Vorkurs Physik

Wintersemester 2025/26

Tilmann Kuhn

Institut für Festkörpertheorie
Universität Münster

Ich danke Dr. Daniel Groll und Dr. Daniel Wigger für die Mitarbeit bei der Erstellung dieses Manuskripts.

Inhaltsverzeichnis

1. Funktionen

1.1 Grundbegriffe

Die Beschreibung physikalischer Vorgänge und Gesetzmäßigkeiten geschieht häufig durch Funktionen. Beispiele sind

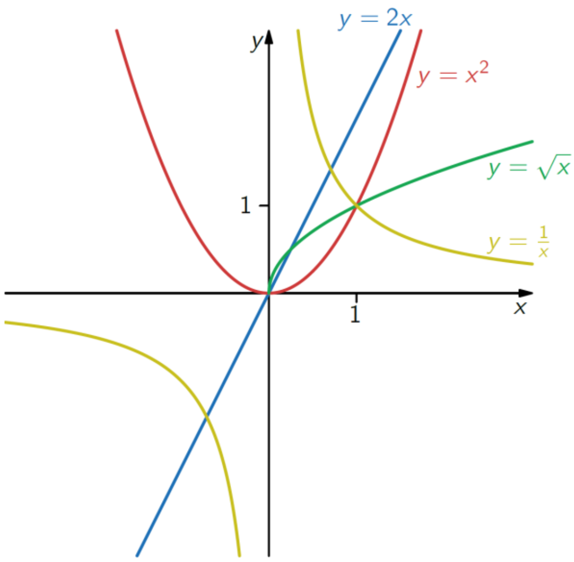
- $s(t)$: zurückgelegte Strecke als Funktion der Zeit. Z.B. gilt für eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v: $s(t)=vt$.
- $F(r)$: Kraft als Funktion des Abstands r. Z. B. gilt für die Gravitationskraft zwischen zwei Körpern im Abstand r: $F(r)=\frac{\gamma}{r^2}$.

Allgemein gilt: Eine Funktion $f(x)$ ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in D$ eindeutig ein Element $y=f(x)$ zuordnet. D heißt **Definitionsbereich** (bei uns ist dies meistens die Menge aller reller Zahlen $\mathbb{R}$ oder eine Teilmenge von $\mathbb{R}$). Die Menge aller möglichen Funktionswerte y heißt **Wertemenge** W.

Beispiele:

$y=2x$	$D=\mathbb{R}$	$W=\mathbb{R}$,
$y=x^2$	$D=\mathbb{R}$	$W=\mathbb{R}_0^+$,
$y=\sqrt{x}$	$D=\mathbb{R}_0^+$	$W=\mathbb{R}_0^+$,
$y=\frac{1}{x}$	$D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$W=\mathbb{R}\setminus\{0\}$,

Funktionen werden häufig in einem **kartesischen Koordinatensystem** dargestellt. Dabei bezeichnet man die horizontale Achse als x-Achse oder Abszisse und die vertikale Achse als y-Achse oder Ordinate. Die Darstellung der Funktion wird als **Graph der Funktion** bezeichnet.



Einschub: Die wichtigsten **Zahlenmengen** sind:

$\mathbb{N}$: Die Menge der natürlichen Zahlen $\{1,2,3,\dots\}$, Erweiterung $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,\dots\}$.

$\mathbb{Z}$: Die Menge der ganzen Zahlen $\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$. Bei ganzen und natürlichen Zahlen unterscheidet man *gerade* und *ungerade* Zahlen. Gerade Zahlen sind ohne Rest durch 2 teilbar. Damit ist auch null eine gerade Zahl.

$\mathbb{Q}$: Die Menge der rationalen Zahlen $\frac{x}{y}$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$ und $y \neq 0$.

$\mathbb{R}$: Die Menge der reellen Zahlen ($\mathbb{Q}$ erweitert um irrationale Zahlen wie $\sqrt{2}, \pi, \dots$ Speziell ist $\mathbb{R}^+$ die Menge der positiven, reellen Zahlen, $\mathbb{R}_0^+$ die Menge der nicht-negativen, reellen Zahlen und $\mathbb{R}^-$ die Menge der negativen, reellen Zahlen.

$\mathbb{C}$: Die Menge der komplexen Zahlen (s. Vorlesung Physik I).

Eine Funktion $f(x)$ ist **stetig** an einer Stelle $x = x_0$, falls der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ existiert und unabhängig davon ist, von welcher Seite man sich x_0 nähert. Eine Funktion ist stetig, wenn sie an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs stetig ist. Anschaulich gesprochen: Eine Funktion ist stetig, wenn man ihren Graphen zeichnen kann, ohne den Bleistift absetzen zu müssen.

Funktionen können **Symmetrien** besitzen. Dabei handelt es sich um Invarianzen gegenüber gewissen Transformationen. Symmetrien spielen in vielen Bereichen der Physik eine wichtige Rolle, da sie zum Verständnis von Gesetzmäßigkeiten beitragen und häufig die Lösung von Problemen wesentlich vereinfachen oder erst möglich machen. Spezielle Symmetrien sind:

- $f(x)$ heißt **gerade Funktion**, falls gilt $f(x) = f(-x)$. Der Graph einer geraden Funktion ist achsensymmetrisch bzgl. der *y*-Achse. Beispiele sind $y = x^2$ oder $y = |x|$.
- $f(x)$ heißt **ungerade Funktion**, falls gilt $f(x) = -f(-x)$. Der Graph einer ungeraden Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Beispiele sind $y = x$ oder $y = x^3$.
- $f(x)$ heißt **periodische Funktion** mit der Periode a, falls gilt $f(x) = f(x+a)$ für alle *x*. Der Graph einer periodischen Funktion ist invariant gegenüber einer Verschiebung entlang der *x*-Achse um beliebige ganzzahlige Vielfache von a. Beispiele sind $y = \sin(x)$ oder $y = \cos(x)$, jeweils mit der Periode $a = 2\pi$.

Funktionen können verkettet werden, d.h., sie werden nacheinander ausgeführt. Gegeben seien zwei Funktion $g(x)$ und $h(x)$. Die **verkettete Funktion** $f = g \circ h$ ist definiert als $f(x) = g(h(x))$. Zu beachten ist, dass im Allgemeinen gilt $g \circ h \neq h \circ g$. Als Beispiel sei $g(x) = x^2$ und $h(x) = x + 3$. Dann ist

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = (x+3)^2,$$

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = x^2 + 3.$$

Die **Umkehrfunktion** $\bar{f}(x)$ zu einer Funktion $f(x)$ ist definiert durch die Verkettung

$$(\bar{f} \circ f)(x) = (f \circ \bar{f})(x) = x,$$

d.h., $\bar{f}(f(x)) = x$ bzw. $f(\bar{f}(x)) = x$. Die Umkehrfunktion zur Funktion $y = f(x)$ erhält man aus $x = f(y)$ und Auflösen nach y. Wichtig ist: nicht zu jeder Funktion existiert die Umkehrfunktion.

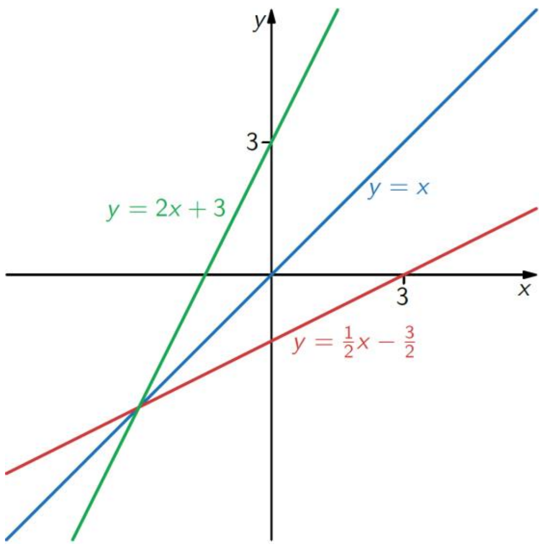
Als Beispiel betrachten wir die Funktion $y = f(x) = 2x + 3$. Die Umkehrfunktion folgt dann aus

$$x = 2y + 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = \bar{f}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

Zur Kontrolle betrachten wir

$$\bar{f}(f(x)) = \frac{1}{2}(2x+3) - \frac{3}{2} = x.$$

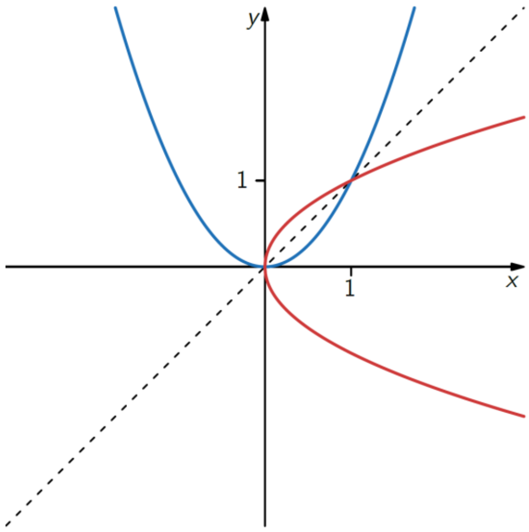
Graphisch erhält man die Umkehrfunktion durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden $y = x$.



Als weiteres Beispiel betrachten wir die Funktion $y = f(x) = x^2$. Die gespiegelte Kurve ist offensichtlich keine Funktion, da zu jedem *x*-Wert zwei *y*-Werte gehören und es sich deshalb nicht um eine eindeutige Zuordnung handelt. Die Umkehrfunktion existiert deshalb nicht. Als Abhilfe kann der Definitionsbereich eingeschränkt werden. Es gilt

$$f(x) = x^2, D = \mathbb{R}_0^+ \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = \sqrt{x}, D = \mathbb{R}_0^+,$$

$$f(x) = x^2, D = \mathbb{R}_0^- \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = -\sqrt{x}, D = \mathbb{R}_0^+.$$



Die Umkehrfunktion zur Funktion $f(x)$ existiert, falls $f(x)$ in D streng monoton steigend oder streng monoton fallend ist. Dabei gilt: Eine Funktion $f(x)$ ist **streng monoton steigend**, falls für $x_1 > x_2$ gilt $f(x_1) > f(x_2)$. Sie ist **streng monoton fallend**, falls für $x_1 > x_2$ gilt $f(x_1) < f(x_2)$. Weiterhin gilt: Eine Funktion $f(x)$ ist **monoton steigend**, falls für $x_1 > x_2$ gilt $f(x_1) \geq f(x_2)$. Sie ist **monoton fallend**, falls für $x_1 > x_2$ gilt $f(x_1) \leq f(x_2)$.

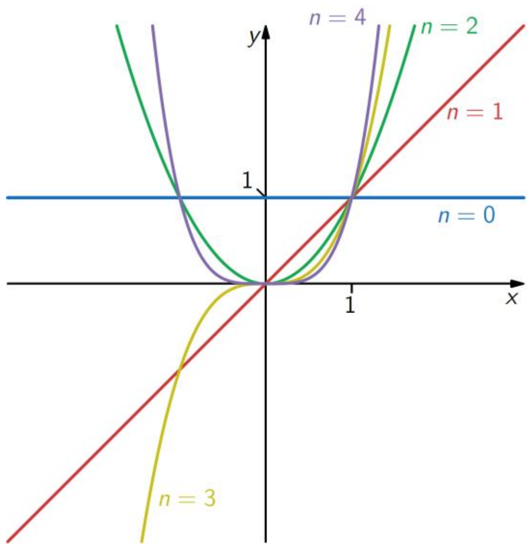
1.2 Einige elementare Funktionen und ihre Eigenschaften

1.2.1 Potenzfunktionen

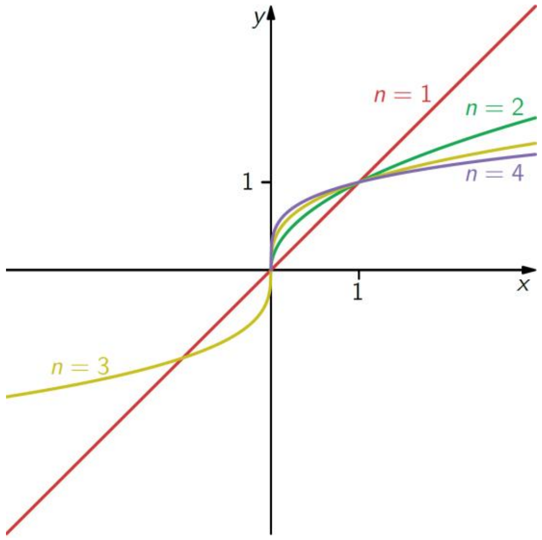
Eine Potenzfunktion hat die Form $y = x^a$.

Alle Potenzfunktionen gehen durch den Punkt $(1,1)$. Die Form hängt stark vom Exponenten a ab.

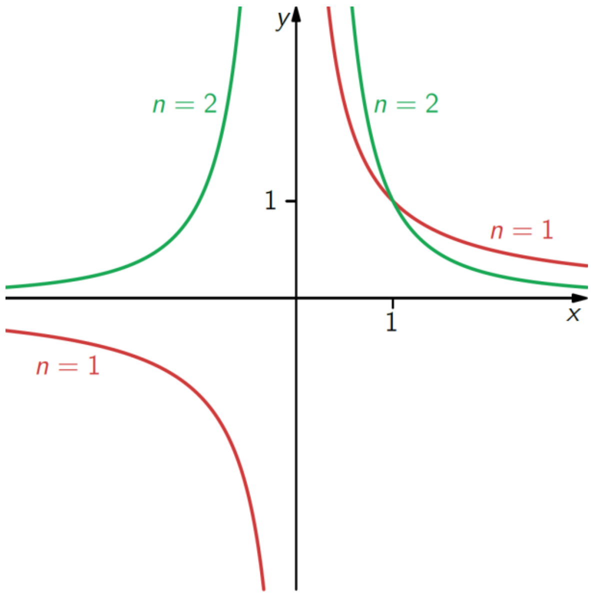
- $a = n, n \in \mathbb{N}_0$: Es handelt sich um eine Parabel *n*-ten Grades. Die Funktion ist gerade für gerade *n*, ungerade für ungerade *n*. Im Fall $n = 2$ spricht man von einer *Normalparabel*.



- $a = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$: Es handelt sich um eine *n*-te Wurzelfunktion und gleichzeitig um die Umkehrfunktion zur Parabel mit $a = n$ (ggf. bei eingeschränktem Definitionsbereich, s.o.). Man schreibt auch $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$. Für gerade *n* ist der Definitionsbereich $D = \mathbb{R}_0^+$, für ungerade *n* ist $D = \mathbb{R}$.



