Aufgabe 1: Gleichungen

Lösen Sie folgende Gleichungen nach x auf.

a) $20x^2 + 5x = 0$: $x = 0$ oder $20x + 5 = 0$, also $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{5}{20} = -\frac{1}{4}$

b) $15x^2 - 4x - 2(73x + 10) = -(-x + 10)(2 + 15x) + 7$: Ausmultiplizieren und alle Terme auf eine Seite stellen liefert $15x^2 - 15x^2 - 4x - 146x - 20 - 7 + 20 - 2x + 150x = 0 \Rightarrow -2x - 7 = 0$, also $x = -\frac{7}{2}$

c) $x^2 + 2x + 1 = 0$: Erste binomische Formel liefert $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = 0$, also $x = -1$

d) $-2x + 2 - (x + 1)(x - 1) + x^2 = -1$: Ausmultiplizieren und alle Terme auf eine Seite stellen liefert $-2x + 2 - (x^2 - 1) + x^2 + 1 = 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0$, also $x = 2$

e) $\dfrac{1}{4}(4x + 8) = \dfrac{2}{3}(6x - 15)$: $\Rightarrow x + 2 - (4x - 10) = 0 \Rightarrow -3x + 12 = 0$, also $x = 4$

f) $x^2 - 9x + 14 = 0$: Mit pq-Formel $x_{1/2} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 14} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81-56}{4}} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{9\pm5}{2}$, also $x_1 = 2$, $x_2 = 7$

g) $x(x-5) = 2(1-2x)$: $\Rightarrow x^2 - 5x - 2 + 4x = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$, pq-Formel liefert $x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1\pm3}{2}$

h) $x - 4 = \dfrac{x}{x - 6}$: $\Rightarrow (x - 4)(x - 6) = x \Rightarrow x^2 - 10x + 24 = x \Rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0$, pq-Formel liefert $x_{1/2} = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - 24} = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121-96}{4}} = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{11\pm5}{2}$

i) $2 + 2x = \dfrac{x + 1}{x - 1}$: Auf beiden Seiten führt $x + 1 = 0$, also $x = -1$ dazu, dass der Ausdruck zu Null wird. Damit ist $x + 1 = 0$ eine Lösung. Für weitere Lösungen teilen wir beide Seiten durch $x + 1$ unter der Annahme, dass $x + 1 \neq 0$. Das liefert $2 = \frac{1}{x-1} \Rightarrow 2x - 2 = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$, also $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

j) $x^2 - 8x + 9 = 0$: pq-Formel liefert $x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 - 9} = 4 \pm \sqrt{7}$

k) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$: Substitution von $y = x^2$ führt zu $y^2 - 3y + 2 = 0$. pq-Formel liefert dann $y_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$, also $y_1 = 2$ und $y_2 = 1$. Aus $y = x^2$ ergeben sich dann die vier Lösungen $x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$ und $x_{3/4} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$.

l) $x^5 + 10x = 7x^3$: $x = 0$ führt dazu, dass beide Seiten verschwinden. Weitere Lösungen ergeben sich, indem wir durch x teilen unter der Annahme $x \neq 0$. Dann ergibt sich $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$. Substitution von $y = x^2$ und pq-Formel analog zu k) liefert $y_1 = 2$ und $y_2 = 5$, also $x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$, $x_{3/4} = \pm\sqrt{5}$ und natürlich $x_5 = 0$ wie anfangs festgestellt.

m) $2x + \sqrt{25 - x^2} = 0$: $2x$ auf die andere Seite stellen und Quadrieren beider Seiten liefert $25 - x^2 = 4x^2 \Rightarrow 25 = 5x^2 \Rightarrow x^2 = 5$, also $x_{1/2} = \pm\sqrt{5}$. Da es sich um eine Wurzelgleichung handelt, müssen wir die Lösungen noch überprüfen: (1) $2x_1 + \sqrt{25 - x_1^2} = 2\sqrt{5} + \sqrt{20} > 0$, also ist $x_1 = \sqrt{5}$ keine gültige Lösung! (2) $2x_2 + \sqrt{25 - x_2^2} = -2\sqrt{5} + \sqrt{20} = -\sqrt{20} + \sqrt{20} = 0$, also ist $x_2 = -\sqrt{5}$ die einzig gültige Lösung.

