Physik A – VL11 (02.11.2012)

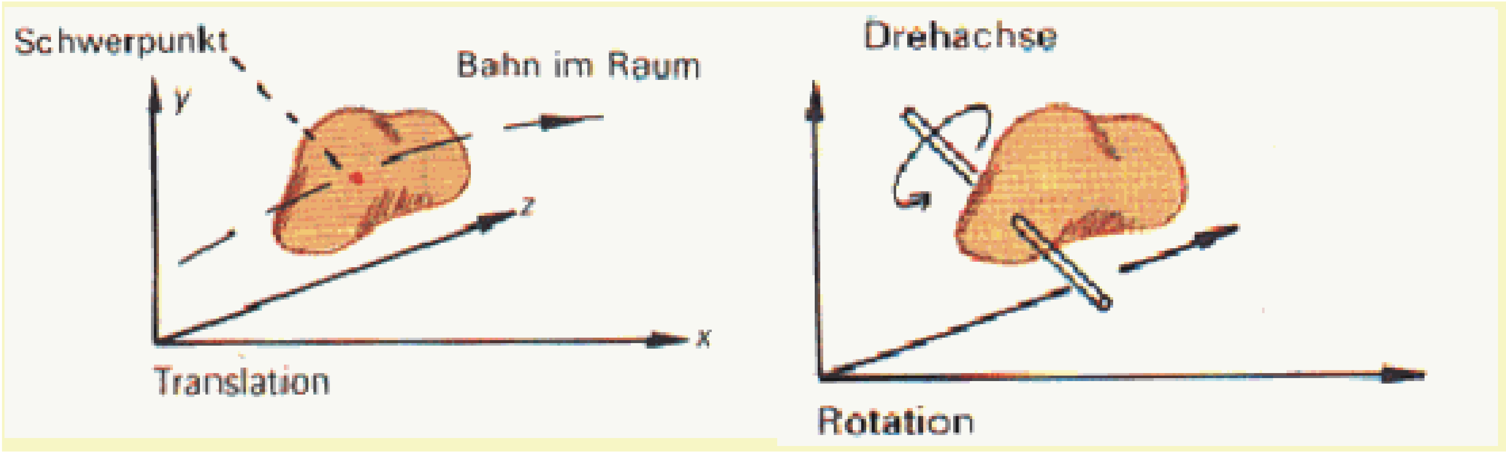
Dynamik der Rotationsbewegung I

- **Kreisbewegung und Kräfte**
- **Drehmoment und Trägheitsmoment**

Kreisbewegung und Kräfte

• ***ein Massepunkt (Schwerpunkt) führt nur eine Translationsbewegung aus***

• ***ausgedehnte Körper können rotieren:***



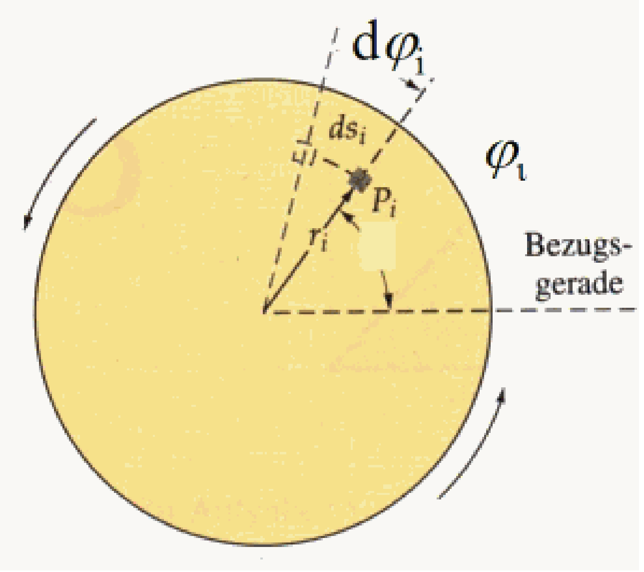
Grund: Drehmoment

• *aus Betrachtung der Rotationsbewegung:*

Translationsgröße und Rotationsgröße hängen über Abstand vom Schwerpunkt zusammen ↓

Kreisbewegung und Kräfte

Rotierende starre Körper



• bei einem starren Körper bleiben die Abstände zwischen beliebigen Punkten P_i konstant

• alle Punkte P_i drehen sich um den gleichen Winkel φ_i.