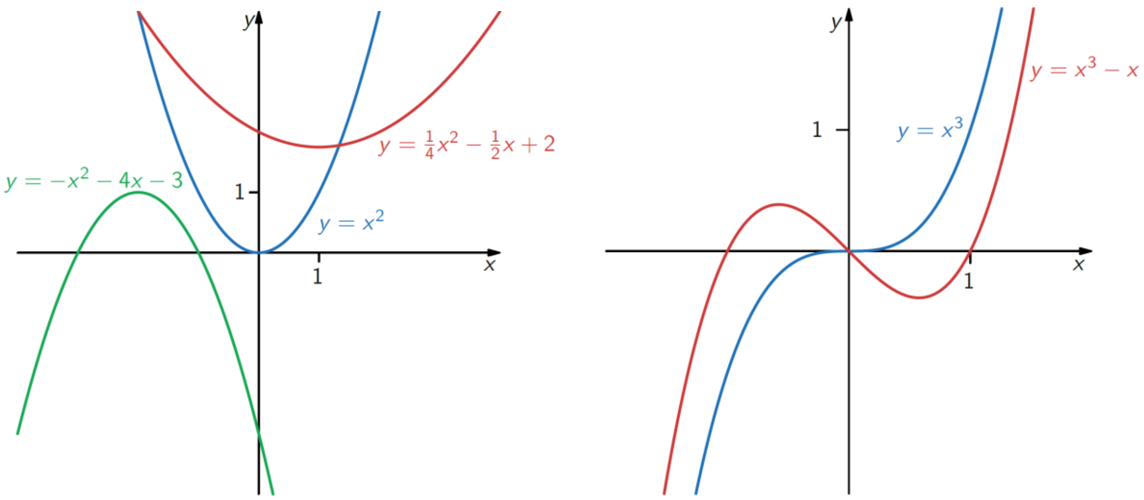
- $a = \dfrac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{N}$: Für $a > 1$ verhält sich die Funktion qualitativ ähnlich wie eine Parabel, für $a < 1$ wie eine Wurzelfunktion.
- $a = -n,\ n \in \mathbb{N}$: Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Funktion hat eine **Polstelle** bei $x = 0$ und es gilt $y \to 0$ für $x \to \pm\infty$. Die Funktion ist gerade für gerade *n*, ungerade für ungerade *n*. Die Funktion hat die beiden **Asymptoten** $x = 0$ und $y = 0$, d.h. sie nähert sich für $x \to 0$ der Geraden $x = 0$ an und für $x \to \pm\infty$ der Geraden $y = 0$.



1.2.2 Polynomfunktionen

Eine Polynomfunktion *n*-ten Grades hat die Form $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{R}$. Spezialfälle sind:

$n = 0$: konstante Funktion
$n = 1$: Gerade mit Steigung a_1 und *y*-Achsenabschnitt a_0
$n = 2$: Parabel zweiten Grades, i. allg. verschoben und gestreckt



Allgemein gilt: Ein Polynom *n*-ten Grades hat höchstens *n* Nullstellen, für ungerades *n* hat es mindestens eine Nullstelle. Das Verhalten für große Werte von $|x|$ wird durch die höchste Potenz, das Verhalten für kleine $|x|$ durch die kleinste Potenz bestimmt.

Enthält das Polynom nur gerade Potenzen, so ist die Polynomfunktion achsensymmetrisch zur *y*-Achse. Enthält es nur ungerade Potenzen, so ist sie punktsymmetrisch zum Ursprung.

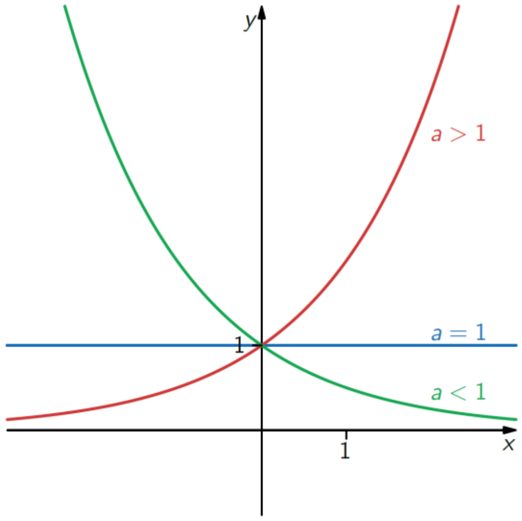
1.2.3 Rationale Funktionen

Eine rationale Funktion hat die Form $y = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ mit Polynomen *n*-ten und *m*-ten Grades $P_n(x)$ und $Q_m(x)$. Die Funktion hat Pole bei den Nullstellen von $Q_m(x)$ (falls dort nicht gleichzeitig $P_n(x) = 0$). Es gibt höchstens *m* Polstellen, der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R} \setminus \{\text{Polstellen}\}$.

1.2.4 Exponentialfunktionen

Eine Exponentialfunktion hat die Form $y = a^x$ mit $a > 0$. Anwendungsbeispiele finden sich (i) in der Zinsrechnung: bei *p* Prozent jährlicher Verzinsung wächst das Anfangskapital K_0 nach *n* Jahren auf $K(n) = K_0 \left(1 + \dfrac{p}{100}\right)^n$, sowie (ii) beim radioaktiven Zerfall: nach der Zeit *t* sind von anfänglich N_0 Atomen noch $N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T} = N_0\, 2^{-t/T}$ nicht zerfallen. Dabei ist T die Halbwertszeit, nach der die Hälfte der Atome zerfallen sind.

Die Exponentialfunktion ist zunächst nur für rationale Zahlen $x = \frac{m}{n}$ wohldefiniert. Sie kann entweder als Grenzwert oder über eine Definition als Potenzreihe (s. später) auch auf reelle Zahlen fortgesetzt werden. Für $a > 1$ ist die Funktion streng monoton steigend, für $a < 0$ streng monoton fallend. Für $a = 1$ ist die Funktion konstant. Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}$, die Wertemenge (außer für $a = 1$) $W = \mathbb{R}^+$.



Für Exponentialfunktionen gelten die Rechenregeln

$$a^{x+y} = a^x a^y, \qquad a^x b^x = (ab)^x$$

$$a^{xy} = \left(a^x\right)^y = \left(a^y\right)^x, \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x.$$

Die wichtigste Exponentialfunktion ist die Funktion $y = e^x$ mit der Eulerschen Zahl e als Basis. Es gilt $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2{,}718281\ldots$ (eine Begründung folgt im Kapitel Differentialrechnung).

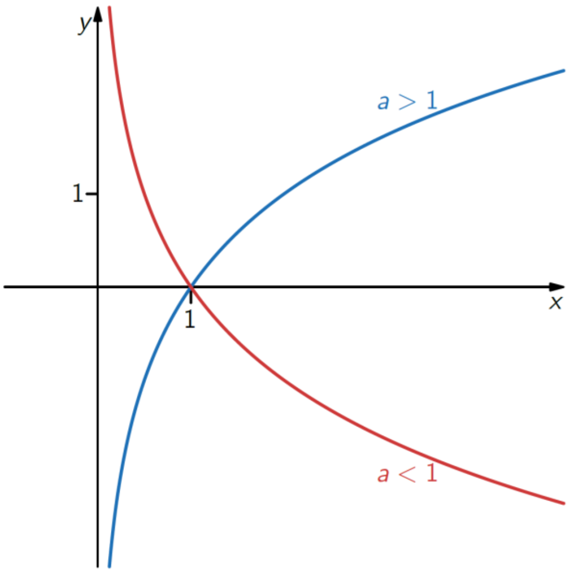
1.2.5 Logarithmusfunktionen

Die Logarithmusfunktion zur Basis a ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion zur Basis a. Aus $x = a^y$ folgt $y = \log_a x$. Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}^+$, die Wertemenge ist $W = \mathbb{R}$. Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a\left(x^p\right) = p \log_a x$$



Spezielle Logarithmen sind der Zweierlogarithmus (Logarithmus dualis) $\log_2 x = \operatorname{ld} x$, der Zehnerlogarithmus (dekadischer Logarithmus) $\log_{10} x = \lg x$ und der Logarithmus zur Basis e (natürlicher Logarithmus) $\log_e x = \ln x$.

Logarithmen zu verschiedenen Basen können wie folgt ineinander umgerechnet werden: Nach Definition gilt allgemein $a = b^{\log_b a}$. Damit folgt $a^x = \left(b^{\log_b a}\right)^x = b^{x \log_b a}$ und speziell $a^x = e^{x \ln a}$. Weiterhin gilt mit $y = a^x = b^{x \log_b a}$:

$$\left.\begin{aligned} \log_a y &= x \\ \log_b y &= x \log_b a \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \log_a y = \frac{\log_b y}{\log_b a}$$

und speziell $\log_a y = \dfrac{\ln y}{\ln a}$. Damit sind Logarithmen zu beliebigen Basen äquivalent. In der Physik wird fast immer der natürliche Logarithmus verwendet.

2. Gleichungen und Ungleichungen

2.1 Gleichungen

Bei vielen Fragestellungen sind Gleichungen zu lösen, z.B. wo hat eine Funktion einen bestimmten Wert, wo schneiden sich zwei Kurven, … Zum Lösen von Gleichungen existieren verschiedene Techniken, die allerdings stark vom Typ der Gleichung abhängen.

2.1.1 Lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen mit einer Variablen haben die allgemeine Form $ax+b=0$. Sie können direkt gelöst werden gemäß

$$\begin{aligned} ax+b&=0 \qquad &|-b \\ ax&=-b \qquad &|:a \\ x&=-\frac{b}{a}, \end{aligned}$$

wobei $a \neq 0$ vorausgesetzt wurde.

Auch kompliziertere Ausdrücke können manchmal auf lineare Gleichungen führen, z.B.

$$\begin{aligned} 4(x-1)^2 &= (2x+3)^2-7 \\ 4x^2-8x+4 &= 4x^2+12x+9-7 \\ -20x &= -2 \\ x &= \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

2.1.2 Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen haben die allgemeine Form $ax^2+bx+c=0$ oder äquivalent (für $a \neq 0$) $x^2+px+q=0$ mit $p=\frac{b}{a}, q=\frac{c}{a}$. Letztere Form wird auch als *Normalform* bezeichnet. Die allgemeine Lösung lautet

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}-q} = \frac{1}{2}\left[-p \pm \sqrt{D}\right]$$

mit der *Diskriminanten* $D=p^2-4q$. Die Gleichung hat für $D>0$ zwei reelle Lösungen, für $D=0$ eine Lösung und für $D<0$ keine (reelle) Lösung.

2.1.3 Polynomgleichungen höherer Ordnung

Eine Polynomgleichung *n*-ter Ordnung hat die Form $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$. Für $n=3$ und $n=4$ existieren Lösungsformeln, diese sind aber sehr kompliziert und werden fast nie verwendet. Für $n \geq 5$ existiert keine geschlossene Lösung.

Eine Polynomgleichung *n*-ter Ordnung hat maximal *n* reelle Lösungen, es können aber auch weniger sein (s. quadratische Gleichung).

In manchen Fällen kann man eine Lösung $x = x_0$ durch Erraten oder andere Überlegungen finden. Dann kann man das Polynom durch $\left(x - x_0\right)$ dividieren und dadurch auf ein Polynom $\left(n-1\right)$-ten Grades reduzieren. Insbesondere ist im Fall von $a_0 = 0$ immer $x = 0$ eine Lösung. Wir betrachten als Beispiel die Gleichung dritter Ordnung

$$x^3 + 4x^2 - 5x = 0 .$$

Die erste Lösung ist $x_1 = 0$. Division durch x liefert die quadratische Gleichung $x^2 + 4x - 5 = 0$, deren Lösung liefert dann die beiden Lösungen $x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{4+5} = -2 \pm 3$.

Einen weiteren Spezialfall bildet die biquadratische Gleichung

$$x^4 + px^2 + q = 0 .$$

Diese wird durch die Substitution $x^2 = u$ auf die quadratische Gleichung $u^2 + pu + q = 0$ zurückgeführt mit den Lösungen $u_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. Die (maximal 4) Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind dann $x_{1,2} = \pm\sqrt{u_1}$ und $x_{3,4} = \pm\sqrt{u_2}$, jeweils falls $u_1, u_2 \ge 0$.

2.1.4 Wurzelgleichungen

Gleichungen, die Wurzeln enthalten, werden im Allgemeinen durch quadrieren bzw. potenzieren (ggf. auch mehrfach) in eine Polynomgleichung umgewandelt. Ein Beispiel ist:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} &= 2 \\ x-1 &= 4 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Allerdings zeigt das folgende Beispiel ein Problem:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} &= -2 \\ x-1 &= 4 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Einsetzen in die Ausgangsgleichung zeigt, dass $x = 5$ keine Lösung ist. Die Ursache dafür ist, dass durch das Quadrieren Scheinlösungen entstehen können. Es muss deshalb immer durch Einsetzen kontrolliert werden, ob der gefundene Wert tatsächlich eine Lösung ist. Wir betrachten dazu das folgende Beispiel:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-3} &= \sqrt{x^2 - 2x} \\ 2x-3 &= x^2 - 2x \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ x &= 2 \pm \sqrt{4-3} \\ x &= 2 \pm 1 \end{aligned}$$

Einsetzen in die Ausgangsgleich ergibt: $x = 3$ ist Lösung, $x = 1$ ist keine Lösung.

2.1.5 Gleichungen mit rationalen Termen

Eine Gleichung von diesem Typ ist beispielsweise

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

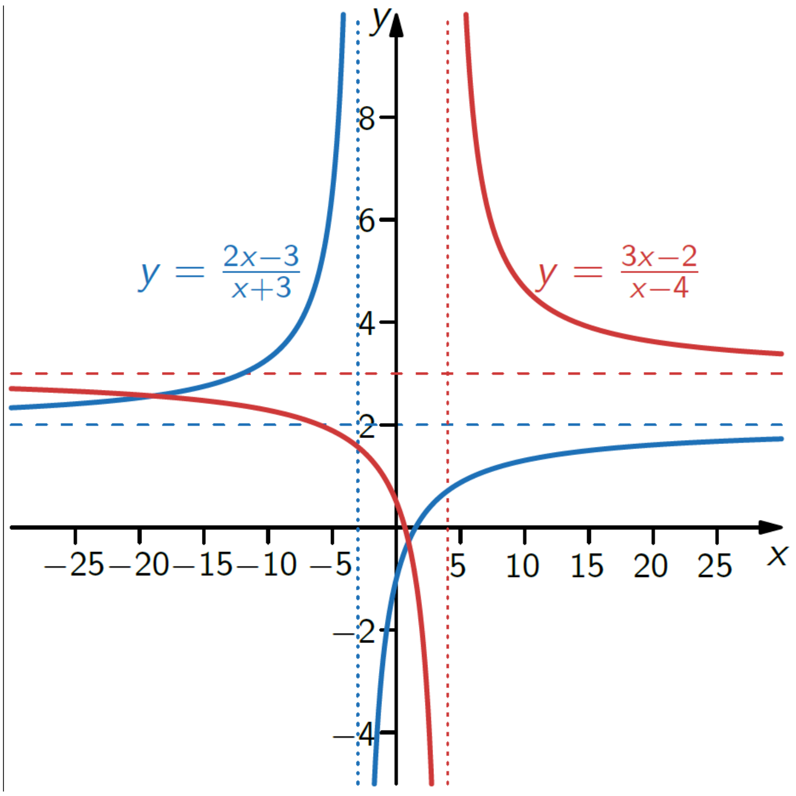
mit vier Polynomen P_1, P_2, Q_1, Q_2. Diese Gleichung kann durch Multiplikation mit $Q_1(x) \cdot Q_2(x)$ (oder dem Hauptnenner) in eine Polynomgleichung umgewandelt werden. Es ist zu beachten, dass auch hier Scheinlösungen auftreten können und deshalb immer eine Probe durch Einsetzen erforderlich ist.

