Aufgabe 1: Unbestimmte Integrale

Bestimmen Sie eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$.

a) $f(x) = x^2 + 4x^4$

f) $f(x) = \cos(x) \sin^2(x)$

b) $f(x) = \sqrt{x} - 6x^4$

g) $f(x) = x^2 e^{-2x^3}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}$

h) $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^2}$

d) $f(x) = (7x+3)^7$

i) $f(x) = x \ln(x)$

e) $f(x) = x(3+3x^2)^3$

j) $f(x) = x^2 e^{-x}$

Aufgabe 2: Bestimmte Integrale

Berechnen Sie folgende Integrale.

a) $\int_1^5 dx$

f) $\int_0^{1/2} \sin[2\pi(x+1)] dx$

b) $\int_2^4 \left(\frac{1}{x^2} + 2x \right) dx$

g) $\int_1^{\infty} e^{-3x} dx$

c) $\int_{-3}^3 |x| dx$

h) $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$

d) $\int_0^{\pi} \sin(x) dx$

i) $\int_1^e \frac{[\ln(x)]^2}{x} dx$

e) $\int_0^{2\pi} \sin(x) dx$

j) $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}} dx$

Aufgabe 3: Fläche zwischen Funktionen

Die Funktionen $y = x^2$ und $y = -2x^2 + 3$ schließen eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie ihren Flächeninhalt.

Aufgabe 4: Variable Integralgrenze

Wie muss in folgenden bestimmten Integralen t gewählt werden, damit die mit der x -Achse eingeschlossene orientierte Fläche $A(t)$ verschwindet?

a) $A(t) = \int_0^t \left(-x^2 + \frac{25}{3} \right) dx$

b) $A(t) = \int_0^t (5x^4 - 21x^2 + 10) dx$

c) $A(t) = \int_0^t \cos(2\pi x) dx$

Aufgabe 5: Doppelintegrale

Berechnen Sie folgende bestimmte Doppelintegrale.

$$\text{a) } \int_1^2 \left[\int_0^t 2 \, dx \right] dt$$

$$\text{b) } \int_1^e \left[\int_1^t \frac{1}{x^2} \, dx \right] dt$$

$$\text{c) } \int_\pi^{2\pi} \left[\int_0^t \sin(x) \, dx \right] dt$$

Aufgabe Bonus: Kleiner Gauß mittels vollständiger Induktion

In Kapitel 6.1 des Skriptes wurde zur Herleitung des orientierten Flächeninhalts unter der Kurve $f(x) = x$ die Relation

$$\sum_{j=0}^{n-1} j = 0 + 1 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

gezeigt. Wir wollen diese Relation nun auf eine alternative Weise zeigen. Die hier diskutierte Art der Beweisführung lässt sich auf viele ähnliche Probleme anwenden. Dazu fassen wir diese Gleichung als logische Aussage $A(n)$ auf, die entweder wahr oder falsch sein kann. Die Aussage hängt dabei vom Parameter $n \in \mathbb{N}$ ab, sodass wir schreiben

$$A(n) : \text{Es gilt } \sum_{j=0}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Diese Aussage gilt es jetzt für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ zu zeigen.

Anmerkung zur Notation: Die Notation $\sum_{n=n_0}^{n_1} f_n$ für $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $n_1 \in \mathbb{Z}$ bedeutet, dass man alle ganzen Zahlen n zwischen $n = n_0$ und $n = n_1$ in den Ausdruck f_n einsetzt und aufsummiert. Anfangs- und Endwert werden dabei mitbetrachtet, also $\sum_{n=n_0}^{n_1} f_n = f_{n_0} + f_{n_0+1} + \dots + f_{n_1}$. Per Definition verschwindet dieses Summenzeichen für $n_1 < n_0$, also z.B. $\sum_{n=0}^{-1} f_n = 0$. Für $n_0 = n_1$ gibt es genau einen Term, also $\sum_{n=n_0}^{n_0} f_n = f_{n_0}$. Auch wenn diese Notation anfangs gewöhnungsbedürftig erscheint, ist sie sehr praktisch und findet in der Physik ständig Anwendung!

- Wir fangen zunächst mit dem einfachsten Fall an, also mit $n = 1$. Zeigen Sie also die Aussage $A(n)$ für $n = 1$.
- Nehmen wir einmal an, wir wüssten, dass die Aussage für ein bestimmtes N gelten würde, also dass wir wüssten, dass $A(N)$ für festes N wahr sei. Unter dieser Annahme, zeigen Sie, dass daraus folgt, dass $A(N+1)$ wahr ist. Schreiben Sie dazu die Gleichung für $n = N+1$, also aus der zu zeigenden Aussage $A(N+1)$, auf und formen Sie diese um, bis ein Teil sich zur Gleichung für $n = N$ ergibt. Diese ist nach Annahme korrekt, da wir die Aussage $A(N)$ als wahr angenommen haben. Zeigen Sie dann weiterhin, dass der Rest der Gleichung auch übereinstimmt.

Mit diesen beiden Schritten haben wir $A(n)$ schon gezeigt, denn aus a) folgt, dass $A(1)$ wahr ist, womit aus b) folgt, dass $A(2)$ wahr ist, denn wir haben in b) ein festes aber beliebiges N verwendet. Dieses könnte also zu $N = 1$ gewählt werden. Da aber nun $A(2)$ auch wahr ist, können wir b) mit $N = 2$ verwenden, sodass $A(3)$ auch wahr ist. Dies geht immer so weiter, sodass wir im Endeffekt $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ gezeigt haben. Diese Art der Beweisführung nennt sich **vollständige Induktion** und findet in der Mathematik und auch in der Physik immer wieder Anwendung, wenn es eine

Menge an Aussagen gibt, die von einem Parameter $n \in \mathbb{N}$ abhängt. Diese Beweistechnik macht von der Eigenschaft der natürlichen Zahlen Gebrauch, dass diese irgendwo anfangen, z.B. $n = 0$ oder $n = 1$ je nach Konvention, und dass über jeder natürlichen Zahl eine weitere ist, also $n + 1 \in \mathbb{N}$ für $n \in \mathbb{N}$. Diese Art zu denken und zu beweisen ist anfangs gewiss ungewohnt, aber Sie werden sich daran gewöhnen im Verlauf des Studiums. Das Vorgehen in a) nennt man übrigens den **Induktionsanfang** und das in b) den **Induktionsschritt**. Der Induktionsanfang muss nicht bei $n = 0$ oder $n = 1$ starten, man könnte zum Beispiel auch eine Klasse von Aussagen für $n > 10$ beweisen wollen, dann wäre der Induktionsanfang bei $n = 11$.