Aufgabe 1: Unbestimmte Integrale

Bestimmen Sie eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$.

Anmerkung: Im Folgenden sind bei einer Auswahl von Aufgabenteilen die Rechnungen explizit gezeigt, bei anderen nur das Ergebnis oder das Ergebnis zusammen mit der Lösungsidee. Sie können das Ergebnis für $F(x)$ immer durch Ableiten nach x überprüfen, denn $F'(x) = f(x)$. c ist im Folgenden eine beliebige Integrationskonstante.

a) $f(x) = x^2 + 4x^4$: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{5}x^5 + c$

b) $f(x) = \sqrt{x} - 6x^4$: $F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{6}{5}x^5 + c$

c) $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}$: $F(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + c$

d) $f(x) = (7x+3)^7$: Zum Beispiel lösbar durch Substitution mit der Funktion $v(x) = 7x+3$, $v'(x) = 7$, $g(x) = x^7$, $G(x) = \frac{1}{8}x^8$, sodass $\int (7x+3)^7 \mathrm{d}x = \int g[v(x)]\frac{v'(x)}{v'(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{7}\int g[v(x)]v'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{7}G[v(x)] + c = \frac{1}{56}v(x)^8 + c = \frac{1}{56}(7x+3)^8 + c$

e) $f(x) = x\left(3+3x^2\right)^3$: Zum Beispiel lösbar durch Substitution mit der Funktion $v(x) = 3+3x^2$, $v'(x) = 6x$, $g(x) = x^3$, $G(x) = \frac{1}{4}x^4$, sodass $F(x) = \int x\left(3+3x^2\right)^3 \mathrm{d}x = \int xg[v(x)]\frac{v'(x)}{v'(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int g[v(x)]v'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}G[v(x)] + c = \frac{1}{24}\left(3x^2+3\right)^4 + c$

f) $f(x) = \cos(x)\sin^2(x)$: Zum Beispiel lösbar durch partielle Integration mit $u'(x) = \cos(x)$, $v(x) = \sin^2(x)$, also $u(x) = \sin(x)$ und $v'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$ sodass

$$F(x) = \int \cos(x)\sin^2(x)\mathrm{d}x = \int u'(x)v(x) = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) = \sin^3(x) - \int 2\cos(x)\sin^2(x)\,.$$

Auf beiden Seiten steht bis auf Vorfaktoren derselbe Ausdruck. Wir können die Gleichung umstellen zu $3\int \cos(x)\sin^2(x)\mathrm{d}x = \sin^3(x) = 3F(x)$, also $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3(x) + c$

g) $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-2x^3}$: $F(x) = -\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-2x^3} + c$; Substitution wie in d) und e) mit $v(x) = -2x^3$ und $g(x) = e^x$, $v'(x)$ kürzt sich mit x^2 weg.

h) $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^2}$: $F(x) = \frac{1+x}{1-x} + \ln(1-x) + c$; partielle Integration mit $v(x) = 1+x$ und $u'(x) = (1-x)^{-2}$.

i) $f(x) = x\ln(x)$: $F(x) = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + c$; partielle Integration mit $u'(x) = x$ und $v(x) = \ln(x)$.

j) $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$: $F(x) = \left(-x^2 - 2x - 2\right)\mathrm{e}^{-x} + c$; partielle Integration mit $u'(x) = e^{-x}$ und $v(x) = x^2$. Danach eine weitere partielle Integration, wieder mit $u'(x) = e^{-x}$.

Aufgabe 2: Bestimmte Integrale

Berechnen Sie folgende Integrale.