Als Beispiel betrachten wir die Gleichung $\frac{2x-3}{x+3} = \frac{3x-2}{x-4}$.

$$(2x-3)(x-4) = (3x-2)(x+3)$$
$$2x^2 - 11x + 12 = 3x^2 + 7x - 6$$
$$x^2 + 18x - 18 = 0$$
$$x_{1,2} = -9 \pm \sqrt{81+18} = \begin{cases} -9+\sqrt{99} \approx 0{,}95 \\ -9-\sqrt{99} \approx -18{,}95 \end{cases}$$

Die Probe durch Einsetzen ergibt: Beide Werte sind Lösungen.

Alternativ kann man auch durch Zeichnen der Graphen der rechten und linken Seite kontrollieren, ob an den beiden Werten Schnittpunkte existieren.



2.1.6 Exponentialgleichungen

Gleichungen, die Exponentialterme enthalten, werden im Allgemeinen durch logarithmieren gelöst. Analytische Lösungen sind allerdings nur in besonderen Fällen möglich.

Tritt nur eine Basis auf, wird der zugehörige Logarithmus gewählt. Beispiele sind

- $$\begin{aligned} a^x &= b \\ x &= \log_a b \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} 2\cdot 3^x + 3^{x+1} &= 135 \\ 2\cdot 3^x + 3\cdot 3^x &= 135 \\ 5\cdot 3^x &= 135 \\ 3^x &= 27 = 3^3 \\ x &= \log_3 27 = 3 \end{aligned}$$

Bei mehreren Basen ist egal, welcher Logarithmus gewählt wird. Häufig wählt man den natürlichen Logarithmus ln.

$$\begin{aligned} 2^{x-1} &= 3^{x+1} \\ (x-1)\log 2 &= (x+1)\log 3 \\ x(\log 2 - \log 3) &= \log 3 + \log 2 \\ x &= \frac{\log 2 + \log 3}{\log 2 - \log 3} \end{aligned}$$

Für Logarithmusgleichungen gelten analoge Verfahren.

2.2 Lineare Gleichungssysteme

Oft muss nicht nur eine Gleichung gelöst werden, sondern mehrere Gleichungen müssen simultan gelöst werden. Der wichtigste Fall ist ein System aus linearen Gleichungen. Hierfür existieren allgemeine Verfahren sowohl für die analytische als auch für die numerische Lösung. Bei anderen Gleichungssystemen gibt es in der Regel keine allgemeinen Verfahren.

Wir betrachten im Folgenden ein System aus *n* linearen Gleichungen für *n* Unbekannte:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Sind alle Glieder b_n auf der rechten Seite null, spricht man von einem **homogenen Gleichungssystem**, sonst von einem **inhomogenen Gleichungssystem**.

Es gibt drei grundlegende Lösungsverfahren: (i) das **Einsetzungsverfahren**, (ii) das **Gleichsetzungsverfahren**, (iii) das **Additions- bzw. Subtraktionsverfahren**. Beispiele sind

- $$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ y &= -x + 1 \end{aligned}$$

Hier ist die zweite Gleichung bereits in einer Form gegeben, die zum Einsetzen in die erste Gleichung einlädt. Es folgt dann

$$2x+3(-x+1)=4$$
$$-x+3=4$$
$$x=-1;\quad y=2$$

- $y=4x-2$
  $y=-2x+4$

  Hier sind beide Gleichungen bereits nach einer Variablen aufgelöst und können deshalb gleichgesetzt werden. Dieser Fall tritt z.B. bei der Berechnung von Schnittpunkten von Geraden auf.

  $$4x-2=-2x+4$$
  $$6x=6$$
  $$x=1;\quad y=2$$

- $3x+2y=8$
  $x-y=1$

  Beim Additions- bzw. Subtraktionsverfahren wird ein geeignetes Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen Gleichung addiert, so dass eine der Variablen verschwindet. Im vorliegenden Beispiel wird das Doppelte der zweiten Gleichung zur ersten addiert. Dies ergibt

  $$5x=10$$
  $$x=2;\quad y=1$$

Die hier beispielhaft für zwei Gleichungen gezeigten Verfahren können direkt auf mehrere Gleichungen erweitert werden. Man eliminiert dann sukzessive eine Variable nach der anderen, bis nur noch eine übrigbleibt. Ein systematisches Verfahren hierzu, dass auch für die numerische Lösung mit einem Computer viel verwendet wird, ist die **Gauß-Elimination** (hier nicht besprochen).

Gleichungssysteme können auch keine oder unendlich viele Lösungen haben.

1. $2x+3y=4$
   $4x+6y=8$
2. $2x+3y=4$
   $4x+6y=5$

Im ersten Fall beschreiben die Gleichungen zwei identische Geraden. Es gibt deshalb unendlich viele Lösungen, und zwar alle Punkte auf den Geraden. Im zweiten Fall beschreiben die Gleichungen zwei parallele Geraden, die keinen Schnittpunkt besitzen, und die deshalb nicht gleichzeitig erfüllt werden können.

2.3 Ungleichungen

In einer Ungleichung sind zwei Terme durch eines der Zeichen $>, <, \geq, \leq$ verbunden. Das Ergebnis ist in der Regel eine Lösungsmenge L. Die Rechenregeln für Ungleichungen sind im Wesentlichen dieselben wie für Gleichungen. Allerdings müssen bei einer Multiplikation mit einer negativen Zahl (bzw. Division durch eine negative Zahl) die Zeichen > und < (bzw. $\geq$ und $\leq$) vertauscht werden. Ein Beispiel ist

$$
\begin{aligned}
3x - 4 &< 4x + 5 \\
-x &< 9 \\
x &> -9
\end{aligned}
$$

ggf. sind im Verlauf des Lösungswegs Fallunterscheidungen notwendig.

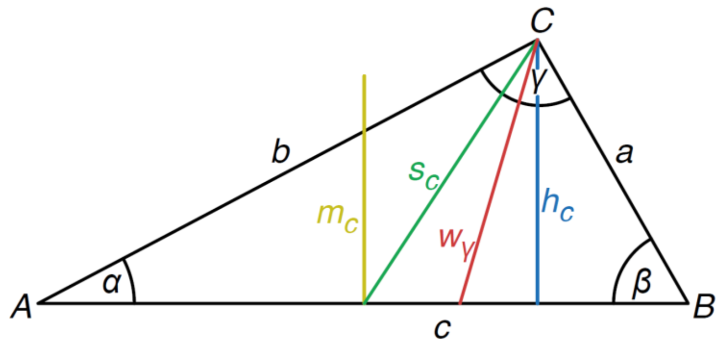
3. Trigonometrie

Die Trigonometrie beschäftigt sich mit Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln in Dreiecken. Trigonometrische Funktion spielen aber in der Physik auch in vielen Bereichen eine wichtige Rolle, die auf den ersten Blick nichts mit Dreiecken zu tun haben, so z.B. bei allen periodischen Vorgängen wie Schwingungen und Wellen.

3.1 Eigenschaften von Dreiecken

3.1.1 Allgemeine Eigenschaften

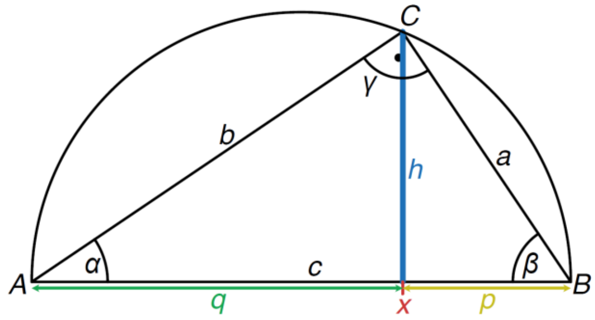
Die folgenden Eigenschaften gelten in beliebigen Dreiecken.



- Die **Winkelsumme** im Dreieck beträgt $\alpha+\beta+\gamma=180°$.
- Es gelten die **Dreiecksungleichungen** $c<a+b$,
  $a<b+c$,
  $b<c+a$.
- Die **Mittelsenkrechten** m_a, m_b, m_c schneiden sich im Mittelpunkt des Umkreises.
- Die **Winkelhalbierenden** $w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$ schneiden sich im Mittelpunkt des Inkreises.
- Die **Seitenhalbierenden** s_a, s_b, s_c schneiden sich im Schwerpunkt des Dreiecks.
- Der **Flächeninhalt** des Dreiecks ergibt sich aus einer Seite und der darauf senkrecht stehenden Höhe gemäß $A=\frac{1}{2}c\,h_c=\frac{1}{2}a\,h_a=\frac{1}{2}b\,h_b$.

3.1.2 Eigenschaften von rechtwinkligen Dreiecken

Die folgenden Eigenschaften gelten in Dreiecken mit einem rechten Winkel. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir $\gamma=90°$.



- Es gilt der **Satz des Pythagoras** $a^2 + b^2 = c^2$.
- Es gilt der **Satz des Euklid** (Kathetensatz) $a^2 = cp$,
  $b^2 = cq$.
- Es gilt der **Höhensatz** $h^2 = pq$.
- Es gilt der **Satz des Thales**: Liegt C auf dem Halbkreis über der Strecke $\overline{AB}$, so ist γ ein rechter Winkel.

Der Satz des Euklid und der Höhensatz können direkt aus dem Satz des Pythagoras abgeleitet werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} b^2 &= h^2 + q^2 \\ c^2 - a^2 &= h^2 + (c-p)^2 = h^2 + c^2 - 2cp + p^2 \\ -a^2 &= h^2 - 2cp + p^2 = a^2 - p^2 - 2cp + p^2 \\ a^2 &= cp, \qquad \text{und analog } b^2 = cq. \end{aligned}$$

Weiterhin folgt aus dem Satz des Euklid

$$\begin{aligned} \underbrace{p^2 + h^2}_{a^2} &= \underbrace{(p+q)}_{c}\, p \\ h^2 &= pq. \end{aligned}$$

3.2 Trigonometrische Funktionen

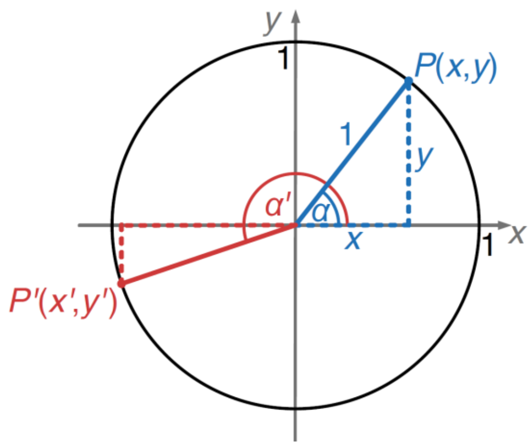
Im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a, b und der Hypotenuse c werden die folgenden Funktionen definiert:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Im rechtwinkligen Dreieck ist $\alpha < 90°$, deshalb sind die trigonometrischen Funktionen zunächst nur für solche Winkel definiert. Eine Fortsetzung der Definition auf beliebige Winkel erfolgt durch die Definition am Einheitskreis: Für einen beliebigen Punkt $P(x, y)$ auf dem Einheitskreis gilt

$$y = \sin\alpha$$
$$x = \cos\alpha$$



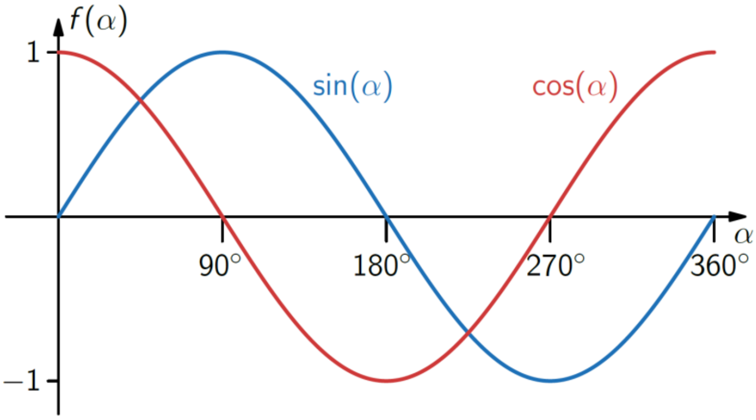
Es gilt dann z.B. für $0 < \alpha < 90°$: $\quad y = \sin\alpha > 0$,

$x = \cos\alpha > 0$,

dagegen für $180° < \alpha < 270°$: $\quad y' = \sin\alpha < 0$,

$x' = \cos\alpha < 0$.

Der Graph der Sinus- und Kosinusfunktion hat dann die folgende Gestalt:



Für Winkel größer als $360°$ werden die Funktionen periodisch fortgesetzt:

$$\sin(\alpha + 360°) = \sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + 360°) = \cos\alpha$$

Die Definition am Einheitskreis weist direkt auf eine wichtige physikalische Anwendung hin. Wir betrachten einen Körper, der sich mit konstanter Frequenz f auf einer Kreisbahn mit Einheitsradius um den Ursprung bewegt. Der Winkel zur *x*-Achse zur Zeit *t* beträgt dann $\alpha = f\,t \cdot 360°$. Die kartesischen Koordinaten des Körpers zur Zeit *t* lauten dann

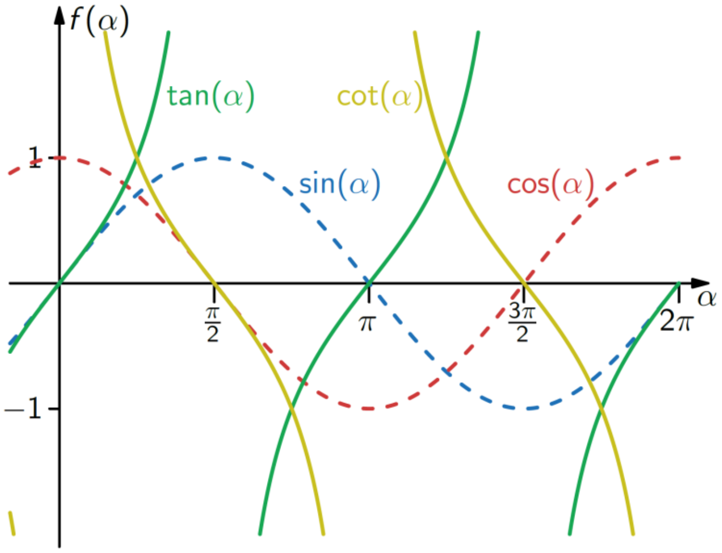
$$x(t) = \cos(360° \cdot f\,t)$$
$$y(t) = \sin(360° \cdot f\,t)$$

Dies ist eine **Parameterdarstellung der Kreisbahn**.

