Anmerkung: Im Folgenden wird die Notation $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ und (a, b, c) synonym verwendet. Streng genommen würde man allerdings

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a, b, c)^T$$

schreiben, wobei ^{T} die Transposition (Zeilen und Spalten von Matrizen tauschen) bezeichnet. Wir lassen der Einfachheit das ^{T} im Folgenden weg.

Aufgabe 1: Vektoren

a) Berechnen Sie den Betrag folgender Vektoren.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \quad , \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: $a = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$, analog $b = 5$, $c = \sqrt{54}$, $d = \sqrt{35}$.

b) Normieren Sie die Vektoren $\vec{a}$ bis $\vec{d}$.
Ergebnis: Der zu $\vec{v}$ zugehörige normierte Vektor ist $\vec{v}_0 = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{v}}{v}$. Es ist völlig ausreichend, hier z.B. $\vec{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$ zu schreiben, wenn nicht offensichtlich etwas weggekürzt werden kann. Die restlichen normierten Vektoren ergeben sich vollkommen analog aus den in a) ermittelten Beträgen.

c) Berechnen Sie mit den Vektoren $\vec{a}$ bis $\vec{d}$

$$\begin{array}{llll} \vec{a} + \vec{b} \quad , & \vec{a} - \vec{b} \quad , & \vec{a} \cdot \vec{b} \quad , & \vec{a} \times \vec{b} \quad , \\ \vec{a} + \vec{c} \quad , & \vec{a} - \vec{c} \quad , & \vec{a} \cdot \vec{c} \quad , & \vec{a} \times \vec{c} \quad , \\ \vec{a} + \vec{d} \quad , & \vec{a} - \vec{d} \quad , & \vec{a} \cdot \vec{d} \quad , & \vec{a} \times \vec{d} \quad . \end{array}$$

Ergebnis: Es sind

$$\begin{array}{llll} \vec{a} + \vec{b} = (5, 2, 2) \ , & \vec{a} - \vec{b} = (-3, -4, 2) \ , & \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \ , & \vec{a} \times \vec{b} = (-6, 8, 7) \ , \\ \vec{a} + \vec{c} = (-2, 2, -4) \ , & \vec{a} - \vec{c} = (4, -4, 8) \ , & \vec{a} \cdot \vec{c} = -18 \ , & \vec{a} \times \vec{c} = (0, 0, 0) \ , \\ \vec{a} + \vec{d} = (6, 2, 1) \ , & \vec{a} - \vec{d} = (-4 - 4, 3) \ , & \vec{a} \cdot \vec{d} = 0 \ , & \vec{a} \times \vec{d} = (-5, 11, 8) \ . \end{array}$$

d) Wie groß ist der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$; $\vec{a}$ und $\vec{c}$; $\vec{a}$ und $\vec{d}$?
Ergebnis: Es gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos(\alpha)$. Dies lässt sich umformen zu $\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}\right) \approx 85.3°$. Analog gilt für den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{c}$: $\alpha = 180°$. Diese stehen also antiparallel zueinander, wie man in a) auch direkt ablesen kann. Weiterhin gilt laut c) $\vec{a} \cdot \vec{d} = 0$, das heißt diese beiden Vektoren stehen senkrecht zueinander, also $\alpha = \pi/2 = 90°$ in diesem Fall.

e) Wie muss k gewählt werden, damit die Länge des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 3 \end{pmatrix}$ gleich 8 ist?

Ergebnis: Die Länge beträgt $L = \sqrt{1 + k^2 + 9}$. Diese soll $L = 8$ erfüllen, also $k^2 + 10 = 64$, was $k = \pm\sqrt{54}$ ergibt.