• damit gelten die Gesetze der Rotationsbewegung:

$\Rightarrow$ ***Wiederholung: Rotationsbewegungen***

	Translation	***Rotation***	***Zusammenhang***
Weg	s	φ	$s = r\cdot\varphi$
Geschwindigkeit	$v = ds/dt$	$\omega = d\varphi/dt$	$v = r\cdot\omega$
Beschleunigung	$a = dv/dt=d^2s/dt^2$	$\alpha = d\omega/dt=d^2\varphi/dt^2$	$a = r\cdot\alpha$

Winkelgeschwindigkeit ω, Winkelbeschleunigung α

Vektoriell: ***Geschwindigkeit*** $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ $\quad \left|\vec{v}\right| = \omega\cdot\left|\vec{r}\right|$

Beschleunigung $\vec{a} = \vec{\alpha}\times\vec{r}$ $\quad \left|\vec{a}\right| = \alpha\cdot\left|\vec{r}\right|$

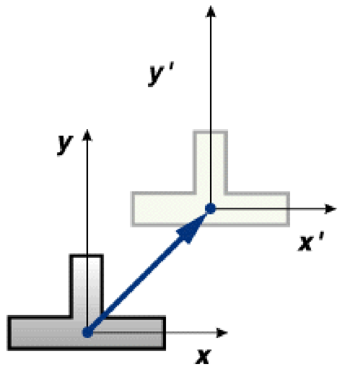
Translationsgröße und Rotationsgröße hängen über Abstand vom Schwerpunkt zusammen

Kreisbewegung und Kräfte

Überlagerung von Translation und Rotation

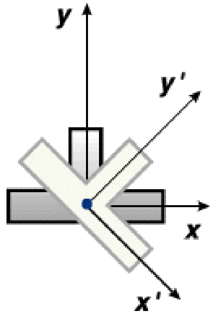
• ***reine Translation:*** *Schwerpunkt bewegt sich ohne Drehung des Körpers*

Beschreibung: s, v, a



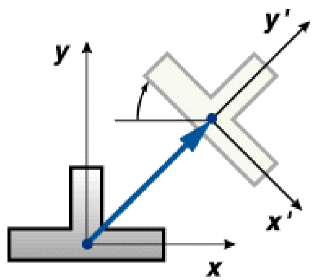
• ***reine Rotation:*** *Körper dreht sich um Schwerpunkt; Schwerpunkt bleibt ortsfest*

Beschreibung: φ, ω, α



• ***Überlagerung von Translation und Rotation:***
Körper dreht sich um Schwerpunkt; Schwerpunkt bewegt sich

Beschreibung: s, v, a, φ, ω, α



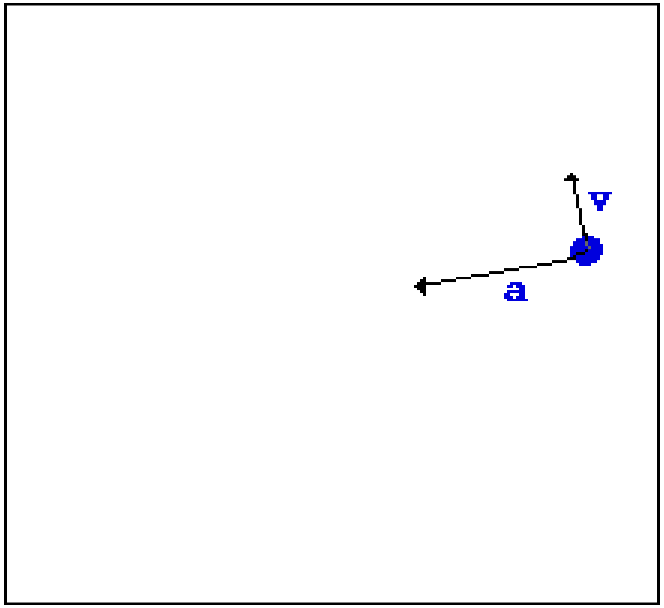
Kreisbewegung und Kräfte

Zentripetal- und Zentrifugalkraft

- *wird eine Masse herumgeschleudert, wirkt eine Kraft*

- *die* ***Zentripetalkraft*** *erzeugt die Kreisbewegung, die Kraft ist nach innen gerichtet*

$$F_Z = ma = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$$



- *nach dem 3. Newton'schen Axiom muss eine gleich große, nach außen gerichtete* ***Zentrifugalkraft (= Fliehkraft)*** *wirken:*

$$\vec{F}_F = -\vec{F}_Z$$

◦ ***Zentrifugalkraft*** F_F *ist die Gegenkraft (Trägheitskraft!) zur* ***Zentripetalkraft*** F_Z