Winkel werden in der Physik häufig im Bogenmaß angegeben. Dabei handelt es sich um die (vorzeichenbehaftete) Länge des zum Winkel α gehörenden Bogens am Einheitskreis. Es gelten beispielhaft die folgenden Zusammenhänge:

$$360° \triangleq 2\pi$$
$$180° \triangleq \pi$$
$$90° \triangleq \frac{\pi}{2}$$
$$0° \triangleq 0$$

Über die Zusammenhänge $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ und $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ sind auch die Tangens- und die Kotangensfunktion für beliebige (reelle) Argumente definiert. Diese haben Polstellen an den Nullstellen der Kosinus- bzw. Sinusfunktion.



Die Kosinusfunktion ist eine gerade Funktion, die Sinus-, Tangens- und Kotangensfunktionen sind ungerade Funktionen.

3.3 Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen

Zwischen den verschiedenen trigonometrischen Funktionen bestehen eine Vielzahl von Beziehungen. Aus der Definition am Einheitskreis folgt mit dem Satz des Pythagoras $x^2 + y^2 = 1$ direkt die wichtige Beziehung $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ für beliebige α, und daraus

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}\,,$$
$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}\,.$$

Das Vorzeichen wird durch den Quadranten festgelegt, in dem sich α befindet. Daraus folgen beispielsweise

$$\tan\alpha = \pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2 a}} = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}\,,$$
$$\cot\alpha = \pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2 a}} = \pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}\,.$$

Ferner gelten die **Additionstheoreme** (hier ohne Beweis)

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,.$$

Sie lassen sich elegant mit Hilfe von komplexen Zahlen beweisen, s. Physik I. Spezialfälle sind

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\,,$$
$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha \\ &= 2\cos^2\alpha - 1\,.\end{aligned}$$

Daraus lassen sich **Summenformeln** für die trigonometrischen Funktionen ableiten:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha+\sin\beta &= \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
&= \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
&\quad +\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
&= 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).
\end{aligned}$$

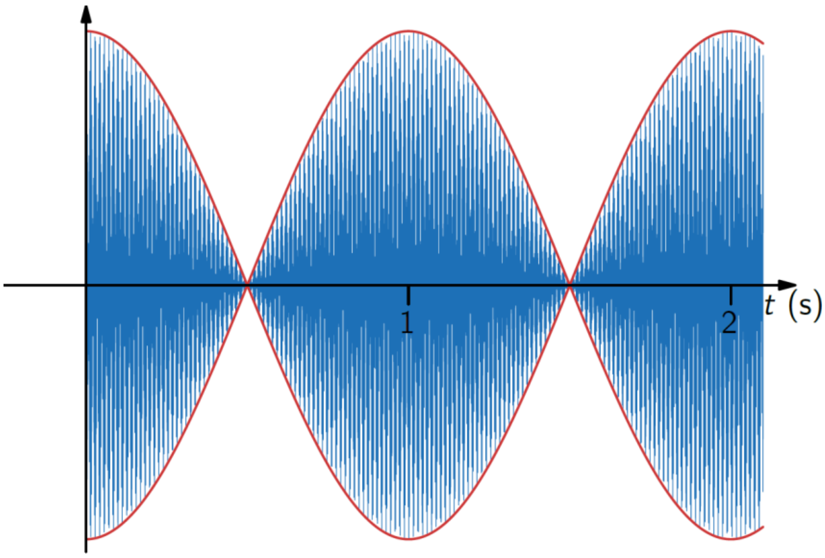
Analog gilt

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Aus diesen Formeln kann man das Auftreten von Schwebungen bei der Überlagerung von zwei nahe benachbarten Tönen verstehen. Wir betrachten als Beispiel die Überlagerung von zwei Sinustönen mit den Frequenzen $f_1 = 440\,\mathrm{Hz}$ und $f_2 = 441\,\mathrm{Hz}$. Dann gilt

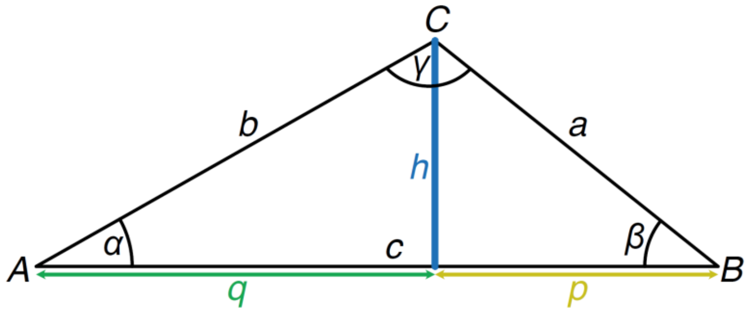
$$\sin(2\pi f_1 t)+\sin(2\pi f_2 t) = 2\sin\left(2\pi\frac{f_1+f_2}{2}t\right)\cos\left(2\pi\frac{f_1-f_2}{2}t\right).$$

Wir hören deshalb einen Ton der Frequenz 440,5 Hz, der mit einer Frequenz von 0,5 Hz moduliert ist.



3.4 Sinus- und Kosinussatz

Während die trigonometrischen Funktionen zunächst anhand von rechtwinkligen Dreiecken definiert werden, kann man damit auch Beziehung ableiten, die für beliebige Dreiecke gelten. Sei h die Höhe auf der Seite c, dann gilt in einem beliebigen Dreieck



$$a^2 = h^2 + p^2 \qquad\qquad b^2 = h^2 + q^2$$

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= p^2 - q^2 \\ &= (c-q)^2 - q^2 \\ &= c^2 - 2cq\,. \end{aligned}$$

Mit $q = b\cos\alpha$ folgt daraus der **Kosinussatz**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\,.$$

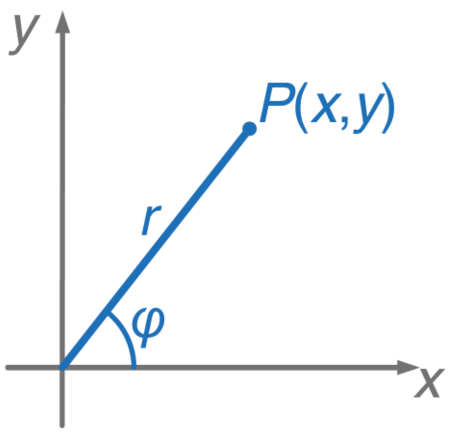
Mit $h = b\sin\alpha$ und $h = a\sin\beta$ folgt daraus der **Sinussatz**

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}\,.$$

Die beiden Sätze gelten analog bei zyklischer Vertauschung $a,\alpha \to b,\beta$; $b,\beta \to c,\gamma$ und $c,\gamma \to a,\alpha$.

3.5 Polarkoordinaten

Zur Darstellung der Lage eines Punktes in einer Ebene verwendet man ein Koordinatensystem. Die Lage des Punktes ist eindeutig festgelegt durch seine **kartesischen Koordinaten** x, y in einem kartesischen, d.h. rechtwinkligen Koordinatensystem. Alternativ kann der Punkt auch durch die **Polarkoordinaten** r,φ festgelegt werden. Dabei ist r der Abstand vom Ursprung und φ der Winkel zur x-Achse.



Die Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten und umgekehrt erfolgt mit Hilfe der Formeln

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

$$y = r\sin\varphi\,, \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}\,.$$

3.6 Umkehrfunktionen

Die trigonometrischen Funktionen sind nicht streng monoton auf $\mathbb{R}$. Zur Definition der Umkehrfunktionen ist deshalb eine Einschränkung des Definitionsbereichs notwendig (s. Kap. 1.1). Wir verwenden die folgenden Definitionsbereiche:

$$\sin x: \quad D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \tan x: \quad D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cos x: \quad D = [0, \pi], \qquad \cot x: \quad D = (0, \pi).$$

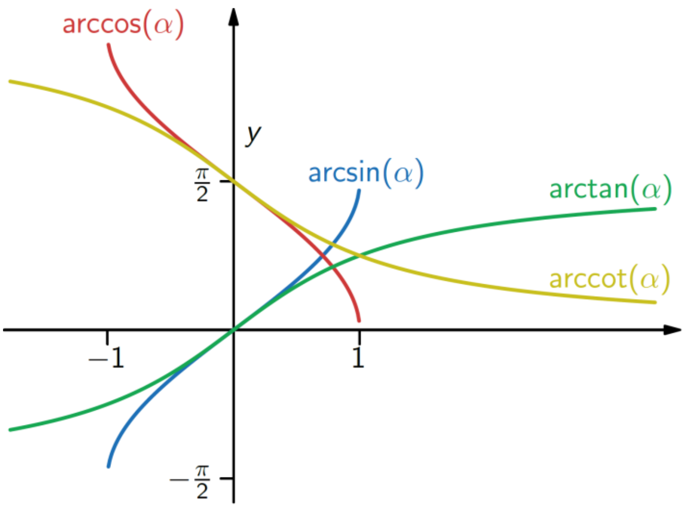
Die Umkehrfunktion heißen **arcus-Funktionen**. Sie haben die folgenden Definitionsbereiche:

$$y = \arcsin x \qquad D = [-1,1]\,,$$

$$y = \arccos x \qquad D = [-1,1]\,,$$

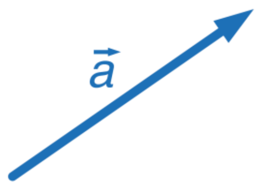
$$y = \arctan x \qquad D = \mathbb{R}\,,$$

$$y = \operatorname{arccot} x \qquad D = \mathbb{R}\,.$$



4. Vektoren

Manche physikalische Größen werden durch eine einzelne Zahl (und ggf. die zugehörige Maßeinheit) beschrieben. Beispiele hierfür sind Masse, Temperatur, Ladung, kinetische Energie, … Diese Größen heißen **Skalare**. Andere Größen benötigen zusätzlich die Angabe einer Richtung, beispielsweise Geschwindigkeit, Kraft, elektrische oder magnetische Feldstärke. Diese Größen heißen **Vektoren**. Sie sind charakterisiert durch Betrag und Richtung und werden graphisch durch einen Pfeil dargestellt.

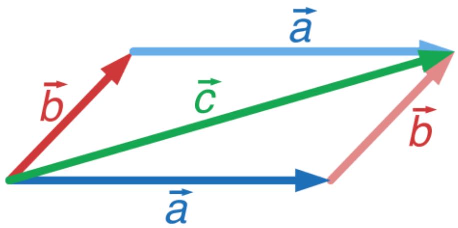


Der Betrag des Vektors wird mit $|\vec{a}|$ oder häufig auch einfach mit a bezeichnet. Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie in Betrag und Richtung übereinstimmen.

4.1 Elementare Operationen

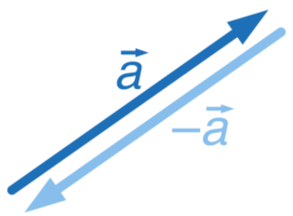
4.1.1 Addition

Seien $\vec{a}, \vec{b}$ zwei Vektoren, dann ist auch $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ ein Vektor. Er wird so konstruiert, dass $\vec{b}$ so parallelverschoben wird, dass der Anfangspunkt von $\vec{b}$ auf dem Endpunkt von $\vec{a}$ liegt. Der Summenvektor $\vec{c}$ zeigt dann vom Anfangspunkt von $\vec{a}$ zum Endpunkte von $\vec{b}$. Er bildet die Diagonale im von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramm.



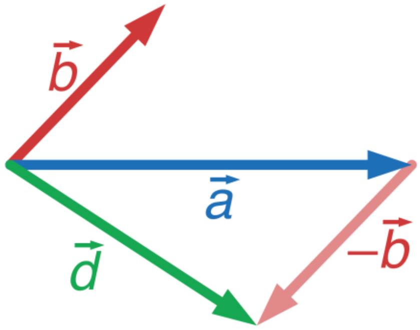
Es gelten die folgenden Gesetzmäßigkeiten

- Kommutativgesetz: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Assoziativgesetz: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$
- Es existiert ein Nullvektor $\vec{0}$, so dass $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$. Der Nullvektor ist der einzige Vektor, der keine Richtung hat.
- Es existiert ein antiparalleler Vektor $-\vec{a}$, so dass $\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$.



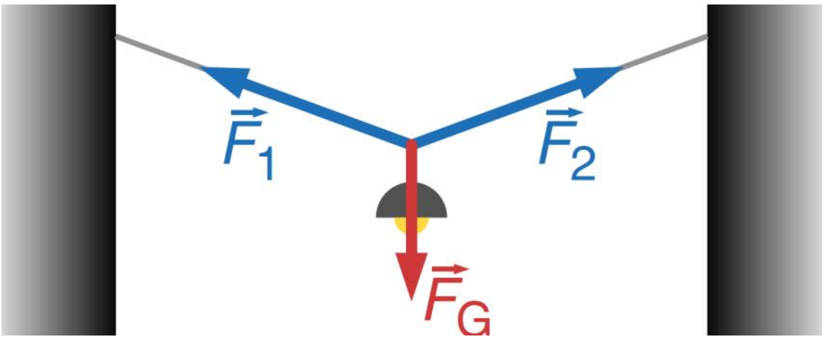
4.1.2 Subtraktion

Ein Vektor $\vec{b}$ wird vom Vektor $\vec{a}$ subtrahiert, indem der antiparallele Vektor $-\vec{b}$ addiert wird: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$

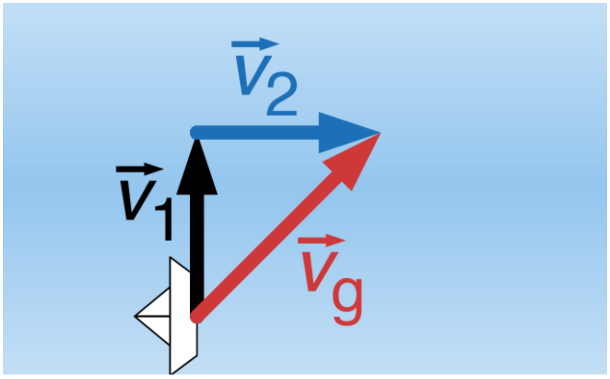


Anwendungsbeispiele:

Eine Straßenlaterne hängt zwischen zwei Hauswänden. Die Laterne wird durch die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ nach unten gezogen. Sie wird gehalten durch die beiden Seilkräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$. Im Gleichgewicht muss gelten: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_G = 0$ (Newtonsches Gesetz, s. Physik I).



Ein Boot fährt mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_1$ in einem Fluss mit Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}_2$. Es bewegt sich damit relativ zum Ufer mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_g = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.



Andererseits: Um sich relativ zum Ufer mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_g$ zu bewegen, muss es relativ zum Wasser mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_1 = \vec{v}_g - \vec{v}_2$ bewegen.

