad -\infty < x \leq 0 \quad \text{(Bereich des Leiters)} \\ -\dfrac{D}{x} & \text{für} \quad 0 < x < \infty \quad \text{(Bereich vor dem Leiter)} \end{cases}$$

mit

$$D = \frac{e^2}{16\,\pi\,\varepsilon_0}\,.$$

(Dieser Potentialverlauf kann im Rahmen der Elektrodynamik mit der Bildladungsmethode hergeleitet werden.)

Die Wellenfunktion eines Elektrons mit der Masse m lautet in diesem Potential (für den Grundzustand)

$$\psi(x,\,t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\infty < x \leq 0 \\ N \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-a\,x} \cdot \mathrm{e}^{i\,\omega\,t} & \text{für} \quad 0 < x < \infty \end{cases},$$

wobei

$$a = \frac{m\,D}{\hbar^2} \qquad \text{und} \qquad \omega = \frac{m\,D^2}{2\,\hbar^3}$$

gilt.

a) [3P] Überzeugen Sie sich davon, dass $\psi(x,\,t)$ die zugehörige Schrödinger-Gleichung erfüllt.

b) [2P] Berechnen Sie die Normierungskonstante N.

c) [2P] Skizzieren Sie $V(x)$, $\psi(x,\,0)$ und $|\psi(x,\,0)|^2$.

d) [4P] Bestimmen Sie die Position des Maximums von $|\psi(x,\,t)|^2$ und berechnen Sie $\langle\hat{x}\rangle$, $\langle\hat{x}^2\rangle$ und $\Delta\,x$.

Hinweis:
$$\int_0^\infty x^n\,\mathrm{e}^{-b\,x}\,d\,x = \frac{n!}{b^{n+1}} \qquad \text{für} \qquad b > 0\,; \qquad n > 0, \text{ ganzzahlig}\,.$$

Aufgabe 11: Kommutatoren **[9 Punkte, schriftlich]**

In der Vorlesung haben Sie den Kommutator $[\hat{A},\,\hat{B}] = \hat{A}\,\hat{B} - \hat{B}\,\hat{A}$ zweier Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ kennengelernt. Zeigen Sie, dass für die Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$ folgende Relationen gelten:

a) [1P] $[\hat{A},\,\hat{B}] = -[\hat{B},\,\hat{A}]$,

b) [1P] $[\hat{A},\,\hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A},\,\hat{B}] + [\hat{A},\,\hat{C}]$,

c) [1P] $[\hat{A},\,\hat{B}\,\hat{C}] = [\hat{A},\,\hat{B}]\,\hat{C} + \hat{B}\,[\hat{A},\,\hat{C}]$.

Berechnen Sie die folgenden Kommutatoren zwischen dem Ortsoperator $\hat{x}$ und dem Impulsoperator

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$$

d) [2P] $[\hat{x}^2, \hat{p}_x]$,

e) [2P] $[\hat{x}^n, \hat{p}_x]$,

f) [2P] $[\hat{p}_x^2, \hat{x}]$.

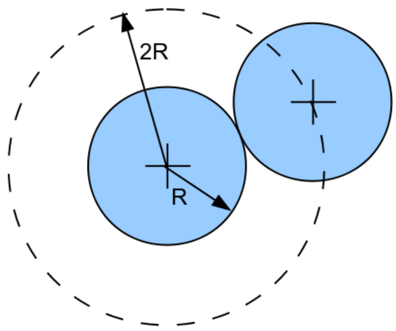
Aufgabe 12: Größe eines Atoms aus Kovolumen [4 Punkte, schriftlich]

Die Van-der-Waals-Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{V_M^2}\right) \cdot (V_M - b) = RT$$

korrigiert gegenüber dem idealen Gasgesetz zwei Effekte für reale Gase. Eine Korrektur ist das *Kovlumen* b, um die das Molvolumen V_M korrigiert wird. Dieses Kovolumen berücksichtigt, dass auch für $T \to 0\,\mathrm{K}$ ein Mol des realen Gases noch ein Restvolumen beansprucht. Das Kovolumen kann experimentell bestimmt werden.

In dieser Aufgabe soll aus dem Kovolumen ein Maß für die Atomgröße bestimmt werden. Wir gehen für die Atome/Moleküle von starren Kugeln mit Radius R aus. Die Kugeln streuen aneinander und machen sich damit gegenseitig bemerkbar, wenn der Abstand kleiner als $2R$ beträgt (s. Abb.):



Damit blockiert ein Atom/Molekül ein Volumen von

$$\frac{4\pi}{3}(2R)^3 \cdot \frac{1}{2} = 4V_a \ .$$

Dabei ist V_a das Volumen des Atoms/Moleküls mit Radius R. Der Faktor 1/2 vermeidet eine Doppelzählung. Damit berechnet sich das Kovolumen zu