◦ ***Zentrifugalkraft*** *ist nur für einen* **mitbeschleunigten Beobachter** *wahrnehmbar !*

◦ *Ein äußerer Beobachter beobachtet nur die* ***Zentripetalkraft***

Kreisbewegung und Kräfte

Zentripetal- und Zentrifugalkraft

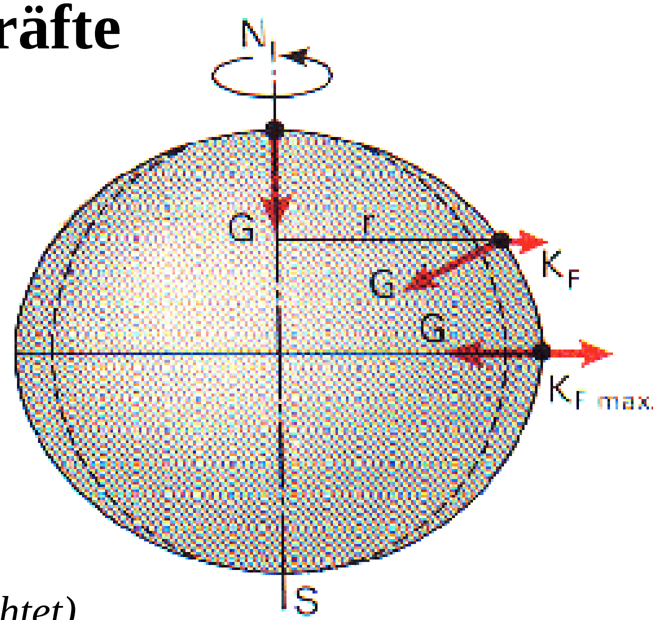
- **Einstellung von Regelgrößen**

Der Fliehkraftregler:

- *mit steigender Drehzahl steigt die Zentrifugalkraft, die auf die Gewichte wirkt, und diese nach außen drückt*
- *Durch die dargestellte Mechanik wird ein Ventil (unten) graduell geöffnet*

$\Rightarrow$ *Regulierung der Drehzahl z.B. bei Dampfmaschinen.*

Kreisbewegung und Kräfte



Zentripetal- und Zentrifugalkraft

Beispiel für Fliehkräfte: ***Erdmodell***

- ***Zentrifugalkraft am Äquator:***

$$F_F = m\omega^2 r$$

$$a_F = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = 3.4\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m/s}^2 \approx 3\cdot 10^{-3}\, g$$

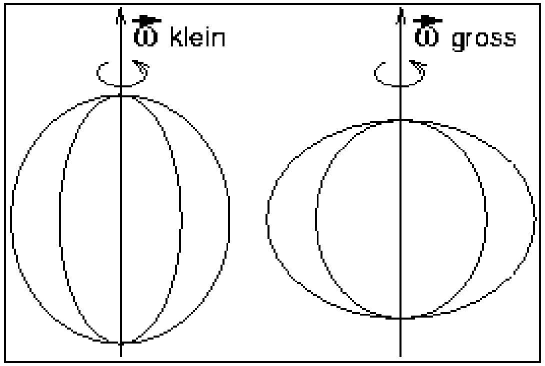
Antiparallel zur Gewichtskraft (Dieser entgegen gerichtet)

- ***für alle anderen Längengrade sind Zentrifugalkraft und Gewichtskraft <u>nicht</u> antiparallel***

Grund: *Die Erde ist ein Ellipsoid (Newton, 1677 & Huygens 1690)*
Das Erdinnere ist flüssig und die Erde rotiert $\rightarrow$ Fliehkräfte