4.1.3 Multiplikation mit einer reellen Zahl

Wird ein Vektor $\vec{a}$ mit einer rellen Zahl λ multipliziert, so ist $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ ein Vektor mit dem Betrag $|\lambda||\vec{a}|$. Die Richtung ist parallel zu $\vec{a}$, falls $\lambda > 0$ und antiparallel dazu, falls $\lambda < 0$. Es gelten mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

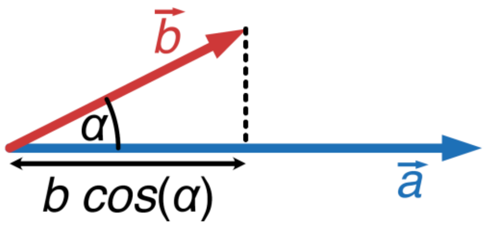
- das Assoziativgesetz: $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} = \lambda\mu\vec{a}$
- das Distributivgesetz: $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
  $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

4.1.4 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt (auch Punktprodukt oder inneres Produkt genannt) ordnet zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ eine reelle Zahl zu gemäß

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b|\cos\alpha\,,$$

dabei ist $\alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Das Ergebnis ist die Länge des einen Vektors multipliziert mit der Projektion des anderen Vektors auf den ersten.



Spezialfälle sind:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ falls $|\vec{a}| = 0$ oder $|\vec{b}| = 0$ oder $\vec{a} \perp \vec{b}$.
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$. Daraus folgt $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

Ein Vektor $\vec{a}$ kann normiert werden gemäß

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\,.$$

Der resultierende Vektor $\vec{a}_0$ ist ein Einheitsvektor, d.h. ein Vektor vom Betrag eins, in Richtung von $\vec{a}$.

Es gelten die folgenden Gesetze:

- Kommutativgesetz: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Distributivgesetz: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
- Bilinearität: $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

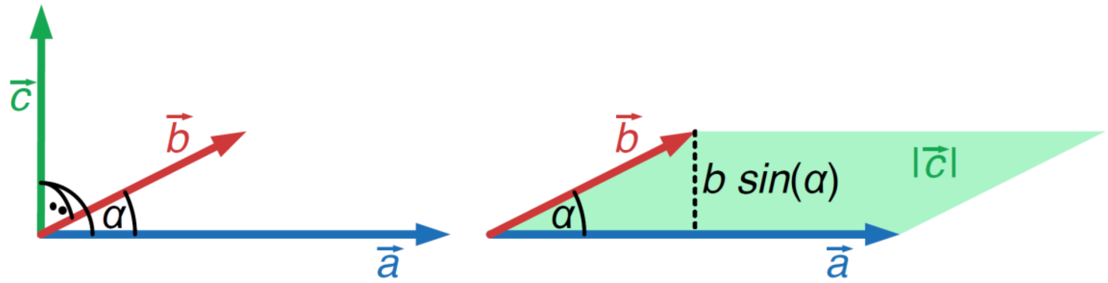
Ein Beispiel für das Auftreten des Skalarprodukts ist die Berechnung der Arbeit W bei der Verschiebung eines Körpers um den Weg $\vec{x}$ unter dem Einfluss der (konstanten) Kraft $\vec{F}$. Es gilt $W = \vec{F} \cdot \vec{x}$.

4.1.5 Vektorprodukt

Das Vektorprodukt (auch Kreuzprodukt oder äußeres Produkt genannt) ordnet zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ einen Vektor zu gemäß

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} .$$

Dabei gilt: $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\alpha$, der Vektor $\vec{c}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Rechtssystem (d.h. es gilt die Rechte-Hand-Regel: Zeigt der Daumen der rechten Hand in Richtung $\vec{a}$ und der abgespreizte Zeigefinger in Richtung $\vec{b}$, dann zeigt der rechtwinklig abgespreizte Mittelfinger in Richtung $\vec{c}$).



$|\vec{c}|$ ist die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

Spezialfälle sind:

- $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ falls $|\vec{a}| = 0$ oder $|\vec{b}| = 0$ oder $\vec{a} \parallel \vec{b}$.
- $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

Es gelten die folgenden Gesetze:

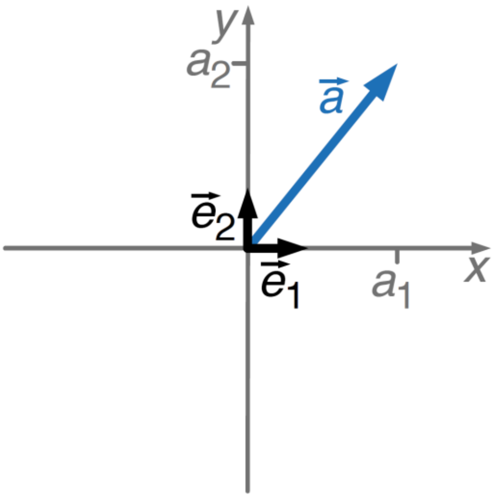
- Antikommutativgesetz: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- Distributivgesetz: $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- Bilinearität: $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

Beispiele für das Auftreten des Vektorprodukts sind das Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ und die Lorentzkraft $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$.

4.2 Komponentendarstellung

Vektoren können durch ihre Komponenten in einem Koordinatensystem dargestellt werden. Häufig verwendet man kartesische Koordinatensysteme.

Ein **zweidimensionales kartesisches Koordinatensystem** in der Ebene wird aufgespannt durch zwei orthogonale Einheitsvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ (oder $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$). Die Basisvektoren erfüllen die Eigenschaften $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$, $\quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$.

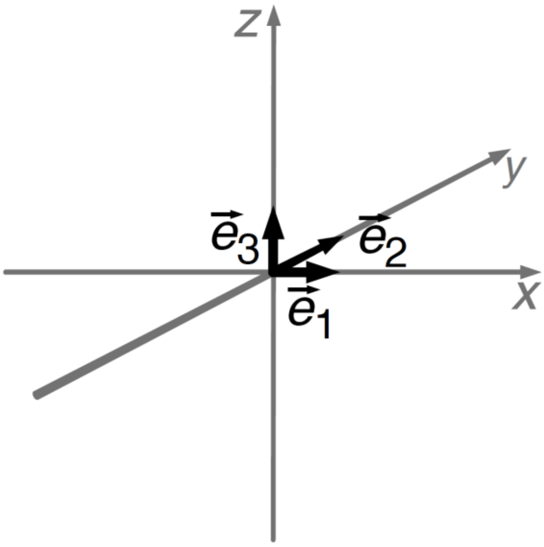


Ein beliebiger Vektor $\vec{a}$ kann geschrieben werden als

$$\vec{a} = a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad a_1 = \vec{a}\cdot\vec{e}_1\,, \quad a_2 = \vec{a}\cdot\vec{e}_2\,.$$

Ein **dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem** im Raum wird aufgespannt durch drei orthogonale Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ (oder $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$). Die Basisvektoren erfüllen die Eigenschaften

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i = j \\ 0 & \text{falls} \quad i \neq j \end{cases} \qquad\qquad \begin{aligned} \vec{e}_3 &= \vec{e}_1\times\vec{e}_2 \\ \vec{e}_1 &= \vec{e}_2\times\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 &= \vec{e}_3\times\vec{e}_1 \end{aligned}$$



Ein beliebiger Vektor $\vec{a}$ kann geschrieben werden als

$$\vec{a} = a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad a_i = \vec{a}\cdot\vec{e}_i \quad .$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1)\vec{e}_1+(a_2+b_2)\vec{e}_2+(a_3+b_3)\vec{e}_3=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}$$

$$\lambda\vec{a}=\lambda a_1\vec{e}_1+\lambda a_2\vec{e}_2+\lambda a_3\vec{e}_3=\begin{pmatrix}\lambda a_1\\\lambda a_2\\\lambda a_3\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3)\cdot(b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3)\times(b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3)\\&=a_1b_2\,\vec{e}_1\times\vec{e}_2+a_1b_3\,\vec{e}_1\times\vec{e}_3+a_2b_1\,\vec{e}_2\times\vec{e}_1+a_2b_3\,\vec{e}_2\times\vec{e}_3+a_3b_1\,\vec{e}_3\times\vec{e}_1+a_3b_2\,\vec{e}_3\times\vec{e}_2\\&=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{e}_3\end{aligned}$$

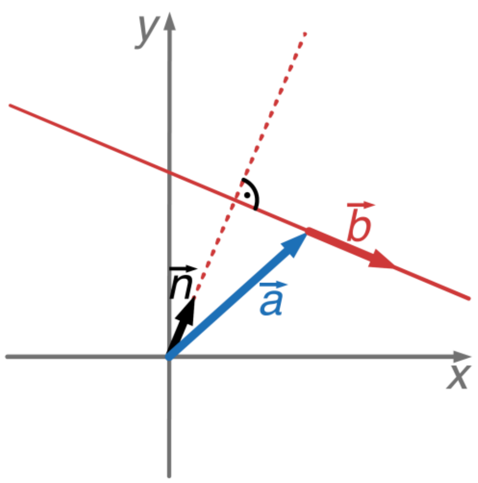
$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$

4.3 Geraden- und Ebenengleichungen

Geraden und Ebenen können auf verschiedene Arten dargestellt werden. Die **Parameterdarstellung einer Geraden** (sowohl im zwei- als auch im dreidimensionalen Fall) lautet

$$\vec{r}=\vec{a}+\lambda\vec{b}\,,\quad \lambda\in\mathbb{R}\,.$$

Dabei ist $\vec{a}$ ein beliebiger Vektor vom Ursprung zur Geraden, $\vec{b}$ ein beliebiger Richtungsvektor entlang der Geraden und λ ein Parameter. Durchläuft λ alle reelle Zahlen, so durchläuft $\vec{r}$ alle Punkte der Geraden.



Entsprechend lautet die **Parameterdarstellung einer Ebene** im dreidimensionalen Raum

$$\vec{r}=\vec{a}+\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}\,,\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}\,.$$

Dabei ist $\vec{a}$ ein beliebiger Vektor vom Ursprung zur Ebene, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind zwei beliebige, nicht-parallele Richtungsvektoren in der Ebene und λ und μ sind zwei Parameter. Durchlaufen λ und μ alle reelle Zahlen, so durchläuft $\vec{r}$ alle Punkte der Ebene.

Alternativ können eine Gerade im zweidimensionalen Raum und eine Ebene im dreidimensionalen Raum auch in parameterfreier Form in der **Normalenform** angegeben werden. Diese lautet

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{a} = d \ .$$

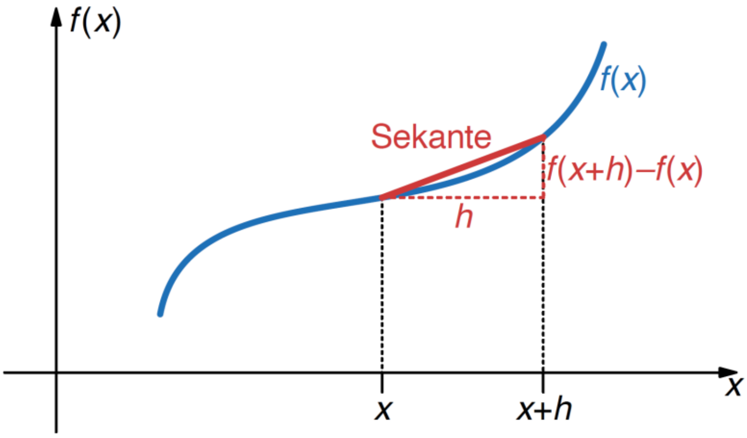
Dabei ist der Normalenvektor $\vec{n}$ ein Einheitsvektor, der senkrecht auf der Geraden bzw. der Ebene steht, $\vec{a}$ ein beliebiger Vektor vom Ursprung zu einem Punkt auf der Geraden bzw. Ebene und d der Abstand der Geraden bzw. der Ebene vom Ursprung.

5. Differentialrechnung

Eine Funktion stellt einen Zusammenhang zwischen zwei Größen her. Häufig ist man nicht nur am direkten Zusammenhang interessiert, sondern z.B. auch an der Frage, wie stark ändert sich der Funktionswert bei einer Änderung des Arguments. Beispielsweise beschreibt die lokale Änderung bei einem Höhenprofil die Steigung und bei einem Weg-Zeit-Diagramm die Geschwindigkeit. Aussagen über die lokale Änderung von Funktionen ermöglicht die Differentialrechnung.

5.1 Ableitung einer Funktion

Wir betrachten die Änderung des Funktionswerts bei einer „kleinen" Veränderung des Arguments von x auf $x+h$. Hierzu nähern wir die Funktion zwischen den beiden Punkten $(x, f(x))$ und $(x+h, f(x+h))$ durch eine Gerade, die so genannte **Sekante,** an. Die Steigung der Sekante, $f^h(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, ist ein Maß für die Änderung der Funktion im Intervall $(x, x+h)$.



Um ein lokales Maß an der Stelle x zu erhalten, lassen wir h immer kleiner werden und betrachten den Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} f^h(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) = \frac{df}{dx},$$

(wobei wir angenommen haben, dass der Grenzwert existiert und eindeutig ist). $f'(x)$ heißt **1. Ableitung** von $f(x)$, die Gerade durch den Punkt $(x, f(x))$ mit der Steigung $f'(x)$ heißt **Tangente**. Die Ableitungen der meisten elementaren Funktionen lassen sich direkt aus dieser Definition berechnen.

5.2 Ableitungen wichtiger Funktionen

5.2.1 Gerade

$$f(x) = ax + b$$

$$f^h(x) = \frac{a(x+h)+b-ax-b}{h} = a$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} f^h(x) = a\,.$$

5.2.2 Parabel

$$f(x) = x^2$$

$$f^h(x) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} f^h(x) = 2x\,.$$

5.2.3 n-te Potenz

$$f(x) = x^n$$

$$f^h(x) = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 \ldots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h \ldots + nxh^{n-2} + h^{n-1}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} f^h(x) = nx^{n-1}\,.$$

5.2.4 Wurzelfunktion

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f^h(x) = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}\,\frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} f^h(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{für} \quad x \neq 0\,.$$

Die Ableitung existiert nicht für $x = 0$.

Allgemein gilt für beliebige $a \in \mathbb{R}$: $f(x) = x^a \quad \Rightarrow \quad f'(x) = ax^{a-1}$.

5.2.5 Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x$$

$$f^h(x) = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x\,\frac{e^h - 1}{h}$$

Den Grenzwert berechnet man am Einfachsten aus der Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion. Es gilt (hier ohne Beweis, genaueres in der Physik I)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$$

Daraus folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\left[1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} + \dots\right] = 1\,,$$

und damit

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} f^h(x) = e^x\,.$$

Alternativ kann man auch die Bedingung $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ als Definitionsgleichung für die Eulersche Zahl *e* ansehen. Die Exponentialfunktion ist die einzige Funktion, deren Ableitung identisch mit der Funktion selbst ist.

