WWU Münster
Institut für Informatik

Prof. Dr. Markus Müller-Olm
Sebastian Kenter

SS 2016 | Übungsblatt 2 | 28.04.2016

Abgabe: *In Dreiergruppen*, bis Freitag, 06.05.16, 10:15 Uhr in BK 61.

Besprechung: Die Aufgaben werden in der Übung am Mittwoch, dem 11.05.16, um 10:15 Uhr im Hörsaal M3 besprochen.

Aufgabe 2.1. **[Zertifikatgröße bei NP-Problemen]** (6 Punkte)
Zeigen Sie, dass es zur Definition von NP (Definition 2.1) ausreichen würde, zu fordern, dass das Zertifikat *maximal* von der Größe $p(|x|)$ ist (anstatt genau von der Größe $p(|x|)$ zu sein). Zeigen Sie dazu, dass für jedes Polynom p und jede Turingmaschine M mit polynomieller Laufzeit die Sprache

$$\{x \mid \exists u : |u| \leq p(|x|) \text{ und } M(x,u) = 1\}$$

in NP liegt.

Aufgabe 2.2. **[NP-Probleme]** (9 Punkte)
Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen in NP liegen:

a) *Two coloring:* `2COL` $= \{G \mid$ Graph G hat eine Färbung mit zwei Farben$\}$,
wobei eine *Färbung* von G mit n Farben eine Zuordnung einer Zahl $c_v \leq n$ zu jedem Knoten $v \in N(G)$ ist, die keinen zwei benachbarten Knoten dieselbe Zahl zuordnet.

b) *Three coloring:* `3COL` $= \{G \mid$ Graph G hat eine Färbung mit drei Farben$\}$.

c) *Connectivity:* `CONNECTED` $= \{G \mid$ Graph G ist ein zusammenhängender Graph$\}$,
wobei ein *zusammenhängender Graph* ein Graph ist, in dem es zwischen je zwei Knoten stets einen Weg gibt.

Aufgabe 2.3. [Einfluss der Eingaberepräsentation] (15 Punkte)
Normalerweise gehen wir von einer Repräsentation von Zahlen als Zeichenkette unter Verwendung der Basis 2 aus (binäre Codierung). Das bedeutet, dass eine Zahl n durch eine Folge $x_0, x_1, \dots, x_{log\, n}$ von Binärziffern repräsentiert wird, derart dass $n = \sum_{i=0}^{log\, n} x_i 2^i$. Es ist allerdings auch möglich, andere Codierungsverfahren zu verwenden:

a) Vor Durchführung der binären Codierung kann eine Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ zunächst in einer beliebigen (anderen) Basis $b \geq 2$ repräsentiert werden. Diese *Repräsentation von n in Basis b*, geschrieben $\llcorner n \lrcorner_b$, erhalten wir wie folgt: Als Erstes repräsentieren wir n als Folge $d_0, d_1, \dots, d_{log_b\, n}$ von Ziffern aus $\{0, \dots, b-1\}$ mit $n = \sum_{i=0}^{log_b\, n} d_i b^i$, und danach ersetzen wir wiederum jede dieser Ziffern durch ihre binäre Codierung.
Zeigen Sie, dass eine solche Repräsentation für die Klasse P keinen Unterschied bedeutet. Das heißt, zeigen Sie für jede Teilmenge S natürlicher Zahlen und jedes $b \geq 2$:

$$L_S^b \in \mathsf{P} \iff L_S^2 \in \mathsf{P},$$

wobei $L_S^b := \{\llcorner n \lrcorner_b \mid n \in S\}$.

b) Die *unäre Codierung* einer Zahl $n \in \mathbb{N}_0$, geschrieben $\llcorner n \lrcorner_{unary}$, ist die Zeichenkette 1^n (also eine Folge von n Einsen).
Zeigen Sie, dass die folgende Sprache in P liegt:

$$\begin{aligned}\texttt{UNARYFACTORING} = \{\langle \llcorner n \lrcorner_{unary}, \llcorner l \lrcorner_{unary}, \llcorner k \lrcorner_{unary} \rangle \mid \\ \text{es gibt eine Primzahl } j \in \{l, \dots, k\}, \text{ die } n \text{ teilt}\}\end{aligned}$$

Übrigens ist nicht bekannt, ob die entsprechende Sprache in P liegt, wenn wir die binäre Codierung verwenden.