- ***Zu den Polen hin nimmt die Zentrifugalkraft ab***

- ***Messungen****: R(Äquator) = R(Pol) + 20 km*

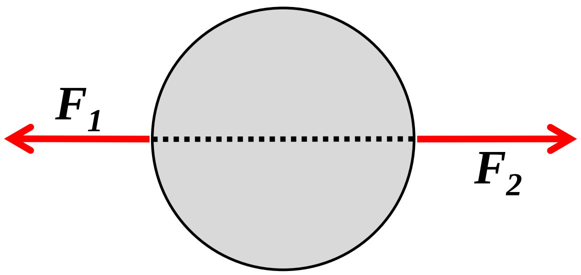


Rotationsellipsoide: *Elliptizität über Winkelgeschwindigkeit einstellbar*

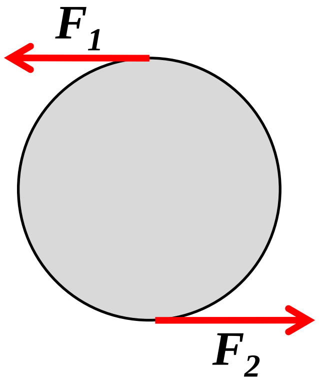
Kreisbewegung und Kräfte

Kräfte am starren Körper

- ***Kräfte, deren Wirkungslinien durch den Mittelpunkt eines starren Körpers laufen, erzeugen keine Drehung***

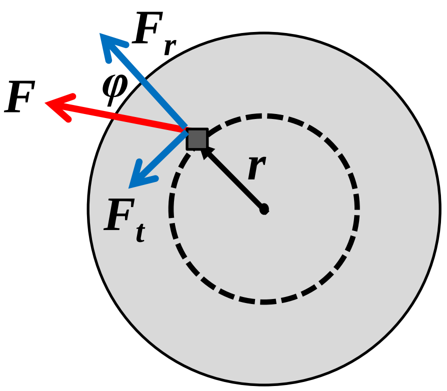


- ***Kräfte, die an anderen Linien angreifen, erzeugen Drehungen***



- ***wirkt eine Kraft F auf einen einzelnen Massenpunkt, führt nur die <u>tangentiale Komponente</u> zu einem Drehmoment:***

$$F_t = F \cdot \sin\varphi$$



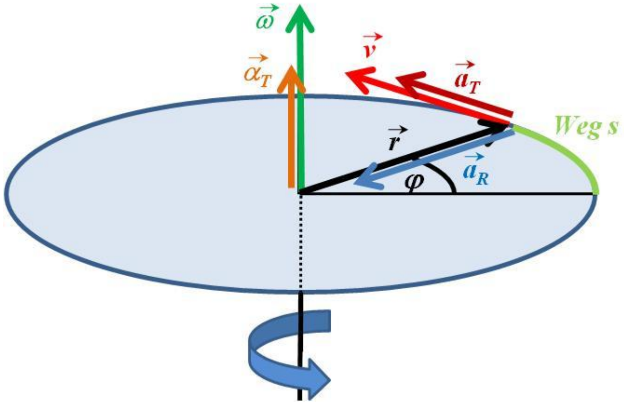
- ***die radiale Komponente erzeugt keine Drehbewegung, sondern wirkt auf das Achslager oder bewirkt eine Translation des Gesamtsystems***

$$F_r = F \cdot \cos\varphi$$

Kreisbewegung und Kräfte

Drehmoment (T) und Trägheitsmoment (J)

- ***Analogieüberlegungen:*** *Translation aus der Ruhe: Kraft erforderlich*



- ***Wie kann man eine Rotation erzeugen ?***

Das Drehmoment erzeugt Drehbewegungen:

$\Rightarrow$ ***Drehmoment T ~ Winkelbeschleunigung*** α

ist auch eine Kraft

- ***Wenn Kraft F auf einen Masseteil*** Δm ***im Abstand r vom Mittelpunkt wirkt:***
  - ***Masse wird tangential beschleunigt mit*** a_t ***bzw. Winkelbeschleunigung*** α_t
  - ***Masse erhält ein Drehmoment T = r · F***

$$\vec{T}_i = \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = \vec{r}_i \cdot \Delta m \cdot a_t \qquad a_t = \vec{r} \cdot \alpha$$

$$T_i = \vec{r}_i^{\,2} \cdot \Delta m \cdot \alpha_i = const \cdot \alpha_i$$

Für einen speziellen Körper

$\Rightarrow$ ***Das Drehmoment hängt von der Masse ab***

Drehmoment und Trägheitsmoment

Drehmoment (T) und Trägheitsmoment (J)

- ***Summiert man über alle einzelnen Drehmomente, erhält man in Analogie zur Newtons'schen Bewegungsgleichung:***

Drehmoment $$T = \sum_i T_i = \left(\sum_i m_i \cdot r_i^2 \right) \cdot \alpha = J \cdot \alpha$$