5.2.6 Sinusfunktion

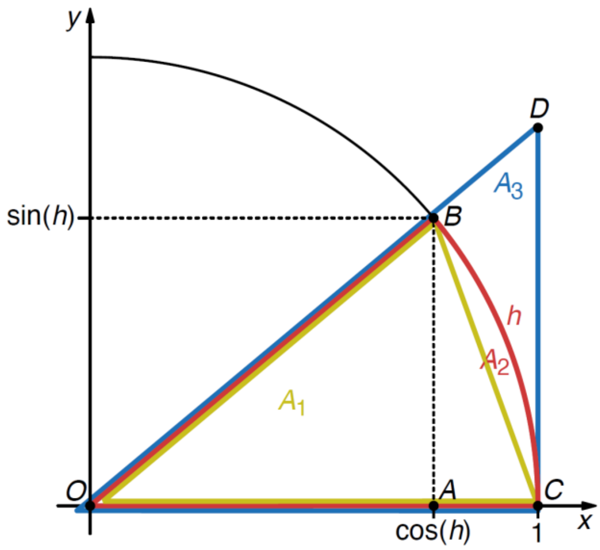
$$f(x) = \sin x$$

$$f^h(x) = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}$$

Die beiden Grenzwerte kann man wiederum aus Potenzreihendarstellungen gewinnen. Man kann sie aber auch aus geometrischen Überlegungen am Einheitskreis (s. Kap. 3.2) bestimmen.

Dazu vergleichen wir die Flächen A_1 des Dreiecks OCB, A_2 des Kreissegments OCB und A_3 des Dreiecks OCD.



Offensichtlich gilt

$$A_1 \le A_2 \le A_3.$$

Andererseits ist

$$A_1 = \frac{1}{2}\sin h$$

$$A_2 = \pi \frac{h}{2\pi} = \frac{h}{2}$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\tan h$$

Damit folgt nach Division durch A_1

$$1 \le \frac{h}{\sin h} \le \frac{1}{\cos h} \quad \text{bzw.} \quad 1 \ge \frac{\sin h}{h} \ge \cos h .$$

Für $h \to 0$ geht $\cos h \to 1$, und somit folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 .$$

Den zweiten Grenzwert kann man unter Verwendung des Additionstheorems $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ (s. Kap. 3.3) auf den erste zurückführen. Es gilt

$$\frac{\cos h - 1}{h} = -\frac{2\sin^2 \frac{h}{2}}{h} = -\left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2 \frac{h}{2}$$

und deshalb

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0 .$$

Somit erhält man die Ableitung

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} f^h(x) = \cos x .$$

Analog gilt

$$f(x) = \cos x$$

$$f^h(x) = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$$

$$= \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h}$$

$$f'(x) = -\sin x$$

5.3 Rechenregeln für Ableitungen

5.3.1 Faktorregel

$$f(x) = c\, u(x)$$

$$f^h(x) = \frac{c\, u(x+h) - c\, u(x)}{h} = c\, u^h(x)$$

$$f'(x) = c u'(x)$$

5.3.2 Summenregel

$$f(x) = a(x) + b(x)$$

$$f^h(x) = \frac{a(x+h) + b(x+h) - a(x) - b(x)}{h}$$

$$= \frac{a(x+h) - a(x)}{h} + \frac{b(x+h) - b(x)}{h} = a^h(x) + b^h(x)$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} f^h(x) = a'(x) + b'(x)$$

Beispiel: Polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1$$

5.3.3 Produktregel

$$f(x) = u(x) v(x)$$

$$f^h(x) = \frac{u(x+h) v(x+h) - u(x) v(x)}{h}$$

$$= \frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x+h) + u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

mit $\lim_{h \to 0} v(x+h) = v(x)$:

$$f'(x) = u'(x) v(x) + u(x) v'(x)$$

Beispiel:

$$f(x) = x \sin x$$

$$f'(x) = \sin x + x \cos x$$

5.3.4 Kettenregel

$$f(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x))$$

$$f^h(x) = \frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{h}$$

$$= \frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{v(x+h) - v(x)} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

$$f'(x) = u'(v(x)) v'(x)$$

Beispiel:

$$f(x) = \sin\left(x^2\right) \quad \Rightarrow \quad u(x) = \sin x, \quad v(x) = x^2$$

$$f'(x) = \cos\left(x^2\right) \cdot 2x$$

5.3.5 Quotientenregel

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$$

mit Produkt- und Kettenregel folgt

$$f(x)=u(x)\frac{1}{v(x)}$$

$$f'(x)=u'(x)\frac{1}{v(x)}+u(x)\frac{-1}{v^2(x)}v'(x)$$

$$=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

Beispiel:

$$f(x)=\frac{x+2}{x+3}$$

$$f'(x)=\frac{(x+3)-(x+2)}{(x+3)^2}=\frac{1}{(x+3)^2}$$

5.3.6 Umkehrregel

Gemäß Kap 1.1 ist die Umkehrfunktion $\bar{f}(x)$ einer Funktion $f(x)$ definiert durch $f(\bar{f}(x))=x$. Diese Gleichung kann mit Hilfe der Kettenregel abgeleitet werden, und man erhält

$$f'(\bar{f}(x))\,\bar{f}'(x)=1.$$

Damit folgt

$$\bar{f}'(x)=\frac{1}{f'(\bar{f}(x))}.$$

Beispiele: Die Logarithmusfunktion $\bar{f}(x)=\ln x$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f(x)=e^x$. Mit $f(\bar{f}(x))=e^{\ln x}$ ist dann $f'(\bar{f}(x))=e^{\ln x}=x$. Damit ist die Ableitung der Logarithmusfunktion

$$\bar{f}'(x)=\frac{1}{x}.$$

Die Wurzelfunktion $\bar{f}(x)=\sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion der Parabel $f(x)=x^2$ (für $x\geq 0$). Mit $f(\bar{f}(x))=(\sqrt{x})^2$ ist dann $f'(\bar{f}(x))=2\sqrt{x}$. Damit ist die Ableitung der Wurzelfunktion

$$\bar{f}'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\quad\text{(s.o.).}$$

5.3.7 Differenzierbarkeit

Damit eine Funktion $f(x)$ an der Stelle x differenzierbar ist, muss der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (*)$$

existieren und eindeutig sein. Dies erfordert

1. $f(x)$ muss an der Stelle x eindeutig sein, d.h. $f(x)$ muss an der entsprechenden Stelle stetig sein. An einer Polstelle ist die Funktion nicht differenzierbar.
2. Der Grenzwert (*) darf nicht divergieren. So ist z.B. die Wurzelfunktion $f(x)=\sqrt{x}$ an der Stelle $x=0$ nicht differenzierbar.
3. Der Grenzwert muss eindeutig sein, er muss insbesondere unabhängig vom Vorzeichen von *h* sein. So ist z.B. die Betragsfunktion $f(x)=|x|$ an der Stelle $x=0$ nicht differenzierbar, denn es gilt
$$\lim_{h\to 0}\frac{|h|-0}{h}=\begin{cases}1 & \text{für} \quad h>0\\ -1 & \quad\quad\;\; h<0\end{cases}.$$
Dieser Fall tritt häufig auch bei stückweise definierten Funktionen auf.

5.4 Höhere Ableitungen

Höhere Ableitungen werden als Ableitung der um eins reduzierten Ableitung definiert. Die zweite Ableitung ist somit defniert als

$$f''(x)=f^{(2)}(x)=\frac{d^2 f}{dx^2}=\frac{d}{dx}\frac{df}{dx}=(f')'(x).$$

Die *n*-te Ableitung ist definiert als

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^n f}{dx^n}=\frac{d}{dx}\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}=\left(f^{(n-1)}\right)'(x).$$

Beispiele:

- Die *n*-te Ableitung einer Potenzfunktion $f(x)=x^m$ ist
$$f^{(n)}(x)=m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)x^{m-n} \quad \text{für} \quad n\le m,$$
$$f^{(n)}(x)=0 \quad \text{für} \quad n>m.$$
- Die *n*-te Ableitung der Exponentialfunktion $f(x)=e^x$ ist
$$f^{(n)}(x)=e^x.$$

Für die höheren Ableitungen gelten die Aussagen aus Kap. 5.3.6 zur Existenz von Ableitungen analog.

5.5 Kurvendiskussion

Eine Funktion wird charakterisiert durch spezielle Punkte. Dazu gehören insbesondere Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte sowie ggf. Polstellen. Weiterhin untersucht man Symmetrien, das (asymptotische) Verhalten für $x\to\pm\infty$ sowie im Bereich von Polstellen.

An **Nullstellen** gilt $f(x)=0$.

An **Extremwerten** gilt als notwendige Bedingung $f'(x)=0$. Ein Maximum liegt vor, wenn die Steigung vor dem Extremwert positiv und danach negativ ist, d.h. falls $f''(x)<0$. Ein Minimum entsprechend falls $f''(x)>0$. Falls $f''(x)=0$ und $f'''(x)\neq 0$ ist, handelt es sich um einen Sattelpunkt.

Bei einem **Wendepunkt** gilt $f''(x)=0$ und $f'''(x)\neq 0$.

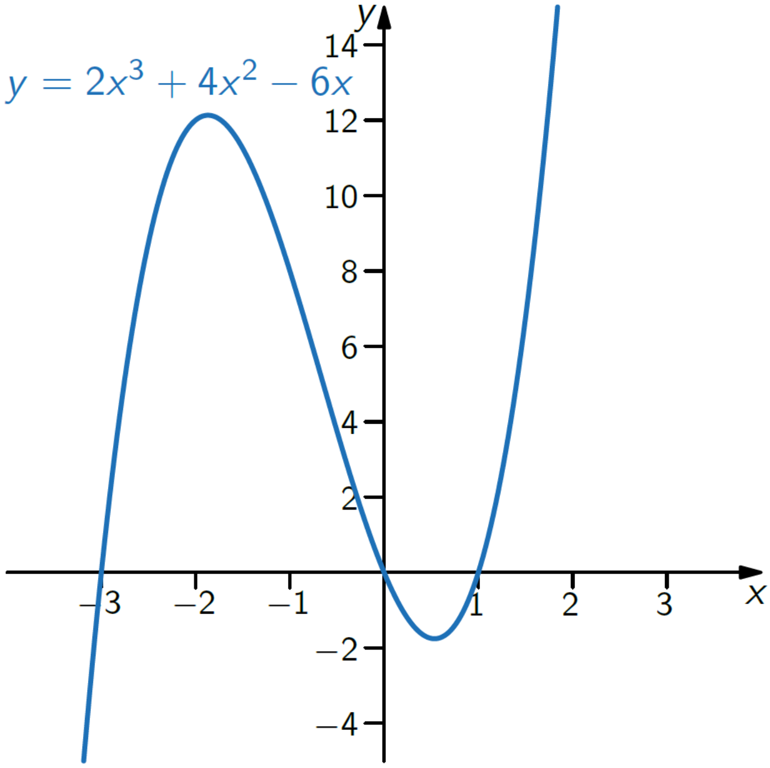
An **Polstellen** divergiert die Funktion, und man untersucht, ob sie davor bzw. danach nach $+\infty$ oder $-\infty$ geht.

Beim **Verhalten im Unendlichen** unterscheidet man, ob die Funktion gegen $\pm\infty$ geht oder ob sie asymptotisch gegen einen Grenzwert strebt.

Als Beispiel betrachten wir die Funktion $f(x)=2x^3+4x^2-6x$:

- **Ableitungen:** Die ersten drei Ableitungen lauten
  $$f'(x)=6x^2+8x-6$$
  $$f''(x)=12x+8$$
  $$f'''(x)=12$$
- **Nullstellen:** Eine Nullstelle ist $x_1=0$. Die weiteren folgen aus
  $$2x^2+4x-6=0 \quad \text{bzw.} \quad x^2+2x-3=0$$
  $$x_{2,3}=-1\pm\sqrt{1+3}=\begin{cases}1\\-3\end{cases}$$
- **Extremwerte:** Die Extremwerte folgen aus
  $$f'(x)=6x^2+8x-6=0 \quad \text{bzw.} \quad x^2+\tfrac{4}{3}x-1=0$$
  $$x_{E1,E2}=-\tfrac{2}{3}\pm\sqrt{\tfrac{4}{9}+1}=-\tfrac{2}{3}\pm\sqrt{\tfrac{13}{9}}$$
  $$=-\tfrac{1}{3}\left(2\mp\sqrt{13}\right)$$
  Die zweite Ableitung ist an diesen stellen
  $$f''\left(x_{E1,E2}\right)=-4\left(2\mp\sqrt{13}\right)+8$$
  $$=\pm4\sqrt{13} \quad \begin{cases}>0\\<0\end{cases}$$
  Bei $x_{E1}=-\tfrac{1}{3}\left(2-\sqrt{13}\right)\approx 0{,}535$ hat die Kurve ein Minimum, bei $x_{E2}=-\tfrac{1}{3}\left(2+\sqrt{13}\right)\approx -1{,}869$ ein Maximum.
- **Wendepunkte:** Die Kurve hat einen Wendepunkt bei
  $$f''(x)=12x+8=0$$
  $$x_W=-\tfrac{2}{3} \quad \text{mit} \quad f'''(x_W)\neq 0$$
- Als Polynomfunktion hat die Funktion **keine Polstellen**.

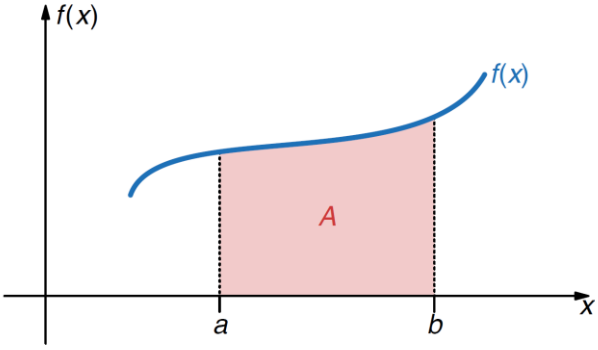
- Die Funktion geht für $x \to \infty$ gegen ∞ und für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$.
- Für kleine Werte von x verhält sich die Funktion wie die Gerade $f(x) \approx -6x$.
- Die Funktion ist **nicht achsensymmetrisch** bzgl. der y-Achse und **nicht punktsymmetrisch** bzgl. des Ursprungs, da das Polynom sowohl gerade als auch ungerade Potenzen enthält.
- Wie jedes Polynom dritten Grades ist die Funktion **punktsymmetrisch bzgl. des Wendepunkts**.



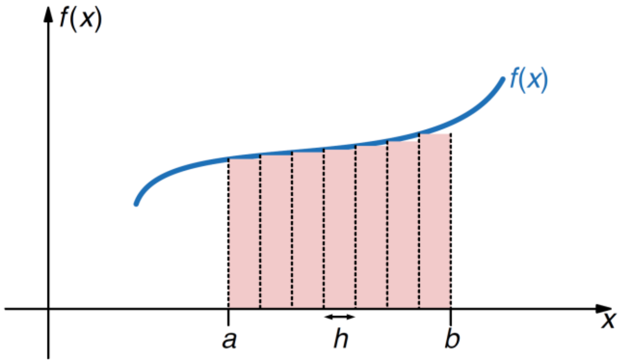
6. Integralrechnung

6.1 Flächenberechnung

Eine Grundaufgabe der Integralrechnung besteht darin, für ein Intervall $a \le x \le b$ den Flächeninhalt unterhalb eine Kurve zu bestimmen.