Anmerkung: Im Folgenden sind die zu integrierende Funktion $f(x)$, sowie die resultierende Stammfunktion $F(x)$ angegeben. Damit folgt immer das Ergebnis als $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. Bei schwierigen Integralen sind Hinweise zum Bestimmen der Stammfunktion gegeben.

a) $\int\limits_1^5 \mathrm{d}x = 4$, da $f(x) = 1$, $F(x) = x$

b) $\int\limits_2^4 \left(\frac{1}{x^2} + 2x\right) \mathrm{d}x = \frac{49}{4}$, da $f(x) = 2x + x^{-2}$, $F(x) = x^2 - x^{-1}$

c) $\int\limits_{-3}^3 |x| \, \mathrm{d}x = 9$; Hier sollte man das Integral aufteilen in einen Teil mit $x \geq 0$ und einen mit $x \leq 0$. Dies sollte man oft tun, sobald Beträge im Spiel sind, denn $|x| = x$, falls $x \geq 0$, aber $|x| = -x$, falls $x < 0$. Diese Fallunterscheidung in der Definition der Betragsfunktion sorgt dafür, dass wir beim Berechnen des Integrals auch eine solche Fallunterscheidung vornehmen. Somit gilt hier

$$\int\limits_{-3}^{3} |x| \, \mathrm{d}x = \int\limits_0^3 x \mathrm{d}x + \int\limits_{-3}^0 (-x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} x^2 \bigg|_0^3 - \frac{1}{2} x^2 \bigg|_{-3}^0 = \frac{1}{2} [3^2 + (-3)^2] = 9$$

d) $\int\limits_0^\pi \sin(x) \, \mathrm{d}x = 2$, da $f(x) = \sin(x)$, $F(x) = -\cos(x)$

e) $\int\limits_0^{2\pi} \sin(x) \, \mathrm{d}x = 0$, siehe d)

f) $\int\limits_0^{1/2} \sin\left[2\pi(x+1)\right] \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}$, da $f(x) = \sin(2\pi x + 2\pi) = \sin(2\pi x)$, $F(x) = -\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi x)$

g) $\int\limits_1^\infty \mathrm{e}^{-3x} \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-3}}{3}$, da $f(x) = e^{-3x}$, $F(x) = -\frac{1}{3} e^{-3x}$

h) $\int\limits_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{x+1}} \, \mathrm{d}x = 2$, da $f(x) = (x+1)^{-1/2}$, $F(x) = 2(x+1)^{1/2}$

i) $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{\left[\ln(x)\right]^2}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$, Substitution mit $v(x) = \ln(x)$, $v'(x) = 1/x$, $g(x) = x^2$, $G(x) = \frac{1}{3} x^3$, wie in A1 d) bzw. e). Damit folgt

$$F(x) = \int \frac{[\ln(x)]^2}{x} \mathrm{d}x = \int \frac{g[v(x)]}{x} \frac{v'(x)}{v'(x)} \mathrm{d}x = \int g[v(x)] v'(x) \mathrm{d}x = G[v(x)] = \frac{1}{3} [\ln(x)]^3 .$$

Mit $\ln(e) = 1$ und $\ln(1) = 0$ folgt dann das Ergebnis.

j) $\int\limits_1^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}} \, \mathrm{d}x = \frac{100}{27}$, partielle Integration mit $u'(x) = (1+3x)^{-1/2}$, $v(x) = x$.

Aufgabe 3: Fläche zwischen Funktionen

Die Funktionen $y = x^2$ und $y = -2x^2 + 3$ schließen eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie ihren Flächeninhalt.

Ergebnis: Zunächst bestimmen wir die Schnittpunkt der beiden Kurven. Hierbei ist die eine Kurve beschrieben durch $y = f(x) = x^2$ und die andere durch $y = g(x) = 3 - 2x^2$. Die Schnittpunkte liegen bei

$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = 3 - 2x^2 \Rightarrow 3x^2 = 3$, also bei $x = \pm 1$. Für die Fläche zwischen den beiden Kurven berechnen wir also

$$A = \int_{-1}^{1} [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (3 - 3x^2)\mathrm{d}x = (3x - x^3)\Big|_{-1}^{1} = 4\,.$$