Drehmoment

$$\boxed{\sum_i T_i = J \cdot \alpha}$$

Trägheitsmoment

$$\boxed{J = \sum_i m_i \cdot r_i^2}$$

$\Rightarrow$ ***Drehmoment = Trägheitsmoment mal Winkelbeschleunigung***

$\Rightarrow$ ***Drehmoment bei Rotation entspricht Kraft bei Translation***

$\Rightarrow$ ***2. Newton'sches Gesetz (Axiom) für Drehbewegungen***

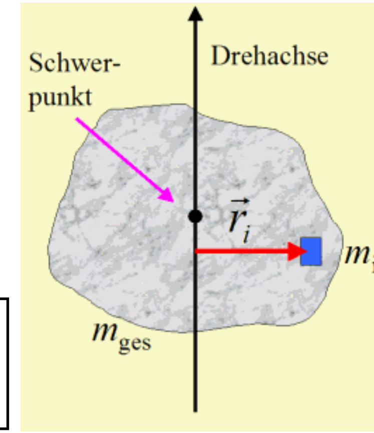
$$\left(\sum_i \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}_{Schwerpunkt} \right)$$

Drehmoment und Trägheitsmoment

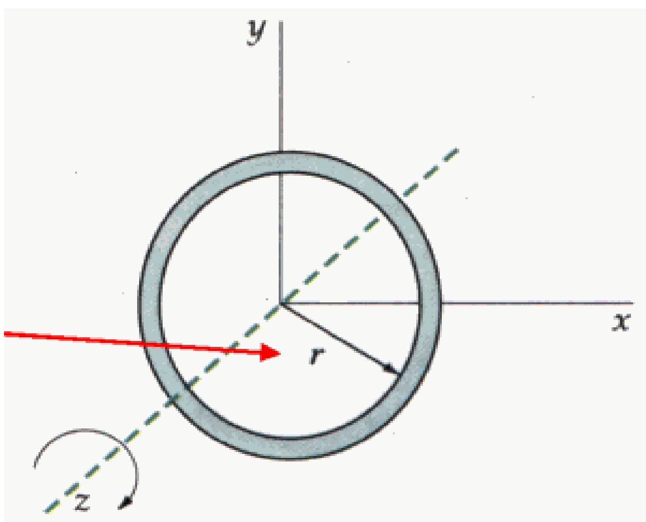
Drehmoment (T) und Trägheitsmoment (J)

- ***Trägheitsmoment stark abhängig von Massenverteilung im Körper***
- ***Drehung um eine feste Achse durch Schwerpunkt***

$$\boxed{J = \sum_i m_i \cdot r_i^2}$$



- *Beispiel:* ***Hohlzylinder***



Trägheitsmoment des Hohlzylinders

$$J = \sum_i m_i \cdot r_i^2 = mr^2$$

Drehmoment und Trägheitsmoment

Allgemeine Definition des Trägheitsmomentes

$$\boxed{J = \int r^2 dm \quad [\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2]}$$

- ***Das Trägheitsmoment beschreibt die Trägheit eines Körpers bei Rotations-bewegungen.***
  Sie ist das Gegenstück zur (trägen) Masse der Translationsbewegungen.

- ***Das Trägheitsmoment wird immer bezüglich einer bestimmten Drehachse berechnet***

- ***Das Drehmoment ist stark abhängig von Massenverteilung im Körper***

Allgemeine Definition des Drehmomentes

$$\boxed{\vec{T} = \vec{\alpha} \cdot \int r^2 dm = \vec{J} \cdot \vec{a} = \vec{J} \cdot \dot{\vec{\omega}} \qquad [\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2]}$$