n) $\sqrt{x - 2} = \sqrt{x} - \sqrt{2}$: Quadrieren ergibt $x - 2 = x - 2\sqrt{x}\sqrt{2} + 2 = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x}\sqrt{2} = 4 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2}$, also $x = 2$. Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung bestätigt diese Lösung.

o) $\sqrt{4x+9}-\sqrt{3x-5}=2$: Quadrieren liefert $4x+9-2\sqrt{4x+9}\sqrt{3x-5}+3x-5=4$, Umstellen liefert $7x=2\sqrt{4x+9}\sqrt{3x-5}$. Erneutes Quadrieren führt auf $49x^2=48x^2-180+28x \Rightarrow x^2-28x+180=0$. pq-Formel führt dann zu $x_{1/2}=14\pm\sqrt{196-180}=14\pm 4$. Einsetzen beider Lösungen in die ursprüngliche Gleichung bestätigt diese.

p) $x-29\sqrt{x}=-100$: Substitution von $y=\sqrt{x}$ und Umstellen liefert $y^2-29y+100=0$. pq-Formel liefert dann $y=\frac{29}{2}\pm\sqrt{\frac{29^2}{4}-100}=\frac{29\pm\sqrt{29^2-400}}{2}=\frac{29\pm 21}{2}$, also $y_1=25=\sqrt{x_1}$ und $y_2=4=\sqrt{x_2}$. Damit ergibt sich $x_1=625$ und $x_2=16$. Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung bestätigt dieses Ergebnis.

q) $3^{2x-1}=3^{3x+5}$: $\log_3$ auf beiden Seiten nehmen liefert $2x-1=3x+5$, also $x=-6$.

r) $2^{2x+1}+2^{2x+1}=2^{5x-7}$: $\log_2$ auf beiden Seiten liefert $\log_2\left(2\cdot 2^{2x+1}\right)=5x-7 \Rightarrow \log_2\left(2^{2x+2}\right)=5x-7 \Rightarrow 2x+2=5x-7 \Rightarrow 3x=9 \Rightarrow x=3$.

s) $12\cdot 3^{2x-3}\cdot 2^{x-3}=6^{x-1}$: Wir können $6^{x-1}=2^{x-1}3^{x-1}$ schreiben. Wenn wir beide Seiten durch diesen Ausdruck teilen, liefert dies $12\cdot 3^{2x-3-(x-1)}\cdot 2^{x-3-(x-1)}=1 \Rightarrow 12\cdot 3^{x-2}\cdot 2^{-2}=1 \Rightarrow 3\cdot 3^{x-2}=1 \Rightarrow 3^{x-1}=1$. $\log_3$ auf beiden Seiten liefert $x-1=0$, also $x=1$.

t) $2^{-x+3}\cdot 5^{2x+12}=10^{3x+15}$: Wir können $10^{3x+15}=2^{3x+15}5^{3x+15}$ schreiben. Wenn wir beide Seiten durch diesen Ausdruck teilen, liefert dies $2^{-x+3-(3x+15)}5^{2x+12-(3x+15)}=1 \Rightarrow 2^{-4x-12}5^{-x-3}=1 \Rightarrow 2^{-4(x+3)}5^{-(x+3)}=1 \Rightarrow [2^{-4}5^{-1}]^{x+3}=1$. $\log_a$ auf beiden Seiten mit $a=2^{-4}5^{-1}$ liefert $x+3=0$, also $x=-3$.