Hierzu kann man die Fläche annähern, indem man sie in Rechtecke zerlegt. Wir zerlegen das Intervall $[a,b]$ in n Intervalle der Breite $h = \dfrac{b-a}{n}$. Die Anfangs- und Endpunkte liegen dann bei $x_j = a + j\,h$, $\quad j = 0,\ldots,n$ und es gilt $x_0 = a$ und $x_n = b$.



Der Inhalt der angenäherten Fläche ist dann gegeben als die Summe über die Rechtecke mit Breite h und Höhe $f\left(x_j\right)$, $j = 0,\ldots,n-1$, d.h.

$$A_f^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} f\left(x_j\right) \cdot h\,.$$

Läßt man die Breite h gegen null gehen (und entsprechend die Anzahl n gegen unendlich), so nähert sich die Fläche $A_f^{(n)}$ der gesuchten Fläche an, d.h. es gilt

$$A_f = \lim_{n\to\infty} A_f^{(n)}$$

und man schreibt

$$A_f = \int_a^b f\left(x\right) dx\,.$$

Man nennt A_f auch das **Integral** von $f(x)$ über das Intervall $[a,b]$.

Streng genommen stimmt das Integral nur dann mit der Fläche überein, falls im gesamten Intervall $[a,b]$ die Funktion nicht negativ ist, d.h. $f(x) \geq 0$. Allgemein bezeichnet man die durch das Integral bestimmte Größe A_f als den **orientierten Flächeninhalt**. Dieser ist negativ, falls $f(x) < 0$ im gesamten Integrationsbereich, und falls $f(x)$ Nullstellen im betrachteten Intervall hat, kompensieren sich verschiedene Teilflächen. Die tatsächliche Fläche zwischen der Kurve und der *x*-Achse erhält man durch

$$\tilde{A}_f = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \left| f(x_j) \right| \cdot h = \int_a^b \left| f(x) \right| dx .$$

Wir betrachten im Folgenden immer den orientierten Flächeninhalt.

Als Beispiel für die Berechnung eines Integrals betrachten wir die lineare Funktion $f(x) = x$. Es gilt dann

$$A_f^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} x_j\, h = \sum_{j=0}^{n-1} (a + jh) h = ah \sum_{j=0}^{n-1} 1 + h^2 \sum_{j=0}^{n-1} j .$$

Die erste Summe ist offensichtlich die Anzahl der Summanden, also *n*. Die zweite Summe erhält man aus

$$\begin{aligned} s = \sum_{j=0}^{n-1} j &= 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) \\ &= (n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots + 1 + 0 . \end{aligned}$$

Addition der beiden äquivalenten Formen ergibt

$$\begin{aligned} 2s &= (n-1) + (n-1) + \cdots (n-1) + (n-1) \\ &= n(n-1) \end{aligned}$$

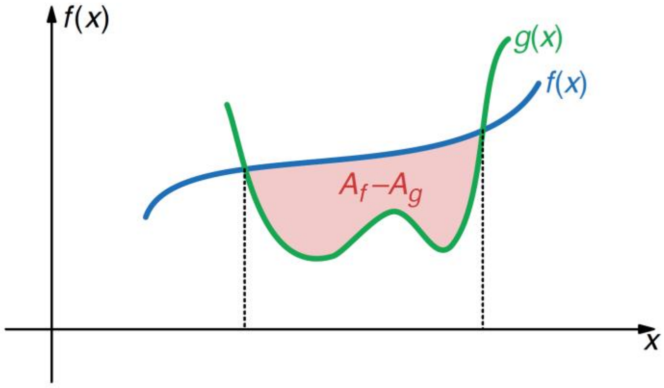
bzw. $s = \frac{n(n-1)}{2}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} A_f^{(n)} &= ah \cdot n + h^2 \, \frac{n(n-1)}{2} \\ &= a \frac{b-a}{n} n + \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \frac{n^2 - n}{2} \\ &= a(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 \left(1 - \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} A_f = \lim_{n\to\infty} A_f^{(n)} = \int_a^b x\, dx &= \lim_{n\to\infty} \left[a(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] \\ &= a(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 \\ &= \frac{1}{2}(b-a)(b+a) . \end{aligned}$$

Interessiert man sich für den (orientierten) Flächeninhalt zwischen zwei Kurven $g(x)$ und $f(x)$, so erhält man diesen als die Differenz zwischen den (orientierten) Flächeninhalten unterhalb den beiden Kurven gemäß $A = A_f - A_g$.



6.2 Integralfunktion und Stammfunktion

Betrachtet man das Integral als Funktion der oberen Grenze, so bezeichnet man diese Funktion als die **Integralfunktion**

$$F_a(t) = \int_a^t f(x)\,dx .$$

Für $a < b < t$ kann die Integration über das gesamte Intervall zerlegt werden in eine Integration über das Intervall von *a* bis *b* und eine über das Intervall von *b* bis *t*. Es gilt dann

$$F_a(t) = F_a(b) + F_b(t)$$

und damit

$$F_b(t) = F_a(t) - F_a(b) .$$

Mit $h = \frac{t-a}{n}$ gilt

$$F_a^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \cdot h ,$$

$$F_a^{(n)}(t+h) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \cdot h = F_a^{(n)}(t) + f(x_n) \cdot h ,$$

und damit

$$\frac{F_a^{(n)}(t+h) - F_a^{(n)}(t)}{h} = f(x_n) = f(t) .$$

Daraus folgt

$$F_a'(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{F_a^{(n)}(t+h) - F_a^{(n)}(t)}{h} = f(t) ,$$

d.h., die Ableitung der Integralfunktion $F_a(t)$ ist die Integrandenfunktion $f(t)$. Eine Funktion $F(x)$ mit der Eigenschaft $F'(x) = f(x)$ heißt **Stammfunktion** von $f(x)$. Stammfunktionen unterscheiden sich nur durch eine Konstante, denn mit $G(x) + c = F(x)$ folgt $G'(x) = F'(x) = f(x)$.

$\int f(x)\,dx$ heißt **unbestimmtes Integral**, $\int_a^b f(x)\,dx$ heißt **bestimmtes Integral**.

Aus einer beliebigen Stammfunktion $F(x)$ lässt sich die Integralfunktion $F_a(x)$ bzw. das bestimmte Integral $F_a(b)$ berechnen gemäß

$$F_a(x) = F(x) - F(a),$$
$$F_a(b) = F(b) - F(a).$$

Die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad \text{mit} \qquad F'(x) = f(x)$$

wird als **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** bezeichnet. Er stellt den Zusammenhang zwischen diesen beiden Gebieten her.

6.3 Stammfunktionen wichtiger Funktionen

$f(x)$	$F(x)$
x^a	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} \qquad a \neq 1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$\ln x$	$x \ln x - x$

Die ersten 5 Zeilen folgen direkt aus Kap. 5. Die letzten beiden sieht man wie folgt:

$$\text{für}\quad \cos x > 0: \quad \left(-\ln(\cos x)\right)' = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x) = \tan x\,,$$

$$\text{für}\quad \cos x < 0: \quad \left(-\ln(-\cos x)\right)' = -\frac{1}{-\cos x}\sin x = \tan x\,,$$

$$(x\ln x - x)' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1 = \ln x\,.$$

6.4 Integrationstechniken

6.4.1 Faktor- und Summenregel

Die Faktor- und die Summenregel übertragen sich direkt von der Differential- auf die Integralrechnung, d.h. es gilt

$$\int \left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right) dx = \lambda \int f(x)\,dx + \mu \int g(x)\,dx = \lambda F(x) + \mu G(x)\,.$$

Dies folgt beispielsweise direkt aus der Definition des Integrals als Grenzwert einer Summe.

6.4.2 Partielle Integration

Bei der partiellen Integration handelt es sich um die Umkehrung der Produktregel. Sie ist anwendbar auf Funktionen der Form $f(x) = u'(x)v(x)$.

Nach der Produktregel gilt

$$\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\,.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\int u'(x)v(x)\,dx &= \int \left(u(x)v(x)\right)' dx - \int u(x)v'(x)\,dx \\ &= u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Somit wird die Ableitung von der Funktion $u(x)$ auf die Funktion $v(x)$ übergewälzt. Dies ist natürlich nur dann sinnvoll, wenn das daraus entstehende Integral leichter zu berechnen ist als das Ausgangsintegral.

Beispiele:

- $u'(x) = 1, \quad v(x) = \ln x$

  $u(x) = x, \quad v'(x) = \frac{1}{x}$

  damit folgt

  $$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= x\ln x - x\end{aligned}$$

- $u'(x) = \sin x, \quad v(x) = x$
  $u(x) = -\cos x, \quad v'(x) = 1$
  damit folgt
  $$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx$$
  $$= \sin x - x \cos x$$

6.4.3 Substitutionsregel

Die Substitutionsregel ist die Umkehrung der Kettenregel. Aus

$$\left(u\left(v(x)\right)\right)' = u'\left(v(x)\right) v'(x)$$

folgt

$$\int u'\left(v(x)\right) v'(x) \, dx = u\left(v(x)\right)$$

bzw.

$$\int f\left(v(x)\right) v'(x) \, dx = F\left(v(x)\right)$$

Dabei ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

Beispiele:

- Gesucht ist $\int (ax+b)^n \, dx$. Wir setzen
  $$\begin{aligned} ax+b &= v(x) \\ a &= v'(x) \\ f(x) &= x^n \\ F(x) &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \end{aligned}$$
  Dann gilt
  $$\int (ax+b)^n \, dx = \frac{1}{a} \int \underbrace{(ax+b)^n}_{f(v(x))} \underbrace{a}_{v'(x)} \, dx$$
  $$= \frac{1}{a} \underbrace{\frac{1}{n+1} (ax+b)^{n+1}}_{F(v(x))}.$$

- Gesucht ist $\int \left(ax^2+b\right)^n x \, dx$. Wir setzen
  $$\begin{aligned} ax^2+b &= v(x) \\ 2ax &= v'(x) \\ f(x) &= x^n \\ F(x) &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \end{aligned}$$
  Dann gilt
  $$\int \left(ax^2+b\right)^n x \, dx = \frac{1}{2a} \int \left(ax^2+b\right)^n 2ax \, dx$$
  $$= \frac{1}{2a(n+1)} \left(ax^2+b\right)^{n+1}.$$

6.5 Uneigentliche Integrale

Ein uneigentliches Integral ist ein Integral, das in Form eines Grenzwerts definiert ist, unter der Voraussetzung, dass der Grenzwert existiert. Es gibt zwei grundlegende Fälle von uneigentlichen Integralen.

6.5.1 Integrale über ein unendliches Integrationsintervall

Das Integral ist definiert durch

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

Beispiele:

- $$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b$$
  $$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1$$
  Das Integral existiert.
- $$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\ln x\right]_1^b$$
  $$= \lim_{b\to\infty}\left(\ln b\right) \to \infty$$
  Das Integral existiert nicht.

6.5.2 Integrale über eine Polstelle

Befindet sich bei $x = a$ eine Polstelle, dann definiert man für $b > a$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

und für $c < a < b$:

$$\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_c^{a-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{a+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx\,.$$

Zu beachten ist, dass im zweiten Fall die beiden Grenzwerte getrennt zu berechnen sind.

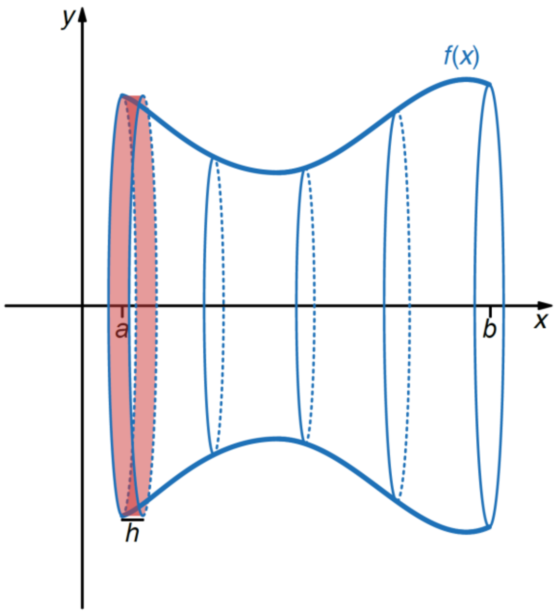
Beispiele:

- $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1$$
  $$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2$$
  Das Integral existiert.

- $$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1$$
  $$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\to\infty$$
  Das Integral existiert nicht.

6.6 Volumen von Rotationskörpern

Ein Rotationskörper wird dadurch erzeugt, dass eine Funktion $f(x)$ mit $a \le x \le b$ um die *x*-Achse rotiert. Gesucht ist das Volumen dieses Körpers.