Aufgabe 2: Koordinatendarstellung von Vektoren

Schreiben Sie die folgenden Vektoren in Koordinatendarstellung ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ seien die drei kartesischen Basisvektoren).

a) $\vec{e} = -3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 12\vec{e}_3 = (-3, 5, -12)$

b) $\vec{f} = \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$

c) $\vec{g} = 2(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) - 7(\vec{e}_1 - \vec{e}_3) - 6(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = -5\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (-5, -4, 1)$

d) $\vec{h} = 4(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_3 + 5(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) - 2(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_3 = 5\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = (5, 5, -2)$

e) $\vec{i} = 3(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) - 6(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) = 3\vec{e}_1 + 6(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) = 3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 = (3, 6, 0)$

f) $\vec{j} = (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_2 - (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + (\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) = -(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) - (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = -\vec{e}_3 - \vec{e}_1 = (-1, 0, -1)$

Aufgabe 3: Abstand von Punkten

Berechnen Sie jeweils den Abstand der beiden Punkte im Koordinatensystem.

a) $(3, 4)$, $(-1, -4)$: Wir bilden den Verbindungsvektor $\vec{v} = (3 - (-1), 4 - (-4)) = (4, 8)$. Der Abstand der Punkte entspricht der Länge des Verbindungsvektors $v = |\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$. Für die anderen Teilaufgaben ist das Vorgehen analog.

b) $(6, -3)$, $(-6, 1)$: $\vec{v} = (12, -4)$, $v = 4\sqrt{10}$

c) $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$: $\vec{v} = (-3, -3, -3)$, $v = 3\sqrt{3}$

Aufgabe 4: Darstellung einer Geraden

Bestimmen Sie die Parameterdarstellung sowie die parameterfreie Darstellung der Geraden, die durch die Punkte P, Q geht.

$$\mathrm{P} = (-1, 1)\ , \qquad \mathrm{Q} = (1, 4)$$

Ergebnis: Bezeichnen wir mit $\vec{P}$ den Vektor vom Ursprung zum Punkt P, also $\vec{P} = (-1, 1)$, analog für Q. Wir können also genausogut den Vektorpfeil bei P und Q im Folgenden weglassen und einen Punkt standardmäßig mit seinem Verbindungsvektor vom Ursprung aus identifizieren.

Als Vektor entlang der Geraden verwenden wir den Verbindungsvektor $\vec{b} = Q - P = (2, 3)$. Als Vektor der zu der Geraden zeigt können wir einfach einen der beiden Punkte wählen, z.B., $\vec{a} = P = (-1, 1)$. Damit lautet die Parameterdarstellung der Geraden $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b} = (-1 + 2\lambda, 1 + 3\lambda)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gibt natürlich unendlich viele Darstellungsmöglichkeiten für die Parameterdarstellung, da jede Skalierung $\lambda \to \mu \cdot \lambda$ für ein beliebiges $\mu \in \mathbb{R}$ auch zu einer gültigen Parameterdarstellung führt. Wenn Sie also nicht genau dieses Ergebnis haben, überlegen Sie sich, ob Sie Ihr Ergebnis durch eine solche Reskalierung in dieses Ergebnis überführen können.

Für die Normalenform müssen wir den Normalenvektor $\vec{n}$ bestimmen, der Senkrecht zur Geraden steht, also für den $\vec{n} \cdot \vec{b} = 0$ gilt. Sei also $\vec{n} = (n_1, n_2)$ ein beliebiger Vektor, so gilt $\vec{n} \cdot \vec{b} = 2n_1 + 3n_2 = 0$, damit dieser Vektor senkrecht zur Geraden steht. Daraus folgt $n_2 = -2n_1/3$. Normierung des Normalenvektors erfordert $1 = |\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2} = \sqrt{n_1^2 + \frac{4}{9}n_1^2} = |n_1|\sqrt{13/9}$, sodass $|n_1| = \sqrt{9/13}$ sein muss. Damit folgt dann $\vec{n} \cdot \vec{a} = -n_1 + n_2 = -5n_1/3 = 5/\sqrt{13}$ für $n_1 = -\sqrt{9/13} = -|n_1|$. Für beliebige Punkte $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$, die auf der Geraden liegen, gilt also $\vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{a} = \frac{5}{\sqrt{13}}$. Dies ist die Normalenform, welche eindeutig durch den hier bestimmten Normaleneinheitsvektor $\vec{n} = (n_1, n_2) = -\sqrt{9/13}(1, -2/3)$ festlegt, welche Punkte auf der Geraden liegen. Wir können natürlich auch gemeinsame Vorfaktoren kürzen und stattdessen $(-3, 2) \cdot \vec{r} = 5$ schreiben.