Aufgabe 2: Lineare Gleichungssysteme

Lösen Sie folgende Gleichungssysteme.

a)

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: 3x+y &= 7 \\ \mathrm{II}: 4x-2y &= 6 \end{aligned}$$

II+2·I liefert $4x+6x=6+14 \Rightarrow 10x=20 \rightarrow x=2$, also $y=1$.

b)

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: 2x-5y &= -1 \\ \mathrm{II}: 5x-8y &= 11 \end{aligned}$$

2·II-5·I liefert $-16y+25y=22+5 \Rightarrow 9y=27 \Rightarrow y=3$, also $x=7$.

c)

$$\begin{aligned} \mathrm{I}: 2x-y+4z &= 5 \\ \mathrm{II}: 5x+2y-10z &= 7 \\ \mathrm{III}: 12x-9y-8z &= 11 \end{aligned}$$

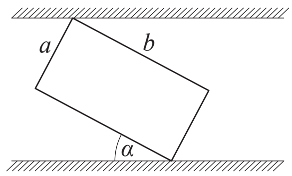
Wir können z eliminieren durch Bilden der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{III}+2\cdot\mathrm{I}: &\quad 16x-11y &= 21 \\ 2\cdot\mathrm{II}+5\cdot\mathrm{I}: &\quad 20x-y &= 39 \end{aligned}$$

Die zweite der beiden Gleichungen liefert $y=20x-39$. Einsetzen in die erste der beiden Gleichungen ergibt dann $16x-220x+429=21 \Rightarrow 408=204x \Rightarrow x=2$, also $y=1$, also $z=1/2$.

Aufgabe 3: Trigonometrie

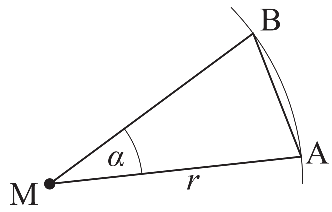
Eine rechteckige Kiste mit den Kantenlängen $a = 1.60$ m und $b = 3.10$ m blockiert eine Durchfahrt.
Wie breit ist die Durchfahrt, wenn $\alpha = 28°$ ist?



Ergebnis: Die Breite B lässt sich in zwei Teile unterteilen $B = B_1 + B_2$. Einerseits ergibt sich dadurch ein Dreieck mit Hypothenuse a und Ankathete B_1 zum Winkel α, also $B_1 = a\cos(\alpha)$. Andererseits ergibt sich ein Dreieck mit Hypothenuse b und Gegenkathete B_2 zum Winkel α, also $B_2 = b\sin(\alpha)$. Zusammen also $B = b\sin(\alpha) + a\cos(\alpha) \approx 2.87$m.

Aufgabe 4: Flächen von Dreiecken

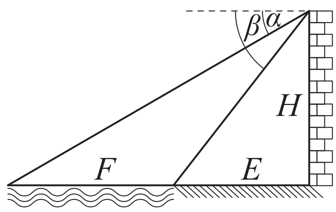
Wir betrachten einen Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r, in dem das Dreieck MAB liegt. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks. Benutzen Sie diese Formel, um den Flächeninhalt eines regelmäßigen n-Ecks, das in dem Kreis liegt, auszurechnen.