Drehmoment und Trägheitsmoment

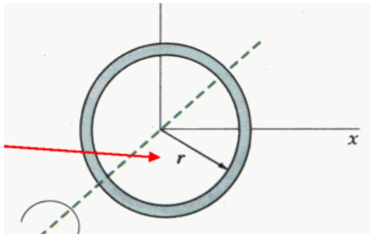
Trägheitsmomente verschiedener Objekte

- *Beispiel:* ***Zylinder mit Drehachse = Körperachse***

m = Masse des Zylinders
r = Radius

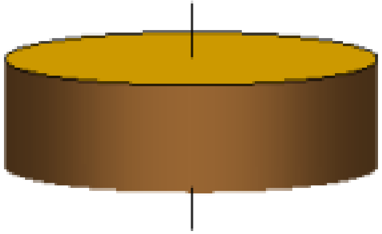
- ***dünnwandiger Hohlzylinder:***

$$J = \sum_i m_i \cdot r_i^2 = mr^2$$



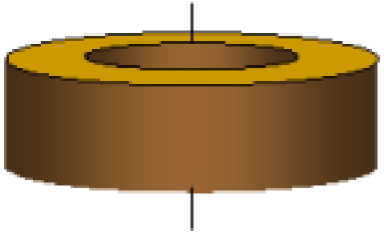
- ***massiver Zylinder :***

$$J = \frac{1}{2} mr^2$$



- ***dickwandiger Hohlzylinder :***

$$J = \frac{1}{2} m(r_1^2 + r_2^2)$$



r_1 = innerer Radius,
r_2 = äußerer Radius

Drehmoment und Trägheitsmoment

Trägheitsmomente verschiedener Objekte

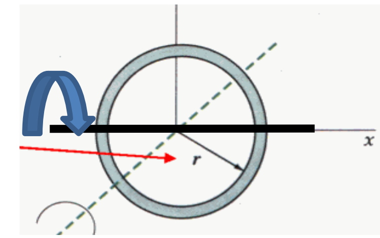
- Beispiel: ***Zylinder mit Drehachse senkrecht zur Körperachse***

m = Masse des Zylinders
r = Radius
l = Länge des Zylinders

- ***dünnwandiger Hohlzylinder:***

$$J = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{2}ml^2$$

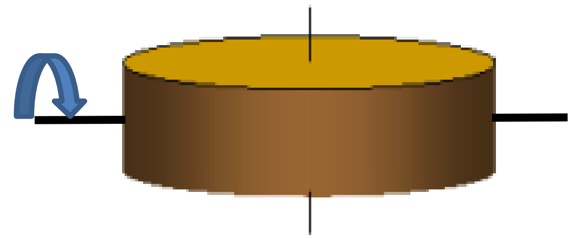
$$\boxed{J = mr^2}$$



- ***massiver Zylinder :***

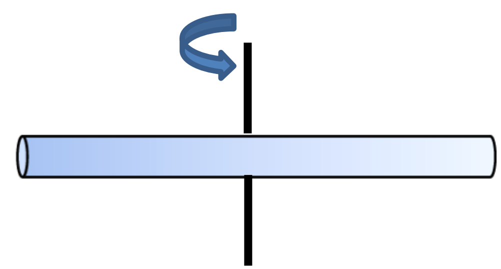
$$J = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$$

$$\boxed{J = \frac{1}{2}mr^2}$$



- ***dünner Stab:***

$$J = \frac{1}{12}ml^2$$



Vergleich mit Drehmomenten bei Drehachse = Körperachse (□) zeigt:

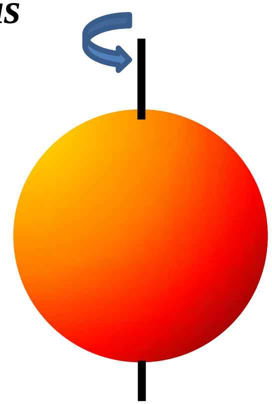
Ein starrer Körper kann zu verschiedenen Achsen verschiedene Trägheitsmomente haben !

Drehmoment und Trägheitsmoment

Trägheitsmomente verschiedener Objekte

- *Beispiel: **Kugel mit Drehachse durch Mittelpunkt***

m = Masse der Kugel
r = Radius



- ***dünnwandige Hohlkugel***

$$J = \frac{2}{3} m r^2$$

- ***massive Kugel***

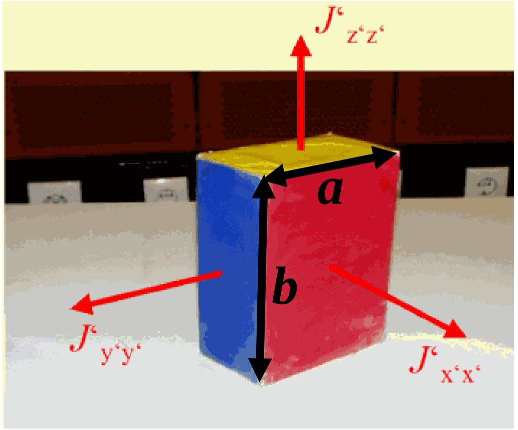
$$J = \frac{2}{5} m r^2$$

- *Beispiel: **Quader mit unterschiedlichen Drehachsen***

a, b = Kantenlängen

Massiver Quader,
Kantenlängen a,b (Zeichnung: a und b für $J'_{XX'}$,
Drehachse durch den Mittelpunkt der Fläche $a \cdot b$)