Aufgabe 5: Schnittwinkel von Geraden

Bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Geraden von Blatt 2, Aufgabe 9, indem Sie das Skalarprodukt von Vektoren verwenden.

Ergebnis: Die Gerade $f(x)$ geht durch die Punkte $(0, f(0)) = (0, 5)$ sowie $(1, f(1)) = (1, 3)$. Wir können einen Vektor parallel zur Geraden konstruieren als $\vec{a} = (0 - 1, 5 - 3) = (-1, 2)$. Analog dazu finden wir für $g(x)$ den parallelen Vektor $\vec{b} = (0 - 1, g(0) - g(1)) = (-1, -3/2)$. Der Schnittwinkel α ergibt sich aus $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos(\alpha)$, sodass $\alpha = \arccos\left(\frac{1-3}{\sqrt{5}\sqrt{13/4}}\right) = 119.7°$, wie in der Lösung zu Aufgabe 9 auf Blatt 2. Diese Rechnung mit Vektoren ist allerdings viel effizienter.

Aufgabe 6: Differentiation

Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen.

Ergebnisse: Um auf die Ergebnisse zu kommen, bedarf es immer eine Kombination aus Produkt- und Kettenregel, bzw. in einigen Fällen Quotientenregel, welche wiederum aber auch nur eine Kombination von Produkt- und Kettenregel ist. Im Folgenden sind meistens nur die Endergebnisse angegeben und in einigen ausgewählten Fällen zusätzlich auch der Rechenweg.

Hinweis zur Notation: Die Kettenregel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u[v(x)] = v'(x)u'[v(x)]$ schreibt man häufig in der Notation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u[v(x)] = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}u(y)\right|_{y=v(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v(x)\,.$$

Dabei bedeutet $\left.f(y)\right|_{y=v(x)} = f[v(x)]$, dass die Funktion f an der Stelle $y = v(x)$ ausgewertet wird, im Beispiel der Kettenregel wird also $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}u(y) = u'(y)$ an der Stelle $y = v(x)$ ausgewertet, was konsistent mit der Notation aus dem Skript ist.

a) $f(x) = x^8$: $f'(x) = 8x^7$

b) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$: $f'(x) = 9x^2 + 4x + 1$

c) $f(x) = (2 + x)(x^2 + 1)$: $f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$: $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \sqrt{x}$: $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

f) $f(x) = x\sqrt{x}$: $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

g) $f(x) = \cos(7x)$: $f'(x) = -7\sin(7x)$

h) $f(x) = 6\sin(6x) - 3\cos(-3x)$: $f'(x) = 36\cos(6x) - 9\sin(-3x)$

i) $f(x) = x^3 + 2\sin(2\pi x)$: $f'(x) = 3x^2 + 4\pi\cos(2\pi x)$

j) $f(x) = \sin\left(x^2\right)$: $f'(x) = \left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sin(y)\right|_{y=x^2} \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 = \left.\cos(y)\right|_{y=x^2} \cdot (2x) = 2x\cos\left(x^2\right)$

k) $f(x) = \sin^2(x)$: $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x)\sin(x) = 2\sin(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$

l) $f(x) = 2\left(x^2 - 3\sqrt{x}\right)^6$: $f'(x) = 12\left(2x - \dfrac{3}{2\sqrt{x}}\right)\left(x^2 - 3\sqrt{x}\right)^5$

m) $f(x) = \sqrt{2x - 6x^4}$: $f'(x) = \dfrac{1 - 12x^3}{\sqrt{2x - 6x^4}}$

n) $f(x) = \dfrac{(1-2x)^4}{(3+5x)^2}$: $f'(x) = \dfrac{(3+5x)^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-2x)^4 - (1-2x)^4 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3+5x)^2}{[(3+5x)^2]^2} = .. = \dfrac{(-34-20x)(1-2x)^3}{(3+5x)^3}$

o) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+2x}}$: $f'(x) = (1+2x)^{-1/2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x + x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+2x)^{-1/2}$