Aufgabe 4: Variable Integralgrenze

Wie muss in folgenden bestimmten Integralen t gewählt werden, damit die mit der x-Achse eingeschlossene orientierte Fläche $A(t)$ verschwindet?

a) $A(t) = \int_0^t \left(-x^2 + \frac{25}{3}\right) \mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{25}{3}x\right)\Big|_0^t = \frac{25t - t^3}{3} \stackrel{!}{=} 0$, woraus die drei möglichen Werte $t = 0, \pm 5$ folgen.

b) $A(t) = \int_0^t \left(5x^4 - 21x^2 + 10\right) \mathrm{d}x = (x^5 - 7x^3 + 10x)\Big|_0^t = t^5 - 7t^3 + 10t \stackrel{!}{=} 0$, woraus $t = 0$ oder $u^2 - 7u + 10 = 0$ mit $u = t^2$ folgt. Somit $u = \frac{7\pm 3}{2}$ nach pq-Formel. Also $t = \pm\sqrt{5}$ oder $t = \pm\sqrt{2}$.

c) $A(t) = \int_0^t \cos(2\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)\Big|_0^t = \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi t) \stackrel{!}{=} 0$, woraus $2\pi t = n\pi$ folgt für beliebige $n \in \mathbb{Z}$, also $t = \frac{n}{2}$, oder anders gesagt $t = ..., -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, ...$

Aufgabe 5: Doppelintegrale

Berechnen Sie folgende bestimmte Doppelintegrale.

a) $$\int_1^2 \left[\int_0^t 2\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}t = \int_1^2 \left[2x\Big|_0^t\right] \mathrm{d}t = \int_1^2 2t\mathrm{d}t = t^2\Big|_1^2 = 3$$

b) $$\int_1^{\mathrm{e}} \left[\int_1^t \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}t = \int_1^{e} \left[-\frac{1}{x}\Big|_1^t\right] \mathrm{d}t = \int_1^{e} \left(1 - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = [t - \ln(t)]\Big|_1^e = e - 2$$

c) $$\int_{\pi}^{2\pi} \left[\int_0^t \sin(x)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}t = \int_{\pi}^{2\pi} [-\cos(t) + 1]\mathrm{d}t = [-\sin(t) + t]\Big|_{\pi}^{2\pi} = \pi$$

Aufgabe Bonus: Kleiner Gauß mittels vollständiger Induktion

In Kapitel 6.1 des Skriptes wurde zur Herleitung des orientierten Flächeninhalts unter der Kurve $f(x) = x$ die Relation

$$\sum_{j=0}^{n-1} j = 0 + 1 + ... + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

gezeigt. Wir wollen diese Relation nun auf eine alternative Weise zeigen. Die hier disktutierte Art der Beweisführung lässt sich auf viele ähnliche Probleme anwenden. Dazu fassen wir diese Gleichung als logische Aussage $A(n)$ auf, die entweder wahr oder falsch sein kann. Die Aussage hängt dabei vom Parameter $n \in \mathbb{N}$ ab, sodass wir schreiben

$$A(n) : \text{Es gilt } \sum_{j=0}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2}\,.$$

Diese Aussage gilt es jetzt für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ zu zeigen.

Anmerkung zur Notation: Die Notation $\sum_{n=n_0}^{n_1} f_n$ für $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $n_1 \in \mathbb{Z}$ bedeutet, dass man alle ganzen Zahlen n zwischen $n = n_0$ und $n = n_1$ in den Ausdruck f_n einsetzt und aufsummiert. Anfangs- und Endwert werden dabei mitbetrachtet, also $\sum_{n=n_0}^{n_1} f_n = f_{n_0} + f_{n_0+1} + ... f_{n_1}$. Per Definition verschwindet dieses Summenzeichen für $n_1 < n_0$, also z.B. $\sum_{n=0}^{-1} f_n = 0$. Für $n_0 = n_1$ gibt es genau einen Term, also $\sum_{n=n_0}^{n_0} f_n = f_{n_0}$. Auch wenn diese Notation anfangs gewöhnungsbedürftig erscheint, ist sie sehr praktisch und findet in der Physik ständig Anwendung!