$$J = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

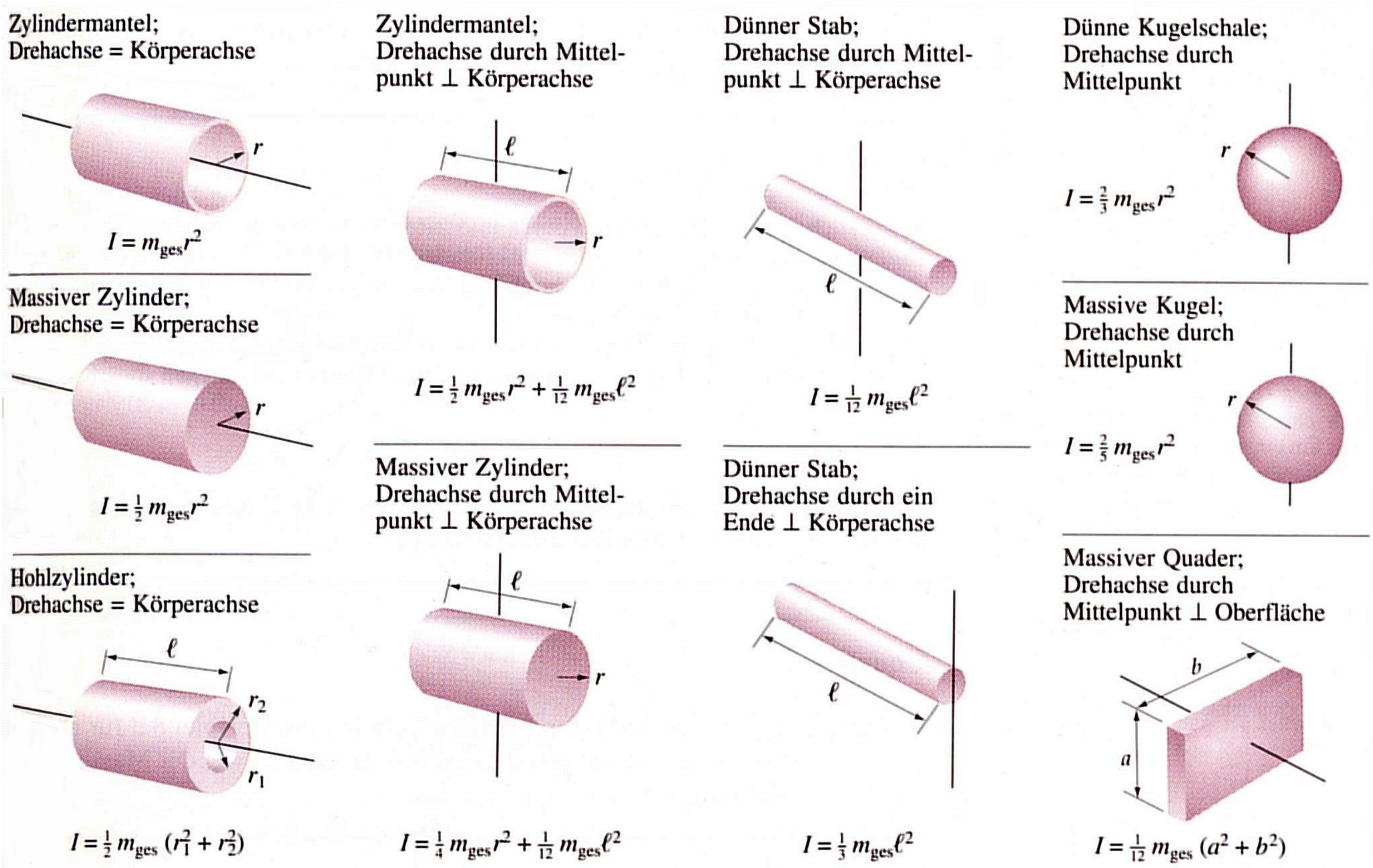


$$J'_{XX'} > J'_{YY'} > J'_{ZZ'}$$

Vektoren entsprechen den Richtungen der Drehachsen, die zu den entsprechenden Trägheitsmomenten gehören