$= (1+2x)^{-1/2} + x \left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}y^{-1/2}\right|_{y=1+2x} \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+2x) = (1+2x)\cdot(1+2x)^{-3/2} - \dfrac{x}{2}(1+2x)^{-3/2}\cdot 2$

$= \dfrac{1+x}{(1+2x)^{3/2}}$

p) $f(x) = \left(\dfrac{3x+2}{4x-2}\right)^2$: $f'(x) = -\dfrac{28(3x+2)}{(4x-2)^3}$

q) $f(x) = x^2\,\cos(x)$: $f'(x) = 2x\cos(x) - x^2\sin(x)$

r) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$: $f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

s) $f(x) = \mathrm{e}^{2x-1}$: $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x-1}$

t) $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$: $f'(x) = (x^2+2x)\mathrm{e}^x$

u) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$: $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}[\cos(x) - \sin(x)]$

v) $f(x) = \mathrm{e}^{(x+1)^2}$: $f'(x) = \left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}e^y\right|_{y=(x+1)^2} \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+1)^2 = 2(x+1)\mathrm{e}^{(x+1)^2}$

w) $f(x) = \ln\left(\sqrt{2}x\right)$: $f(x) = \ln\left(\sqrt{2}\right) + \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$

x) $f(x) = \left[\ln(x)\right]^{-1}$: $f'(x) = -\dfrac{1}{x\left[\ln(x)\right]^2}$

y) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$: $f(x) = \ln(x) - \ln(x+1) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x(x+1)}$

z) $f(x) = \sin\left[\ln(x)\right]$: $f'(x) = \cos\left[\ln(x)\right]\dfrac{1}{x}$

Aufgabe 7: Extremwertbestimmung

Von einem rechteckigen Blatt mit den Seitenlängen B und T wird an jeder Ecke ein Quadrat der Seitenlänge a ausgeschnitten und aus dem Rest wird eine Schachtel, die oben offen ist, gebildet. Wie muss a gewählt werden, damit das Volumen der Schachtel maximal ist?

Ergebnis: Die Höhe der Schachtel ist durch a gegeben. Die Seitenlängen der Grundfläche durch $B-2a$ und $T-2a$ (weil ja an jeder betrachteten Seite an beiden Enden, also den Ecken, ein Quadrat fehlt). Dadurch ergibt sich das Volumen $V = a(B-2a)(T-2a) = 4a^3 - 2a^2(B+T) + aBT$. Wir wollen dieses nun als Funktion von a auffassen und die Extremwerte bestimmen, also $V'(a) = 12a^2 - 4a(B+T) + BT = 0$ berechnen. Dies ergibt mit pq-Formel die zwei mögliche Extrempunkte an den Stellen

$$a_{E1/E2} = \frac{1}{6}(B+T) \pm \sqrt{\frac{1}{36}(B+T)^2 - \frac{BT}{12}} = \frac{1}{6}\left[(B+T) \pm \sqrt{(B+T)^2 - 3BT}\right].$$

Um zu überprüfen, welches der beiden Extrema ein Maximum ist, bildet man die zweite Ableitung $V''(a) = 24a - 4(B+T)$. Damit ergibt sich

$$V''(a_{E1/E2}) = 4\left[(B+T) \pm \sqrt{(B+T)^2 - 3BT}\right] - 4(B+T) = \pm 4\sqrt{(B+T)^2 - 3BT},$$

also $V''(a_{E1}) > 0$ und $V''(a_{E2}) < 0$. Damit ist $a_{E2} = \frac{1}{6}\left[(B+T) - \sqrt{(B+T)^2 - 3BT}\right]$ das gesuchte Maximum, also $V(a_{E2})$ das maximale Volumen.

Aufgabe 8: Kurvendiskussion

Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion

$$f(x) = -2x^3 - 5x^2 + 8x$$

durch. Diskutieren Sie insbesondere Symmetrie, asymptotisches Verhalten, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte, und skizzieren Sie die Funktion.

Symmetrie: $f(-x) \neq f(x)$ und $\neq -f(x)$, da das Polynom sowohl gerade, als auch ungerade Potenzen enthält. Also weder punktsymmetrisch zum Ursprung, noch Achsensymmetrisch zur y-Achse.

