

Übungen zum Vorkurs Physik

Blatt 4 - Differenzial- & Integralrechnung

Ziel: Routine und Schnelligkeit im Umgang mit Vektoren und Produkten von Vektoren
geometrische Anwendung von Vektoren.

Themen: Vektoren, Basis, Skalarprodukt, Vektorprodukt, Geraden und Ebenen

Aufgabe 1: Elementare Ableitungen

Leiten Sie folgende Funktionen ab:

- | | | |
|------------------|---------------------|------------------------|
| (a) $f(x) = x^n$ | (c) $f(x) = \ln x$ | (e) $f(x) = \tan x$ |
| (b) $f(x) = e^x$ | (d) $f(x) = \sin x$ | (f) $f(x) = \arccos x$ |

Aufgabe 2: Produktregel und Quotientenregel

Leiten Sie mit Hilfe der Produktregel oder der Quotientenregel ab:

- | | |
|-----------------------------------|--------------------------------------|
| (a) $f(x) = (x^2 - 4)(x^3 + 1)$ | (f) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ |
| (b) $f(x) = \frac{1}{x}(1 - x^3)$ | |
| (c) $f(x) = (x^2 + 1)\sin x$ | (g) $f(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$ |
| (d) $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ | |
| (e) $f(x) = \frac{x^2}{1 + 3x^2}$ | (h) $f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x}}$ |

Aufgabe 3: Kettenregel

Leiten Sie mit Hilfe der Kettenregel ab:

- | | | |
|---------------------------|----------------------------|----------------------------------|
| (a) $f(x) = (6x^4 + 2)^8$ | (c) $f(x) = \ln(4 + 3x^2)$ | (e) $f(x) = \ln(\cos(x - 2x^4))$ |
| (b) $f(x) = 3\cos^4 x$ | (d) $f(x) = e^{(2x+1)^2}$ | (f) $f(x) = e^{x\sin(2x)}$ |

Aufgabe 4: Ableitungen

Leiten Sie ab:

- | | |
|--------------------------------------|--|
| (a) $f(x) = \frac{1+x}{\ln(1-x)}$ | (e) $f(x) = \ln(\sqrt{1+e^x} - 1) - \ln(\sqrt{1+e^x} + 1)$ |
| (b) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(4\pi x)$ | (f) $f(x) = e^{\sin^2 x}$ |
| (c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$ | (g) $f(x) = \ln \cos \frac{x-1}{x}$ |
| (d) $f(x) = (x^3 + 6x)e^{-x^2}$ | (h) $f(x) = e^{\alpha x} \cosh \beta x$ |

Aufgabe 5: Extremwertbestimmung

Von einem rechteckigen Blatt mit den Seitenlängen B und T wird an jeder Ecke ein Quadrat der Seitenlänge a ausgeschnitten und aus dem Rest wird eine Schachtel, die oben offen ist, gebildet. Wie muss a gewählt werden, damit das Volumen der Schachtel maximal ist?

Aufgabe 6: Kurvendiskussion

Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion

$$f(x) = -2x^3 - 5x^2 + 8x$$

durch. Diskutieren Sie insbesondere Symmetrie, asymptotisches Verhalten, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte, und skizzieren Sie die Funktion.

Aufgabe 7: Einfache Integrale

Finden Sie eine Stammfunktion zu folgenden Funktionen (wo $n, m \in \mathbb{N}$):

(a) $f(x) = 7x^3$

(c) $g(x) = s^3 x^3 - 2s x^{-2}$

(e) $g(x) = \frac{4}{cx^{2-n}}$

(b) $g(y) = y^2 - 4y$

(d) $k(t) = \frac{2}{ct^3}$

(f) $f(x) = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 2)}{\sqrt[3]{x^2}}$

Aufgabe 8: Substitution I

Berechnen Sie das Integral mithilfe der angegebenen Substitution:

(a) $\int (1 - 5x)^3 dx, \quad u(x) = 1 - 5x$

(c) $\int \cos(x)(1 - \sin(x)^2) dx, \quad u(x) = \sin(x)$

(b) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx, \quad u(x) = 1 + x^2$

(d) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad x(u) = \cos(u)$

Aufgabe 9: Substitution II

Berechnen Sie das Integral mithilfe einer passenden Substitution:

(a) $\int \sin(3x + 5) dx$

(d) $\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx$

(g) $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

(b) $\int e^{4t-3} dt$

(e) $\int x^{-2} e^{\frac{1}{x}} dx$

(h) $\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x - 1} dx$

(c) $\int y^2 e^{y^3} dy$

(f) $\int \frac{(\ln(t))^2}{t} dt$

Aufgabe 10: Partielle Integration

Berechnen Sie die Integrale mithilfe der partiellen Integration:

(a) $\int \ln(x) dx$

(c) $\int x e^{2x} dx$

(e) $\int x \sin x \cos x dx$

(b) $\int x^2 \sin(x) dx$

(d) $\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

(f) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$