Drehmoment und Trägheitsmoment

Trägheitsmomente verschiedener Objekte



Drehmoment und Trägheitsmoment

Der Steiner'sche Satz

• ***Bisher: Drehachse durch den Schwerpunkt des starren Körpers***

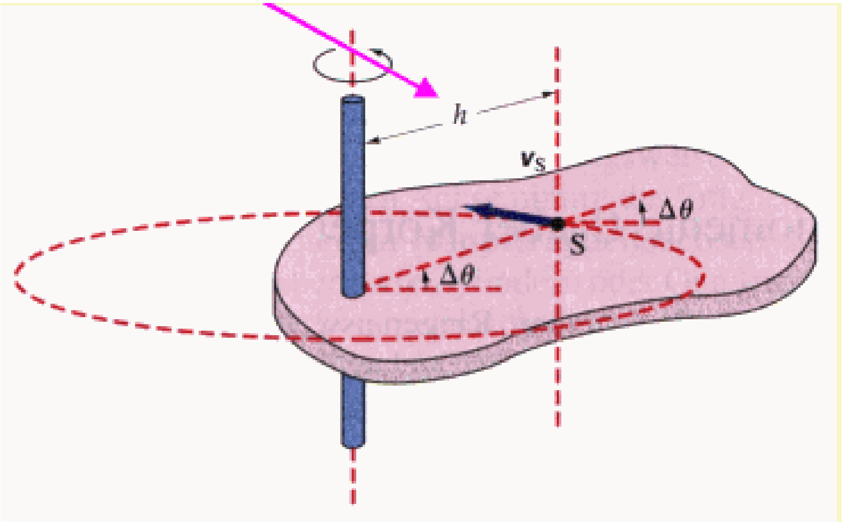
$\Rightarrow$ ***was passiert, wenn Drehachse vom Schwerpunkt entfernt liegt?***

Antwort liefert der

<u>Steiner'sche Satz</u>

Haben Drehachse und Schwerpunkt den Abstand h, so ist das Gesamtträgheitsmoment die Summe des Trägheitsmomentes durch den Schwerpunkt und des Trägheitsmomentes des Schwerpunkts relativ zur Drehachse:

$$J_{Gesamt} = J_{Schwerpunkt} + mh^2$$



$\Rightarrow$ ***Ist das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt bekannt, kann das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse parallel zu dieser Achse im Abstand h berechnet werden***

Drehmoment und Trägheitsmoment

Der Steiner'sche Satz

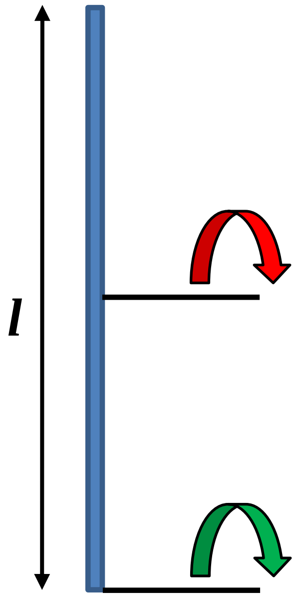
• *Beispiel:* ***Dünner Stab mit verschiedenen Drehachsen***

Trägheitsmoment durch Schwerpunkt:

$$J = \frac{1}{12} m l^2$$

Trägheitsmoment durch Ende:

$$J_{ges} = \frac{1}{12} m l^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m l^2$$



Zusammenfassung

- ***die <u>Zentripetalkraft</u> erzeugt die Kreisbewegung, sie zeigt nach innen***

$$F_Z = ma = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$$

- ***die <u>Zentrifugralkraft</u> (= Fliehkraft) zeigt nach außen***

$$\vec{F}_F = -\vec{F}_Z$$

- ***die Zentrifugalkraft ist die Gegenkraft (Trägheitskraft!) zur Zentripetalkraft***

- ***das <u>Drehmoment</u> ist nach dem 2.*** *Newton'schen* ***Gesetz eine Kraft, die durch <u>Trägheitsmoment</u> und Winkelbeschleunigung entsteht***

Drehmoment

$$\vec{T} = \vec{\alpha} \cdot \int r^2 dm = \vec{J} \cdot \vec{a} = \vec{J} \cdot \dot{\vec{\omega}}$$

Trägheitsmoment

$$J = \int r^2 dm$$

- ***das <u>Trägheitsmoment</u> beschreibt die Trägheit eines Körpers bei Rotationsbewegungen:***

es wird immer bezüglich einer <u>bestimmten Drehachse</u> berechnet

und ist stark <u>abhängig von der Massenverteilung</u> im Körper.