Übungen zur Vorlesung Komplexitätstheorie	
WWU Münster Institut für Informatik	Prof. Dr. Markus Müller-Olm Sebastian Kenter
SS 2016 Übungsblatt 1 21.04.2016	

Abgabe: *In Dreiergruppen*, bis Donnerstag, 28.04.16, vor der Vorlesung in BK 61.

Besprechung: Die Aufgaben werden in der Übung am Mittwoch, dem 04.05.16, um 10:15 Uhr im Hörsaal M3 besprochen.

Die **erste Übung** findet am Mittwoch, dem 27.04.16 statt.

Hinweis: Voraussetzung für die Teilnahme an der Klausur ist das Erreichen von mindestens 50% der Gesamtpunktzahl in den Übungen.

Aufgabe 1.1. [Turingmaschine zur Addition] (10 Punkte)
Konstruieren Sie eine k-Band-Turingmaschine, die die Summe zweier Binärzahlen berechnet. Überlegen Sie dazu zunächst, wie man zwei Binärzahlen als eine einzelne Eingabe auf dem Eingabeband darstellen kann, und wie man die so erhaltene Eingabe mit dem Alphabet $\{0, 1\}$ codiert. Beim Anhalten der Turingmaschine soll das Ergebnis mit derselben Codierung auf dem Ausgabeband stehen.

Geben Sie eine vollständige formale Beschreibung der Turingmaschine an und beschreiben Sie die von ihr realisierte Berechnung.

Geben Sie zusätzlich eine obere Schranke für die Laufzeit der Turingmaschine mit Begründung an.

Aufgabe 1.2. [Varianten von Turingmaschinen] (10 Punkte)
Eine *Turingmaschine mit k beidseitig unendlichen Bändern* ist zunächst genau wie die aus der Vorlesung bekannten k-Band-Turingmaschinen als Tupel $M = (\Gamma, Q, \delta, q_{start}, q_{halt})$ definiert. Der einzige Unterschied zu dem Modell aus der Vorlesung liegt darin, dass jedes Band aus einer nicht nur nach rechts, sondern auch nach links unendlich langen Liste von Feldern besteht. Für das Verhalten der neuen Turingmaschine gilt also nicht mehr die Ausnahmeregel, dass die Position des (Schreib-/)Lesekopfes auf einem der Bänder unverändert bleibt, wenn dieser auf vorderster Stelle steht und nach links bewegt werden soll. Bei einer Linksbewegung über den bereits beschriebenen Teil des Bandes hinaus wird stattdessen der Bandinhalt genau wie bei einer entsprechenden Rechtsbewegung mit einem $\square$-Symbol erweitert.

Sei nun $f : \{0, 1\}^* \to \{0, 1\}^*$ und $T : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ zeitkonstruierbar. Zeigen Sie: Wenn f auf einer Turingmaschine M mit k beidseitig unendlichen Bändern in Zeit $T(n)$ berechnet werden kann, dann kann f auch auf einer k'-Band-Turingmaschine M' (nach Definition aus der Vorlesung) für ein gewisses k' in Zeit $c \cdot T(n)$ für ein gewisses $c \in \mathbb{N}$ berechnet werden. Legen Sie dazu zunächst eine geeignete Konvention fest, wie auf beidseitig unendlichen Bändern Ein- und Ausgaben repräsentiert werden.

Geben Sie außerdem mit Begründung an, welcher Wert von c für Ihre Konstruktion gilt.

Aufgabe 1.3. **[Polynomielle Laufzeiten]** (10 Punkte)

a) Sei $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ und $T : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ zeitkonstruierbar. Es existiere eine k-Band-Turingmaschine M sowie ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ derart, dass M die Funktion f berechnet und dabei für jede Eingabe $x \in \{0,1\}^*$ mit $|x| \geq n_0$ höchstens $T(|x|)$ Schritte benötigt.

   Zeigen Sie, dass dann auch eine k-Band-Turingmaschine M' existiert, die f ebenfalls berechnet und dabei für jede Eingabe $x \in \{0,1\}^*$ höchstens $T'(|x|)$ Schritte benötigt, wobei

$$T'(n) = \begin{cases} T(n) + 2n_0, & \text{falls } n \geq n_0 \\ n + 2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Folgern Sie aus a), dass (gemäß der Terminologie aus der Vorlesung) dann f von M' in Zeit $T(n) + 2n_0$ berechnet wird.

c) Sei $p(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i n^i$ ein Polynom über $\mathbb{N}_0$ vom Grad $k \in \mathbb{N}_0$ in der Variablen n. Zeigen Sie:

$$\mathrm{DTIME}(p(n)) = \mathrm{DTIME}(n^k)$$

   Berücksichtigen Sie dabei auch den Fall $n = 0$.