Ergebnis: Wir denken uns die Winkelhalbierende zum Winkel α. Diese habe die (noch zu bestimmende) Länge h und bildet ein rechtwinkliges Dreieck zusammen mit der Hypothenuse der Länge r und der Gegenkathete der Länge $\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{2}$ zum Winkel $\alpha/2$. Das ergibt $\sin(\alpha/2) = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{2r}$ und $\cos(\alpha/2) = \frac{h}{r}$. Die Fläche des dargestellten Dreiecks beträgt $F = \frac{1}{2}h\overline{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}r\cos(\alpha/2)2r\sin(\alpha/2) = r^2\cos(\alpha/2)\sin(\alpha/2)$. Mit Additionstheorem folgt $F = \frac{r^2}{2}\sin(\alpha)$. Für ein regelmäßiges n-Eck gilt: $\alpha = 2\pi/n$ und die Gesamtfläche beträgt $F_n = n \cdot F = n\frac{r^2}{2}\sin(2\pi/n)$.
Anmerkung: Wie Sie im Verlaufe ihres Studiums immer wieder verwenden werden, verhält sich $\sin(x)$ *für kleine* $x \ll 1$ *wie die Funktion* $f(x) = x$*. Schauen Sie sich dazu einfach einen Plot der Funktion an. Um* $x = 0$ *kann man den Graph in etwa durch diese Gerade approximieren. Die Näherung funktioniert immer besser, je kleiner* x *ist, also je näher* x *an Null kommt. Wenn wir im obigen Ergebnis nun* n *sehr groß werden lassen, sodass* $2\pi/n$ *sehr klein wird, so können wir* $\sin(2\pi/n) \approx 2\pi/n$ *nähern. Diese Näherung wird auch immer besser, je kleiner* $2\pi/n$*, also je größer* n*. Wenn wir nun den Grenzwert bilden* $\lim_{n\to\infty} F_n = \lim_{n\to\infty} n\frac{r^2}{2}\frac{2\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} \pi r^2 = \pi r^2$*, so ergibt sich der bekannte Flächeninhalt des Kreises, da der Kreis nichts anderes als ein Regelmäßiges n-Eck für* $n \to \infty$ *ist.*

Aufgabe 5: Trigonometrie

Ein Turm der Höhe $H = 30$ m steht in der Entfernung E von einem Fluss der Breite F entfernt. Eine Person auf dem Turm blickt auf den Fluss. Sie sieht das entfernte Ufer unter einem Tiefenwinkel von $\alpha = 14°$ und das nahe liegende Ufer unter einem Tiefenwinkel von $\beta = 30°$.
Wie breit ist der Fluss und wie weit ist er vom Turm entfernt?



Ergebnis: Es gilt $\tan(\pi/2 - \beta) = E/H$ und $\tan(\pi/2 - \alpha) = (E + F)/H$. Damit ergibt sich $E \approx 52$m und $F \approx 68$m.

Aufgabe 6: Sinus- und Kosinussatz

Berechnen Sie (unter anderem mit dem Sinus- und Kosinussatz) die fehlenden Seiten und Winkel im Dreieck. **Achtung: Es handelt sich nicht um rechtwinklige Dreiecke, also funktioniert der Satz des Pythagoras nicht! Sie sollten außerdem aufpassen, dass Sie nicht mit zu stark gerundeten Zwischenergebnissen weiterrechnen!**

a) $a = 4.6$ cm, $b = 6.4$ cm, $\beta = 33°$: Anwendung des Sinussatzes ergibt $\sin(\alpha) = a\sin(\beta)/b \Rightarrow \alpha = \arcsin[a\sin(\beta)/b] \approx 23°$. Winkelsumme im Dreieck ergibt $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 124°$. Weitere Anwendung des Sinussatzes ergibt $c = a\sin(\gamma)/\sin(\alpha) \approx 9.8$ cm.

b) $b = 2.6$ cm, $c = 3.5$ cm, $\alpha = 147.5°$: Kosinussatz ergibt $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)} \approx 5.9$ cm. Zwei Anwendungen des Sinussatzes ergeben $\beta = \arcsin[b\sin(\alpha)/a] \approx 13.8°$ und $\gamma = \arcsin[c\sin(\alpha)/a] \approx 18.7°$.