Das Vorgehen zur Berechnung des Volumens ist analog zur Flächenberechnung in Kap. 6.1. Das Intervall $a \le x \le b$ wird in n Intervalle der Länge $h = \frac{b-a}{n}$ zerlegt. Im Intervall $x_j \le x \le x_j + h$ mit $x_j = a + jh,\ j = 0,\ldots,n-1$ wird der Körper durch einen Zylinder mit Radius $f(x_j)$ und Höhe h angenähert. Das Volumen dieses Zylinders beträgt $\pi\left(f(x_j)\right)^2 h$. Das Gesamtvolumen bei dieser Zerlegung beträgt dann

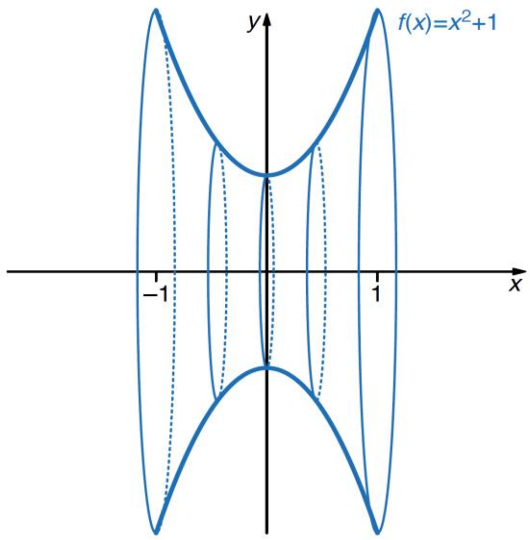
$$V_n = \sum_{j=0}^{n-1} \pi\left(f(x_j)\right)^2 h.$$

Das Volumen des Rotationskörpers ergibt sich dann durch den Übergang zum Integral als

$$V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx.$$

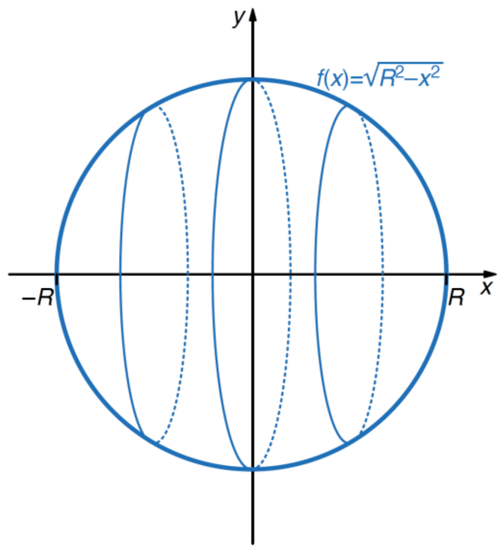
Beispiele:

- $f(x) = x^2 + 1, \quad a = -1, \quad b = 1$



$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left(x^4 + 2x^2 + 1\right) dx$$
$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right]_{-1}^{1}$$
$$= 2\pi \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{56\pi}{15}.$$

- $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad a = -R, \quad b = R$



$$V = \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx$$
$$= \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{R}$$
$$= 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4\pi}{3} R^3 .$$

6.7 Doppelintegrale

Der Integrand eines Integrals kann auch selbst wieder eine Integralfunktion sein. In diesem Fall hat man es mit einem Doppelintegral der Form

$$\int_a^b \left[\int_a^t f(x)\, dx \right] dt$$

zu tun. Ein Beispiel ist die Berechnung des Orts eines Teilchens der Masse *m*, das sich eindimensional unter dem Einfluss einer (i. allg. zeitabhängigen) Kraft $F(t)$ bewegt. Gemäß der Newtonschen Bewegungsgleichung gilt $ma(t) = F(t)$ mit der Beschleunigung $a(t)$. Dabei ist $a(t)$ die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit $v(t)$, d.h. $a(t) = \frac{dv}{dt}$, und $v(t)$ die zeitliche Änderung des Orts $x(t)$, d.h. $v(t) = \frac{dx}{dt}$. Für den Ort zur Zeit *t* gilt dann

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^t v(t')\,dt' + x_0 \\
&= \int_0^t \left[\int_0^{t'} a(t'')\,dt'' + v_0 \right] dt' + x_0 \\
&= \int_0^t \left[\frac{1}{m} \int_0^{t'} F(t'')\,dt'' + v_0 \right] dt' + x_0 \,.
\end{aligned}
$$

Dabei sind x_0 und v_0 Ort und Geschwindigkeit des Teilchens zur Zeit $t = 0$. Speziell im Fall einer konstanten Kraft $F(t) = F = \text{const.}$ gilt dann

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^t \left[\frac{1}{m} \int_0^{t'} F\,dt'' + v_0 \right] dt' + x_0 \\
&= \int_0^t \left[\frac{F}{m} t' + v_0 \right] dt' + x_0 \\
&= \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 + v_0 t + x_0 \,.
\end{aligned}
$$

6.8 Faltungen

Eine Faltung ist ein spezielles Integral über zwei Funktionen der Form

$$
h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy = (f * g)(x) \,.
$$

Es tritt häufig bei der Analyse von Messungen auf, die mit einer Messapparatur mit begrenzter Auflösung durchgeführt wurde. So könnte z.B. $f(x)$ das Höhenprofil einer Oberfläche sein, $g(x)$ die Auflösungsfunktion eines Mikroskops und $h(x)$ das gemessene Profil. Ebenso könnte $f(t)$ ein Zeitsignal sein, $g(t)$ die zeitliche Auflösungsfunktion eines Detektors und $h(t)$ das gemessene Signal.

Wir betrachten im Folgenden der Einfachheit halber eine rechteckförmige Auflösungsfunktion

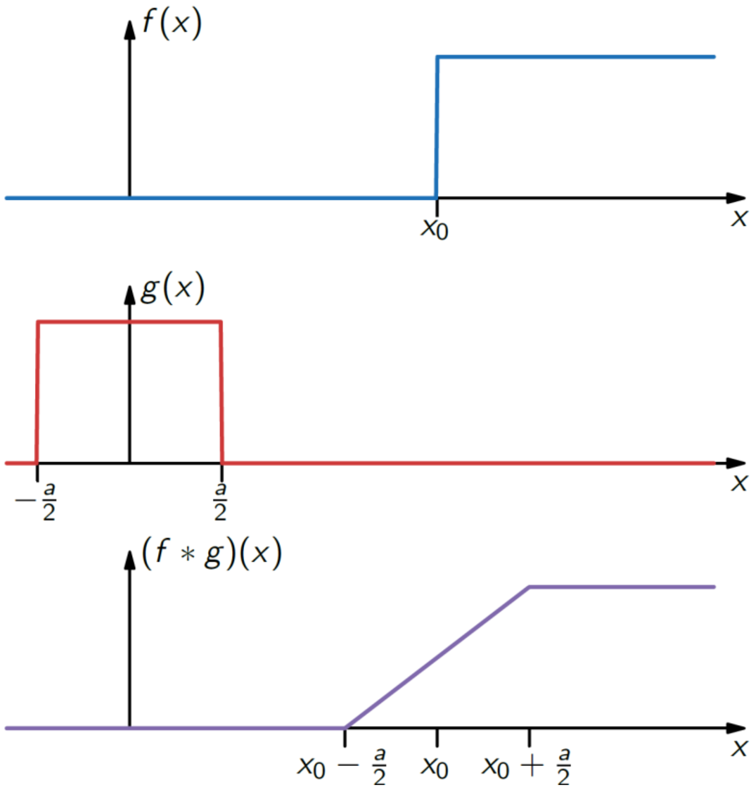
$$
g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & \text{für} \quad -\dfrac{a}{2} \le x \le \dfrac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
$$

Das Höhenprofil habe eine Stufe der Höhe h_0 an der Stelle x_0, d.h.

$$
f(x) = \begin{cases} 0 & \\ h_0 & \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} x < x_0 \\ x \ge x_0 \end{matrix}
$$

Der Integrand ist nur in dem Intervall von null verschieden, in dem $g(x-y) \neq 0$ ist. Damit folgt

$$h(x) = \frac{1}{a} \int_{x-\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}} f(y)\,dy = \begin{cases} 0 & \\ \frac{h_0}{a}\left(x - x_0 + \frac{a}{2}\right) & \text{für} \\ h_0 & \end{cases} \begin{matrix} x < x_0 - \frac{a}{2} \\ x_0 - \frac{a}{2} \leq x \leq x_0 + \frac{a}{2} \\ x > x_0 + \frac{a}{2} \end{matrix}$$



7. Differentialgleichungen

Differentialgleichungen spielen eine wichtige Rolle in der Physik. In vielen Gebieten haben die Grundgleichungen die Struktur von Differentialgleichungen, so z.B. in der Mechanik (Newtonsche Bewegungsgleichung), der Quantenmechanik (Schrödinger-Gleichung) und der Elektrodynamik (Maxwell-Gleichungen). Es gibt kein allgemeines Schema zur Lösung von Differentialgleichungen, es gibt lediglich Schemata für bestimmte Klassen von Differentialgleichungen. An dieser Stelle ist keine allgemeine mathematische Diskussion von Differentialgleichungen geplant, es soll lediglich ein erster Einblick gegeben werden in Differentialgleichungen, wie sie in der Mechanik auftreten.

7.1 Klassifizierung von Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind Gleichungen, die Ableitungen einer gesuchten Funktion $y = y(x)$ enthalten. Darüber hinaus können sie die Funktion $y(x)$ sowie die Variable x enthalten. Die höchste vorkommende Ableitung definiert die **Ordnung der Differentialgleichung**.

- Differentialgleichung 1. Ordnung

  $y' = f(y, x)$,

- Differentialgleichung 2. Ordnung

  $y'' = f(y, y', x)$,

- Differentialgleichung 3. Ordnung

  $y''' = f(y, y', y'', x)$.

Je nach Gestalt der rechten Seite gibt es noch weitere Klassifikationen, z.B. linear/nichtlinear, homogen/inhomogen, usw. Zur eindeutigen Festlegung der Lösung werden weitere Bedingungen benötigt, typischerweise sind dies **Anfangs- oder Randbedingungen**. Eine Differentialgleichung n-ter Ordnung benötigt in der Regel n Anfangs- oder Randbedingungen.

7.2 Differentialgleichungen in der Mechanik

7.2.1 Newtonsche Bewegungsgleichung

Eine Grundaufgabe der Mechanik ist die Berechnung der Bewegung von Körpern unter dem Einfluss von Kräften. Ausgangspunkt ist das 2. Newtonsche Gesetz, in Kurzform $\vec{F} = m\vec{a}$.

Dabei ist $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ die Beschleunigung, d.h. die zweite Ableitung des Ortsvektors.

Deshalb handelt es sich um eine Differentialgleichung 2. Ordnung für eine vektorwertige Funktion $\vec{r}(t)$. Wir beschänken uns hier auf eindimensionale Bewegungen. Dann haben wir

- den Ort des Körpers $x(t)$,
- die Geschwindigkeit $v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t)$,

- die Beschleunigung $a(t)=\frac{dv}{dt}=\dot{v}(t)=\ddot{x}(t)$.

(Ableitungen nach der Zeit werden in der Physik häufig durch einen Punkt über der Variablen bezeichnet.) Die Newtonsche Bewegungsgleichung lautet dann

$$m\ddot{x}(t)=F(x,\dot{x},t),$$

wobei angenommen wurde, dass die Kraft im Allgemeinen von Ort, Geschwindigkeit und der Zeit abhängen kann. Zur eindeutigen Lösung benötigt man zwei Bedingungen, in der Regel wählt man als Anfangsbedingungen die Geschwindigkeit $\dot{x}(0)=v_0$ und den Ort $x(0)=x_0$ zum Anfangszeitpunkt, der hier als $t=0$ gewählt wurde.

Falls die Kraft nicht explizit vom Ort abhängt, d.h. $F=F(\dot{x},t)=F(v,t)$, kann die Bewegungsgleichung auf eine Differentialgleichung erster Ordnung für die Geschwindigkeit reduziert werden,

$$m\dot{v}(t)=F(v,t).$$

Den Ort erhält man dann durch Integration gemäß $x(t)=x_0+\int_0^t v(t')\,dt'$.

Im Folgenden sollen einige Spezialfälle genauer betrachtet werden. Es sollte dabei ausdrücklich betont werden, dass beim Lösen von Differentialgleichungen das Erraten von Lösungen durchaus erlaubt ist. Man überlegt sich, welche Struktur könnte die Lösung haben, macht dann einen entsprechenden Ansatz und setzt diesen in die Differentialgleichung ein. Erfüllt er die Differentialgleichung, hat man eine Lösung gefunden.

7.2.2 Eindimensionale Spezialfälle

a) kräftefreie Bewegung: $F=0$

$$\dot{v}=0 \quad\rightarrow\quad v(t)=v_0$$
$$\dot{x}=v \quad\rightarrow\quad x(t)=v_0t+x_0$$

b) konstante Kraft: $F=\text{const.}$

$$\dot{v}=\frac{1}{m}F \quad\rightarrow\quad v(t)=\frac{1}{m}Ft+v_0$$
$$\dot{x}=v \quad\rightarrow\quad x(t)=\frac{1}{2m}Ft^2+v_0t+x_0$$

c) allgemeine zeitabhängige Kraft $F(t)$

$$\dot{v}=\frac{1}{m}F(t) \quad\rightarrow\quad v(t)=\frac{1}{m}\int_0^t F(t')\,dt+v_0$$
$$\dot{x}=v \quad\rightarrow\quad x(t)=\frac{1}{m}\int_0^t\left[\int_0^{t'}F(t'')\,dt''\right]dt'+v_0t+x_0 \qquad \text{(s. Kap. 6.7)}$$

d) geschwindigkeitsabhängige Kraft $F(v)$ (z.B. Reibungskraft, Lorentzkraft)

(i) Stokessche Reibung $F=-\alpha v$ (z.B. Bewegung in zäher Flüssigkeit)

$$\dot{v} = -\frac{\alpha}{m} v$$

Ansatz: $v(t) = Ae^{\lambda t}$; Einsetzen ergibt:

$$A\lambda e^{\lambda t} = -\frac{\alpha}{m} A e^{\lambda t} \quad \to \quad \lambda = -\frac{\alpha}{m}$$

$$v(t) = Ae^{-\frac{\alpha}{m}t} \quad \text{mit} \quad v(0) = v_0 \quad \to \quad v(t) = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t}$$

$$x(t) = \int_0^t v(t')\,dt' + x_0$$

$$= v_0 \left[-\frac{m}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{m}t'} \right]_0^t + x_0$$

$$= \frac{mv_0}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right) + x_0$$

(ii) Newtonsche Reibung $F = -\alpha v^2$ (z.B. Luftwiderstand)

$$\dot{v} = -\frac{\alpha}{m} v^2$$

Ansatz: $v(t) = \frac{A}{t+B}$; Einsetzen ergibt:

$$-\frac{A}{(t+B)^2} = -\frac{\alpha}{m} \frac{A^2}{(t+B)^2} \quad \to \quad A = \frac{m}{\alpha}$$

$$v(t) = \frac{m}{\alpha} \frac{1}{t+B} \quad \text{mit} \quad v(0) = v_0 = \frac{m}{\alpha B}$$

$$v(t) = \frac{m}{\alpha} \frac{1}{t + \frac{m}{\alpha v_0}}$$

$$x(t) = \int_0^t v(t')\,dt' + x_0$$

$$= \frac{m}{\alpha} \left[\ln\left(t' + \frac{m}{\alpha v_0} \right) \right]_0^t + x_0 = \frac{m}{\alpha} \ln \frac{t + \frac{m}{\alpha v_0}}{\frac{m}{\alpha v_0}} + x_0$$

$$= \frac{m}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{\alpha v_0 t}{m} \right) + x_0$$

e) ortsabhängige Kraft $F(x)$ (z.B. Gravitationskraft, Coulombkraft, Federkraft),

hier: Federkraft $F = -Dx$

$$m\ddot{x} = -Dx$$

$$\ddot{x} = -\frac{D}{m}x$$

Ansatz: $x(t) = A\sin\omega t$; Einsetzen ergibt:

$$-\omega^2 A\sin\omega t = -\frac{D}{m}A\sin\omega t \quad \rightarrow \quad \omega^2 = \frac{D}{m}$$

ebenso: $x(t) = A\cos\omega t$

allgemeine Lösung:

$$x(t) = A\sin\sqrt{\frac{D}{m}}\,t + B\cos\sqrt{\frac{D}{m}}\,t$$

$$\dot{x}(t) = A\sqrt{\frac{D}{m}}\cos\sqrt{\frac{D}{m}}\,t - B\sqrt{\frac{D}{m}}\sin\sqrt{\frac{D}{m}}\,t$$

Anfangsbedingungen: $x(0) = x_0 \quad \rightarrow \quad B = x_0$; $\dot{x}(0) = v_0 \quad \rightarrow \quad A\sqrt{\frac{D}{m}} = v_0$

spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen:

$$x(t) = v_0\sqrt{\frac{m}{D}}\sin\sqrt{\frac{D}{m}}\,t + x_0\cos\sqrt{\frac{D}{m}}\,t$$