a) Wir fangen zunächst mit dem einfachsten Fall an, also mit $n = 1$. Zeigen Sie also die Aussage $A(n)$ für $n = 1$.
Ergebnis: $\sum_{j=0}^{n-1} j\Big|_{n=1} = \sum_{j=0}^{0} j = 0$ sowie $n(n-1)/2\Big|_{n=1} = 0$. Damit folgt, dass $A(1)$ wahr ist.

b) Nehmen wir einmal an, wir wüssten, dass die Aussage für ein bestimmtes N gelten würde, also dass wir wüssten, dass $A(N)$ für festes N wahr sei. Unter dieser Annahme, zeigen Sie, dass daraus folgt, dass $A(N+1)$ wahr ist. Schreiben Sie dazu die Gleichung für $n = N+1$, also aus der zu zeigenden Aussage $A(N+1)$, auf und formen Sie diese um, bis ein Teil sich zur Gleichung für $n = N$ ergibt. Diese ist nach Annahme korrekt, da wir die Aussage $A(N)$ als wahr angenommen haben. Zeigen Sie dann weiterhin, dass der Rest der Gleichung auch übereinstimmt.
Ergebnis: Wir betrachten die linke Seite der Gleichung zur Aussage $A(N+1)$, also

$$\sum_{j=0}^{N+1-1} j = \sum_{j=0}^{N} j = 0 + 1 + 2 + ... + (N-1) + N = N + \sum_{j=0}^{N-1} j \,.$$

Da wir annehmen, dass die Aussage $A(N)$ wahr ist, können wir also schreiben, dass

$$\sum_{j=0}^{N+1-1} j = N + \sum_{j=0}^{N-1} j \overset{A(N)\text{ wahr}}{=} N + \frac{N(N-1)}{2} = \frac{(N+1)N}{2} \,.$$

Damit ist gezeigt, dass $A(N+1)$ wahr ist, da hier die entsprechende Gleichung aus der Wahrheit von $A(N)$ hergeleitet wurde.

Mit diesen beiden Schritten haben wir $A(n)$ schon gezeigt, denn aus a) folgt, dass $A(1)$ wahr ist, womit aus b) folgt, dass $A(2)$ wahr ist, denn wir haben in b) ein festes aber beliebiges N verwendet. Dieses könnte also zu $N = 1$ gewählt werden. Da aber nun $A(2)$ auch wahr ist, können wir b) mit $N = 2$ verwenden, sodass $A(3)$ auch wahr ist. Dies geht immer so weiter, sodass wir im Endeffekt $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ gezeigt haben. Diese Art der Beweisführung nennt sich **vollständige Induktion** und findet in der Mathematik und auch in der Physik immer wieder Anwendung, wenn es eine Menge an Aussagen gibt, die von einem Parameter $n \in \mathbb{N}$ abhängt. Diese Beweistechnik macht von der Eigenschaft der natürlichen Zahlen Gebrauch, dass diese irgendwo anfangen, z.B. $n = 0$ oder $n = 1$ je nach Konvention, und dass über jeder natürlichen Zahl eine weitere ist, also $n + 1 \in \mathbb{N}$ für $n \in \mathbb{N}$. Diese Art zu denken und zu beweisen ist anfangs gewiss ungewohnt, aber Sie werden sich daran gewöhnen im Verlauf des Studiums. Das Vorgehen in a) nennt man übrigens den **Induktionsanfang** und das in b) den **Induktionsschritt**. Der Induktionsanfang muss nicht bei $n = 0$ oder $n = 1$ starten, man könnte zum Beispiel auch eine Klasse von Aussagen für $n > 10$ beweisen wollen, dann wäre der Induktionsanfang bei $n = 11$.