Aufgabe 1: Vektoren

a) Berechnen Sie den Betrag folgender Vektoren.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} , \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} , \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Normieren Sie die Vektoren $\vec{a}$ bis $\vec{d}$.

c) Berechnen Sie mit den Vektoren $\vec{a}$ bis $\vec{d}$

$$\begin{array}{llll} \vec{a}+\vec{b} \ , & \vec{a}-\vec{b} \ , & \vec{a}\cdot\vec{b} \ , & \vec{a}\times\vec{b} \ , \\ \vec{a}+\vec{c} \ , & \vec{a}-\vec{c} \ , & \vec{a}\cdot\vec{c} \ , & \vec{a}\times\vec{c} \ , \\ \vec{a}+\vec{d} \ , & \vec{a}-\vec{d} \ , & \vec{a}\cdot\vec{d} \ , & \vec{a}\times\vec{d} \ . \end{array}$$

d) Wie groß ist der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$; $\vec{a}$ und $\vec{c}$; $\vec{a}$ und $\vec{d}$?

e) Wie muss k gewählt werden, damit die Länge des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 3 \end{pmatrix}$ gleich 8 ist?

Aufgabe 2: Koordinatendarstellung von Vektoren

Schreiben Sie die folgenden Vektoren in Koordinatendarstellung ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ seien die drei kartesischen Basisvektoren).

a) $\vec{e} = -3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 12\vec{e}_3$

b) $\vec{f} = \vec{e}_3$

c) $\vec{g} = 2(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) - 7(\vec{e}_1 - \vec{e}_3) - 6(\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$

d) $\vec{h} = 4(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_3 + 5(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) - 2(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_3$

e) $\vec{i} = 3(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) - 6(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)$

f) $\vec{j} = (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_2 - (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + (\vec{e}_3 \times \vec{e}_2)$

Aufgabe 3: Abstand von Punkten

Berechnen Sie jeweils den Abstand der beiden Punkte im Koordinatensystem.

a) $(3,4) \quad ; \quad (-1,-4)$

b) $(6,-3) \quad ; \quad (-6,1)$

c) $(1,2,3) \quad ; \quad (4,5,6)$

Aufgabe 4: Darstellung einer Geraden

Bestimmen Sie die Parameterdarstellung sowie die parameterfreie Darstellung der Geraden, die durch die Punkte P, Q geht.

$$\mathrm{P} = (-1,1) \ , \qquad \mathrm{Q} = (1,4)$$

Aufgabe 5: Schnittwinkel von Geraden

Bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Geraden von Blatt 2, Aufgabe 9, indem Sie das Skalarprodukt von Vektoren verwenden.

Aufgabe 6: Differentiation

Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = x^8$

b) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$

c) $f(x) = (2 + x)(x^2 + 1)$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \sqrt{x}$

f) $f(x) = x\sqrt{x}$

g) $f(x) = \cos(7x)$

h) $f(x) = 6\sin(6x) - 3\cos(-3x)$

i) $f(x) = x^3 + 2\sin(2\pi x)$

j) $f(x) = \sin\left(x^2\right)$

k) $f(x) = \sin^2(x)$

l) $f(x) = 2\left(x^2 - 3\sqrt{x}\right)^6$

m) $f(x) = \sqrt{2x - 6x^4}$

n) $f(x) = \dfrac{(1 - 2x)^4}{(3 + 5x)^2}$

o) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + 2x}}$

p) $f(x) = \left(\dfrac{3x + 2}{4x - 2}\right)^2$

q) $f(x) = x^2\,\cos(x)$

r) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

s) $f(x) = \mathrm{e}^{2x-1}$

t) $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$

u) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$

v) $f(x) = \mathrm{e}^{(x+1)^2}$

w) $f(x) = \ln\left(\sqrt{2}x\right)$

x) $f(x) = \left[\ln(x)\right]^{-1}$

y) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x + 1}\right)$

z) $f(x) = \sin\left[\ln(x)\right]$

Aufgabe 7: Extremwertbestimmung

Von einem rechteckigen Blatt mit den Seitenlängen B und T wird an jeder Ecke ein Quadrat der Seitenlänge a ausgeschnitten und aus dem Rest wird eine Schachtel, die oben offen ist, gebildet. Wie muss a gewählt werden, damit das Volumen der Schachtel maximal ist?

Aufgabe 8: Kurvendiskussion

Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion

$$f(x) = -2x^3 - 5x^2 + 8x$$

durch. Diskutieren Sie insbesondere Symmetrie, asymptotisches Verhalten, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte, und skizzieren Sie die Funktion.

Aufgabe 9: Springbrunnen

Ein Springbrunnen ist 1 m über dem Boden auf einem Podest angebracht und erzeugt einen Wasserstrahl, der unter einem Winkel $\alpha = 10°$ zur Vertikalen das Podest verlässt. Aufgrund der Schwerkraft beschreibt die Höhe des Wasserstrahls eine Parabelform $h(x) = ax^2 + bx + c$. Das Maximum befindet sich 1 m vom Podest entfernt. Wo trifft der Strahl auf den Boden?