

Übungen zum Vorkurs Physik

Blatt 3 - Vektoren & Analytische Geometrie

Ziel: Routine und Schnelligkeit im Umgang mit Vektoren und Produkten von Vektoren
geometrische Anwendung von Vektoren.

Themen: Vektoren, Basis, Skalarprodukt, Vektorprodukt, Geraden und Ebenen

Aufgabe 1: Vektoren

(a) Berechnen Sie den Betrag folgender Vektoren.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Normieren Sie die Vektoren $\vec{a}$ bis $\vec{d}$.

(c) Berechnen Sie mit den Vektoren $\vec{a}$ bis $\vec{d}$

$$\begin{array}{llll} \vec{a} + \vec{b} & , & \vec{a} - \vec{b} & , & \vec{a} \cdot \vec{b} & , & \vec{a} \times \vec{b} & , \\ \vec{a} + \vec{c} & , & \vec{a} - \vec{c} & , & \vec{a} \cdot \vec{c} & , & \vec{a} \times \vec{c} & , \\ \vec{a} + \vec{d} & , & \vec{a} - \vec{d} & , & \vec{a} \cdot \vec{d} & , & \vec{a} \times \vec{d} & . \end{array}$$

(d) Wie groß ist der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$; $\vec{a}$ und $\vec{c}$; $\vec{a}$ und $\vec{d}$?

(e) Wie muss k gewählt werden, damit die Länge des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 3 \end{pmatrix}$ gleich 8 ist?

Aufgabe 2: Flächeninhalt

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ spannen ein Parallelogramm auf. Berechnen Sie seinen Flächeninhalt.

Aufgabe 3: Volumen eines Spats

Durch die Vektoren $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1/2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ ist ein Spat gegeben. Berechnen Sie sein Volumen.

Aufgabe 4: Rechtwinkeliges Dreieck

Durch die Punkte $A(3, 2, 12)$, $B(7, 0, 11)$ und $C(6, 7, 14)$ ist ein Dreieck definiert. Zeigen Sie, dass das Dreieck rechtwinklig ist.

Aufgabe 5: Koordinatendarstellung von Vektoren

Schreiben Sie die folgenden Vektoren in Koordinatendarstellung ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ seien die drei kartesischen Basisvektoren).

(a) $\vec{e} = -3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 12\vec{e}_3$

(d) $\vec{h} = 4(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_3 + 5(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) - 2(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_3$

(b) $\vec{f} = \vec{e}_3$

(e) $\vec{i} = 3(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) - 6(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)$

(c) $\vec{g} = 2(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) - 7(\vec{e}_1 - \vec{e}_3) - 6(\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$

(f) $\vec{j} = (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_2 - (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + (\vec{e}_3 \times \vec{e}_2)$

Aufgabe 6: Abstand von Punkten

Berechnen Sie jeweils den Abstand der beiden Punkte im Koordinatensystem.

(a) $(3, 4)$; $(-1, -4)$

(c) $(1, 2, 3)$; $(4, 5, 6)$

(b) $(6, -3)$; $(-6, 1)$

Aufgabe 7: Darstellung einer Geraden

Bestimmen Sie die Parameterdarstellung sowie die parameterfreie Darstellung der Geraden, die durch die Punkte P, Q geht.

$$P = (-1, 1) , \quad Q = (1, 4)$$

Aufgabe 8: Schnittwinkel von Geraden

Benutzen Sie das Skalarprodukt und bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Geraden

$$y = -2x + 5 \quad \text{und} \quad y = \frac{3}{2}x + 1 .$$

Aufgabe 9: Ebenen

(a) Bestimmen Sie eine Darstellung der Ebene die orthogonal auf $\vec{n} = (1, 2, 3)$ ist und durch den Punkt $A = (2, -1, 3)$ geht.

(b) Bestimmen Sie die Parameterdarstellung sowie die parameterfreie Darstellung der Ebene, die durch die Punkte P, Q, R geht.

$$P = (-1, 1, 2) , \quad Q = (1, 4, -1) , \quad R = (2, 3, -1)$$