

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG  
KOMPLEXITÄTSTHEORIE

WWU MÜNSTER  
INSTITUT FÜR INFORMATIK

PROF. DR. MARKUS MÜLLER-OLM  
SEBASTIAN KENTER

SS 2016

ÜBUNGSBLATT 3

04.05.2016

**Abgabe:** In Dreiergruppen, bis Donnerstag, 12.05.16, 10:15 Uhr in BK 61.

**Besprechung:** Die Aufgaben werden in der Übung am Mittwoch, dem 25.05.16, um 10:15 Uhr im Hörsaal M3 besprochen.

**Aufgabe 3.1.** [Abschlusseigenschaften von NP]

(8 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

- Gilt  $L_1 \cup L_2 \in \text{NP}$  für alle  $L_1, L_2 \in \text{NP}$ ?
- Gilt  $L_1 \cap L_2 \in \text{NP}$  für alle  $L_1, L_2 \in \text{NP}$ ?

**Aufgabe 3.2.** [P-search und NP-search]

(6 Punkte)

Sei  $R \in \text{P-search}$ . Zeigen Sie, dass es dann eine Relation  $R' \subseteq R$  gibt mit:

- $\text{dom } R = \text{dom } R'$ , wobei  $\text{dom } R := \{x \in \{0, 1\}^* \mid \exists y \in \{0, 1\}^* : (x, y) \in R\}$ , und
- $R' \in \text{P-search} \cap \text{NP-search}$ .

**Aufgabe 3.3.** [Nichtdeterministische Turingmaschinen]

(10 Punkte)

Eine nichtdeterministische Turingmaschine kann statt mit zwei Übergangsfunktionen auch mit einer modifizierten, mengenwertigen Übergangsfunktion definiert werden. Eine so definierte Maschine ist dann ein Tupel  $M = (\Gamma, Q, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{halt}}, q_{\text{accept}})$ , wobei  $\Gamma, Q, q_{\text{start}}, q_{\text{halt}}, q_{\text{accept}}$  wie aus der Vorlesung bekannt und

$$\delta : Q \setminus \{q_{\text{halt}}, q_{\text{accept}}\} \times \Gamma^k \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L, R, S\}^k) \setminus \{\emptyset\}.$$

Wenn sich  $M$  im Zustand  $q$  befindet und die Zeichen  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  auf den Bändern liest, wählt die Maschine im nächsten Schritt nichtdeterministisch eines der Tripel aus  $\delta(q, (\gamma_1, \dots, \gamma_k))$  aus und verhält sich entsprechend.

Zeigen Sie, dass diese und die in der Vorlesung definierte Variante einer nichtdeterministischen Turingmaschine einander wechselseitig mit maximal polynomiellem Mehraufwand simulieren können.

**Aufgabe 3.4.** [Reduktion NP-harter Probleme]

(6 Punkte)

Sei  $L$  eine NP-harte Sprache und  $L'$  eine weitere Sprache mit  $L \leq_p L'$ . Zeigen Sie, dass dann auch  $L'$  NP-hart ist.