Asymptotisches Verhalten: Es gibt keine Polstellen, also muss lediglich das Verhalten für $x \to \pm\infty$ untersucht werden. Für große x verhält sich die Polynomfunktion näherungsweise wie ihr größter Exponent, also wie $-2x^3$, es gilt also $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}(-2x^3) = \mp\infty$ und es gibt keine ausgewiesene Asymptote, gegen die die Funktion strebt.

Nullstellen: $x_1 = 0$ ist eine offensichtliche Nullstelle. Die restlichen Nullstellen ergeben sich aus $f(x)/x = 0$ unter der Annahme $x \neq 0$, also aus der Gleichung $-2x^2 - 5x + 8 = 0$. Die pq-Formel führt somit auf $x_{2/3} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + 4} = -\frac{5\mp\sqrt{25+64}}{4} = -\frac{5\mp\sqrt{89}}{4}$.

Extrempunkte: Es gilt $f'(x) = -6x^2 - 10x + 8$. Extrempunkte liegen bei $f'(x_{E1/E2}) = 0$, was sich mit der pq-Formel zu $x_{E1/E2} = -\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{8}{6}} = -\frac{5\mp\sqrt{73}}{6}$ auflösen lässt. Damit ist $x_{E1} = (-\sqrt{25}+\sqrt{73})/6 > 0$ und $x_{E2} = (-\sqrt{25} - \sqrt{73})/6 < 0$. Um zu bestimmen, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, kann man die zweite Ableitung $f''(x)$ betrachten. Daraus ergibt sich dann, dass bei $x_{E1} > 0$ ein Maximum vorliegt und bei $x_{E2} < 0$ ein Minimum.

Wendepunkt: Der Wendepunkt ergibt sich aus $f''(x) = 0 = -12x - 10$ zu $x_W = -5/6$.

Plot: `https://www.wolframalpha.com/input?i=plot+-2x**3-5x**2%2B8x`

Aufgabe 9: Springbrunnen

Ein Springbrunnen ist 1 m über dem Boden auf einem Podest angebracht und erzeugt einen Wasserstrahl, der unter einem Winkel $\alpha = 10°$ zur Vertikalen das Podest verlässt. Aufgrund der Schwerkraft beschreibt die Höhe des Wasserstrahls eine Parabelform $h(x) = ax^2 + bx + c$. Das Maximum befindet sich 1 m vom Podest entfernt. Wo trifft der Strahl auf den Boden?

Ergebnis: Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass das Podest bei $x = 0$ m steht. Dann gilt nach Aufgabenstellung $h(0) = 1$ m. Weiterhin gilt $\tan(\alpha) = \frac{1}{h'(0)}$. Um sich das zu überlegen, kann man die Parabel skizzieren und den Winkel α einzeichnen. Für diesen gilt $\tan(\alpha) = \frac{\Delta x}{\Delta y}$, wobei $\Delta y = h'(0)\Delta x$ einem Schritt in y-Richtung entlang der Tangenten von $h(x)$ bei $x = 0$ entspricht, wenn man einen entsprechenden Schritt Δx in x-Richtung geht. Diese beiden Schritte bilden Ankathete und Gegenkathete eines rechtwinkligen Dreiecks zum Winkel α. Das Maximum lässt sich mit $h'(x_M) = 0$ bestimmen, sodass dies bei $x_M = -b/(2a)$ liegt. Zusammen ergeben sich also die drei Bedingungen

$$h(0) = c = 1 \text{ m}\,, \qquad h'(0) = b = \frac{1}{\tan(\alpha)} \approx 5.67\,, \qquad x_M = -b/(2a) = 1 \text{ m}\,.$$

Dies ergibt dann $a = -b/(2 \text{ m}) \approx -2.84/\text{m}$. Der Strahl trifft auf den Boden bei der Nullstelle $h(x) = 0$, also unter Anwenden der pq-Formel bei

$$x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}\,.$$

Von diesen beiden Werten ist nur $x_1 \approx 2.16$ m positiv und somit der gesuchte Punkt, an dem der Wasserstrahl auf den Boden trifft.