c) $a = 86$ mm, $b = 5$ cm, $c = 6.1$ cm: Aus dem Kosinussatz folgt $(b^2 + c^2 - a^2)/(2bc) = \cos(\alpha)$, also $\alpha \approx 101°$. Diese Formel gilt auch unter zyklischem Vertauschen, also $a, \alpha \to b, \beta$; $b, \beta \to c, \gamma$; $c, \gamma \to a, \alpha$ liefert die Formel $(c^2 + a^2 - b^2)/(2ca) = \cos(\beta)$ und somit $\beta \approx 35°$. Analog dazu bei weiterem zyklischen Vertauschen $(a^2 + b^2 - c^2)/(2ab) = \cos(\gamma)$, sodass $\gamma \approx 44°$.
Anmerkung: In der Vorlesung wurde der Kosinussatz hergeleitet. Dabei waren $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ natürlich nur willkürliche Bezeichnungen, wobei die Seite mit c im entsprechenden Bild 'unten' war. Wir können uns genauso gut ein gedrehtes Dreieck anschauen, sodass a 'unten' ist, bzw. b 'unten' ist. Dies entspricht genau dem zyklischen Vertauschen!

Aufgabe 7: Zeitfunktionen

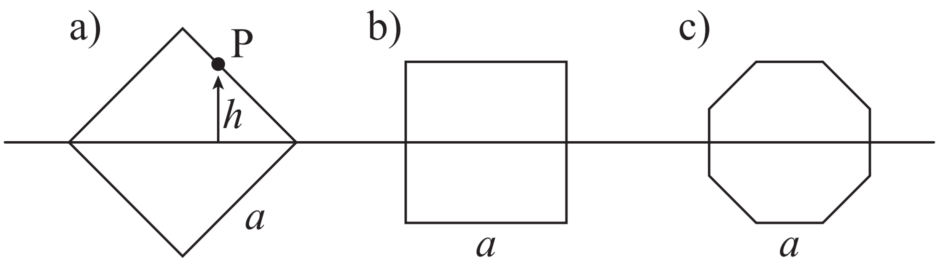
Ein Punkt P bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf den Kanten

a) eines auf der Spitze stehenden Quadrats der Seitenlänge a

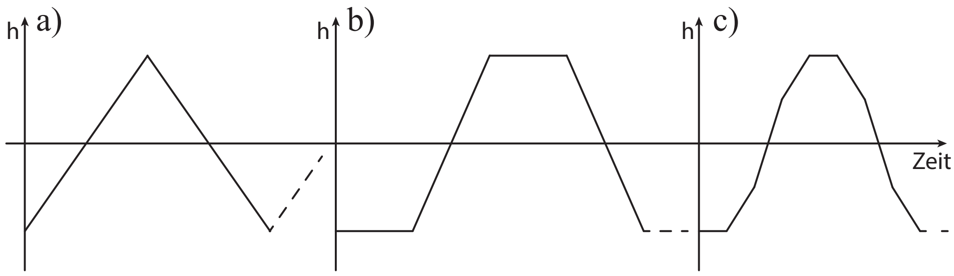
b) eines auf der Seite stehenden Quadrats der Seitenlänge a

c) eines regelmäßigen Achtecks der Seitenlänge a.

Skizzieren Sie seine Höhe $h(t)$ als Funktion der Zeit. Welchen Einfluss hat die Wahl des Startpunkts?



Ergebnis: Da die Geschwindigkeit konstant ist, ist die Bewegung periodisch. Bei Geschwindigkeit v ist die Periodendauer $T = a/v$, wobei a die Seitenlänge ist. Die Wahl des Startpunktes beeinflusst somit nur die Phase der periodischen Bewegung, also wo innerhalb der Periode wir uns zu einer bestimmten festen Zeit befinden.



Aufgabe 8: Additionstheoreme

Benutzen Sie die Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\beta)\sin(\alpha)\end{aligned}$$

um folgende Beziehung zu zeigen:

$$\sin(4\alpha) = 4\left[\sin(\alpha)\cos^3(\alpha)-\sin^3(\alpha)\cos(\alpha)\right]$$