$$b = 4N_A \cdot V_a \ .$$

Berechnen Sie so den Kugelradius R von Helium- und Xenonatomen mit

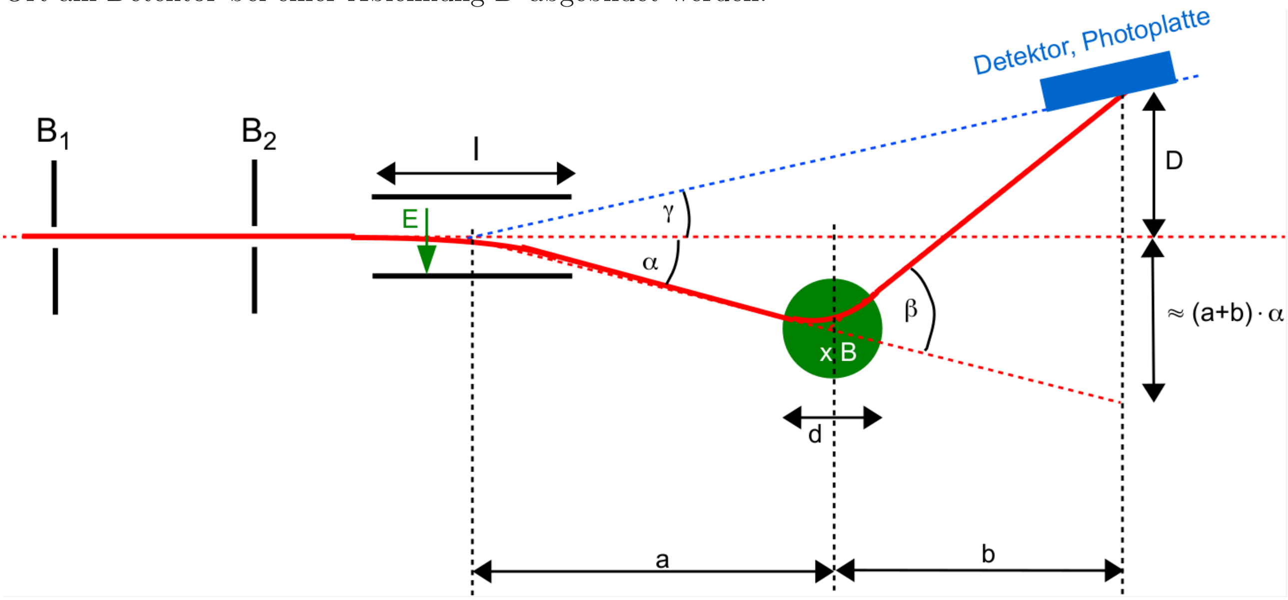
$$b(\mathrm{He}) = 0{,}02370\ \mathrm{l/mol} \qquad \text{und} \qquad b(\mathrm{Xe}) = 0{,}05105\ \mathrm{l/mol}\ .$$

Machen Sie einen Vergleich mit der Atomgröße von Helium und Xenon, den sie aus der Dichte wie in Aufgabe 4 abschätzen können. Benutzen Sie dabei die Dichte von flüssigem Helium (LHe) bei $p = 1\,\mathrm{bar}$ und 4,2 K von $\rho(\mathrm{LHe}) = 0{,}125\,\mathrm{g/cm^3}$ ($M_M(\mathrm{He}) = 4{,}00\,\mathrm{g/mol}$) und von flüssigem Xenon (LXe) bei $p = 1\,\mathrm{bar}$ und $T = 164{,}82\,\mathrm{K}$ von $\rho(\mathrm{LXe}) = 2{,}943\,\mathrm{g/cm^3}$ ($M_M(\mathrm{Xe}) = 131{,}3\,\mathrm{g/mol}$). (Flüssiges Xenon findet beispielsweise beim Dunkle Materie-Experiment XENON1T/nT im italienischen Untergrundlabor LNGS Anwendung.)

Aufgabe 13: Geschwindigkeitsfokussierendes Massenspektrometer [6 Punkte, schriftlich]

Ein einfaches Massenspektrometer basierend auf einem magnetischen Dipol besitzt den Nachteil, dass nicht alle Teilchen gleicher Masse und Ladung, aber unterschiedlicher Geschwindigkeit auf der selben Stelle am Detektor bzw. Schirm oder Photoplatte landen. Dies führt entweder zu Auflösungs- oder – bei starker vorheriger Geschwindigkeitsfilterung – zu Intensitätsverlusten.

Mit zwei aufeinander folgenden umgekehrt gerichteten Ablenkungen in elektrischen und magnetischen Feldern E und B (s. Skizze) kann erreicht werden, dass Teilchen gleicher Masse und Ladung aus einem ganzen Geschwindigkeitsbereich $[v - \Delta v, v + \Delta v]$ um eine mittlere Geschwindigkeit v auf den gleichen Ort am Detektor bei einer Ablenkung D abgebildet werden.



a) [3P] Bestimmen Sie die Ablenkwinkel α im elektrischen Feld und β im magnetischen Feld. Bei den kleinen Winkeln können Sie die üblichen Näherung benutzen: $\tan\alpha \approx \alpha$ und $\tan\beta \approx \beta$. Nehmen Sie dabei ein konstantes elektrisches Feld E im Plattenkondensator der Länge l sowie ein homogenes transversales magentisches Feld B in der kreisförmigen Fläche mit Durchmesser d an. Außerhalb dieser genannten Bereiche sollen die Felder vernachlässigt werden. Bestimmen Sie die Ablenkung D in Abhängigkeit aller Größen.

b) [1P] Berechnen Sie dann die partiellen Ableitungen nach der Geschwindigkeit des Teilchens $\partial\alpha/\partial v$ und $\partial\beta/\partial v$.

c) [2P] Die Geschwindigkeitsfokussierung bedeutet, dass die Ableitung der Ablenkung D nach der Geschwindigkeit v verschwindet, also $\partial D/\partial v \approx 0$. Benutzen Sie dabei $\partial\alpha/\partial v$ und $\partial\beta/\partial v$ aus dem Aufgabenteil b).

   Wie hängt die Ablenkung D von den Abständen a und b sowie von den Ablenkwinkeln α und β ab? Unter welchem Winkel γ muss der Detektor bzw. die Photoplatte bzgl. des Mittelpunkts des Plattenkondensators platziert werden, damit diese Beziehungen für Teilchen verschiedener Masse gilt?