Ergebnis:

$$\begin{aligned}\sin(4\alpha) &= \sin(2\alpha+2\alpha) = \sin(2\alpha)\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha)\cos(2\alpha)\\ &= 2\sin(\alpha+\alpha)\cos(\alpha+\alpha) = 2[\sin(\alpha)\cos(\alpha)+\sin(\alpha)\cos(\alpha)][\cos(\alpha)\cos(\alpha)-\sin(\alpha)\sin(\alpha)]\\ &= 4\sin(\alpha)\cos(\alpha)[\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)] = 4[\sin(\alpha)\cos^3(\alpha)-\sin^3(\alpha)\cos(\alpha)]\end{aligned}$$

Aufgabe 9: Schnittwinkel von Geraden

Bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Geraden

$$f(x) = -2x+5 \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{3}{2}x+1\ .$$

Ergebnis: Um den Schnittwinkel zu bestimmen, zeichnen wir ein Dreieck bestehend aus den Schnittpunkten von $f(x)$ mit der x-Achse und $g(x)$, sowie von $g(x)$ mit der x-Achse. Die Schnittpunkt von f und g mit der x-Achse liegen bei $f(x_f) = 0$, also $x_f = 5/2$, sowie $g(x_g) = 0$, also $x_g = -2/3$. Der Schnittpunkt von f und g liegt bei $f(x_{fg}) = g(x_{fg})$, also $7x_{fg}/2 = 4 \Rightarrow x_{fg} = 8/7$. Die beiden Funktionen schneiden sich somit auf der Höhe $y_{fg} = f(x_{fg}) = g(x_{fg}) = 19/7$. Damit ergeben sich die drei Eckpunkte des Dreiecks zu $A = (-2/3, 0)$, $B = (5/2, 0)$ und $C = (8/7, 19/7)$. Die gegenüberliegenden Seitenlängen sind damit $c = \overline{AB} = 19/6$, $a = \overline{BC} = \sqrt{(5/2-8/7)^2+(19/7)^2} \approx 3.03$ und $b = \overline{AC} \approx 3.26$ analog. Aus dem Kosinussatz folgt dann $\cos(\gamma) = (a^2+b^2-c^2)/(2ab)$ und damit der Schnittwinkel $\gamma \approx 60.3°$. Alternativ ist natürlich auch der Schnittwinkel $180° - \gamma \approx 119.7°$ zulässig.

Aufgabe 10: Polarkoordinaten

Stellen Sie folgende Punkte in Polarkoordinaten dar.

a) $P = (1, 1)$: $r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\tan(\varphi) = 1 \Rightarrow \varphi = \arctan(1) = 45°$

b) $P = (-1, -1)$: $r = \sqrt{2}$, $\tan(\varphi) = 1$, aber wir müssen beim Bilden des arctan vorsichtig sein, denn dieser bildet nur auf das Intervall von $-90°$ bis $90°$ ab, da der Tangens π-periodisch ist, also $\tan(\varphi+\pi) = \tan(\varphi)$. Die korrekte Lösung lautet hier nicht $\varphi = 45°$ wie in a), sondern $\varphi = 45° + 180° = 225°$. Dazu zeichnet man sich den Punkt am besten in ein Koordinatensystem ein analog zur Skizze in Kapitel 3.5. Man muss also vor allem dann aufpassen, wenn die x-Koordinate negativ wird!

c) $P = (4, -3)$: $r = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{5^2} = 5$, $\varphi = \arctan(-3/4) \approx -36.9° = 323.1°$.

d) $P = (7.5, 15)$: $r = \sqrt{7.5^2+(2\cdot 7.5)^2} = 7.5\sqrt{5} \approx 16.8$, $\varphi = \arctan(2) = 63.4°$.

e) $P = (17, 1)$: $r = \sqrt{290} \approx 17.03$, $\varphi = \arctan(1/17) \approx 3.4°$

Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten folgender Punkte.

f) $r = 5$, $\varphi = 395°$: $x = r\cos(\varphi) \approx 4.1$, $y = r\sin(\varphi) \approx 2.9$

g) $r = 7$, $\varphi = \dfrac{4\pi}{6}$: $x = -3.5$, $y \approx 6.1$

h) $r = 2$, $\varphi = 45°$: $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$