

Anmerkungen zu den Lösungen: Die Lösungen variieren in der Ausführlichkeit stark, sind aber typischerweise ausführlicher und teilweise formal sauberer gestaltet, als es von Ihnen im Rahmen eines Vorkurses zu erwarten ist. Lassen Sie sich daher nicht von der Darstellung der Lösungen abschrecken, sondern verstehen Sie es gegebenenfalls lieber als Möglichkeit, über die ein oder andere Aufgabe noch einmal kritisch nachzudenken. Diese Anmerkung gilt natürlich auch für alle folgenden Lösungsblätter des Vorkurses.

Aufgabe 1: Elementare Funktionen

Geben Sie für die angegebenen Funktionen den größtmöglichen Definitionsbereich (als Teilbereich der reellen Zahlen), sowie den zugehörigen Wertebereich an. Diskutieren Sie Symmetrie, Stetigkeit, Monotonie und asymptotisches Verhalten. Skizzieren Sie die Funktionen.

a) $f(x) = x^2$: $D = \mathbb{R}$; $W = \mathbb{R}_0^+$; $f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 x^2 = x^2 = f(x)$ gerade; überall in D stetig; weder monoton steigend noch monoton fallend; keine Asymptoten; Plot: https://www.wolframalpha.com/input?i=plot+x**2

b) $f(x) = e^{-x}$: $D = \mathbb{R}$; $W = \mathbb{R}^+$; $f(-x) = e^x \neq f(x)$ und $\neq -f(x)$, also weder gerade noch ungerade (keine Symmetrie); überall in D stetig; $f(x+a) = e^{-(x+a)} = e^{-a} e^{-x} < e^{-x} = f(x)$ für $a > 0$, also streng monoton fallend; geht asymptotisch gegen $y = 0$ für $x \rightarrow \infty$; Plot: [https://www.wolframalpha.com/input?i=plot+e**\(-x\)](https://www.wolframalpha.com/input?i=plot+e**(-x))

c) $f(x) = e^{-x^2}$: $D = \mathbb{R}$; $W = (0, 1]$; $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$ gerade; überall in D stetig; weder monoton steigend noch monoton fallend; geht asymptotisch gegen $y = 0$ für $x \rightarrow \pm\infty$; Plot: [https://www.wolframalpha.com/input?i=plot+e**\(-x**2\)](https://www.wolframalpha.com/input?i=plot+e**(-x**2))

d) $f(x) = \ln(x)$: $D = \mathbb{R}^+$; $W = \mathbb{R}$; $f(-x)$ existiert nicht für $x \in D$, also $x > 0$, da die Funktion nur für positive Argumente definiert ist, also keine Symmetrie; überall in D stetig; streng monoton steigend; geht asymptotisch gegen die Senkrechte $x = 0$ für $x \rightarrow 0$; Plot: [https://www.wolframalpha.com/input?i=plot+ln\(x\)](https://www.wolframalpha.com/input?i=plot+ln(x))

Zusatzinfo zur Monotonie: Kann man sich darüber klar machen, dass e^x streng monoton steigend ist, also aus $y_2 > y_1$ folgt, dass $e^{y_2} > e^{y_1}$ (und umgekehrt). Da weiterhin gilt, dass $e^{f(x_i)} = e^{\ln(x_i)} = x_i$ für $i = 1, 2$, folgt $e^{f(x_2)} > e^{f(x_1)}$ für $x_2 > x_1$ und somit $f(x_2) > f(x_1)$ aus der strengen Monotonie der e -Funktion

e) $f(x) = \sqrt{x}$: $D = \mathbb{R}_0^+$, $W = \mathbb{R}_0^+$, $f(-x)$ ist nicht definiert für $x > 0$, also keine Symmetrie; überall in D stetig; streng monoton steigend; keine Asymptoten; Plot: [https://www.wolframalpha.com/input?i=plot+sqrt\(x\)](https://www.wolframalpha.com/input?i=plot+sqrt(x))

Zusatzinfo zur Monotonie: Kann man sich darüber klar machen, dass x^2 streng monoton steigend ist im Bereich $x \geq 0$, also aus $y_2 > y_1 > 0$ folgt, dass $y_2^2 > y_1^2$ (und umgekehrt). Da weiterhin gilt, dass $f(x_i)^2 = \sqrt{x_i}^2 = x_i$ für $i = 1, 2$, folgt $f(x_2)^2 > f(x_1)^2$ für $x_2 > x_1$ und somit $f(x_2) > f(x_1)$ aus der strengen Monotonie der quadratischen Funktion x^2 für $x \geq 0$

f) $f(x) = \frac{1}{x}$: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$ ungerade; nicht stetig; keine Monotonie; horizontale Asymptote $y = 0$ für $x \rightarrow \pm\infty$, vertikale Asymptote $x = 0$ für $x \rightarrow 0^\pm$; Plot: <https://www.wolframalpha.com/input?i=plot+1/x>

Zusatzinfo zur Stetigkeit: springt von $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ zu $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ im Bereich $x = 0$, $x \rightarrow 0^+$ heißt hier $x \rightarrow 0$ aber unter der Einschränkung, dass $x > 0$ sein muss bis der Grenzwert erreicht wird. Analog für $x \rightarrow 0^-$, welches $x < 0$ impliziert.

Aufgabe 2: Symmetrie

Geben Sie an, ob es sich bei den nachfolgenden Funktionen um gerade oder ungerade Funktionen handelt.
Hinweis: Hier werden in den Lösungen teilweise Begründungen für die Angaben zur Symmetrie gegeben. Dies soll der Nachvollziehbarkeit dienen, ist aber nicht von der Aufgabenstellung verlangt.

- a) $f(x) = 3x^3 + 7x^2 + \frac{1}{2}x$: $f(-x) = -3x^3 + 7x^2 - \frac{1}{2}x \neq f(-x)$ und $\neq -f(x)$, also keine Symmetrie
- b) $f(x) = \frac{4x^6 + 16x^2}{x^2 + 4}$: $f(-x) = f(x)$ gerade, da $(-x)^{2n} = (-1)^{2n}(x)^{2n} = ((-1)^2)^n x^{2n} = 1^n x^{2n} = x^{2n}$
gerade für $n \in \mathbb{Z}$
- c) $f(x) = -\frac{7}{x}$: $f(-x) = -f(x)$ ungerade, da $(-x)^{2n+1} = (-1)^{2n+1}(x)^{2n+1} = (-1)^{2n}(-1)(x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$ ungerade für $n \in \mathbb{Z}$, hier im Speziellen $n = -1$
- d) $f(x) = e^{-15x^2 + \frac{1}{2}}$: gerade, siehe Argumentation in b)
- e) $f(x) = \sqrt{x+1}$: keine Symmetrie, $f(-x) = \sqrt{-x+1} \neq f(x)$ und $\neq -f(x)$
- f) $f(x) = \sqrt{27+x^2}$: gerade, siehe b)
- g) $f(x) = x^2(2+x) - 4x^2$: keine Symmetrie, analog zur Argumentation in a) und e)
- h) $f(x) = \exp\left(\frac{1}{5}x\right)$: keine Symmetrie
- i) $f(x) = x^2 e^{-|x|}$: gerade, da x^2 gerade (siehe b) und die Betragsfunktion gerade ist $|-x| = |x|$

Aufgabe 3: Verkettung von Funktionen

Bilden Sie die Funktionen $f(x) = (u \circ v)(x) = u[v(x)]$ und $g(x) = (v \circ u)(x) = v[u(x)]$.

- a) $u(x) = 2 + 5x$, $v(x) = 2 - 3x$: $f(x) = u[v(x)] = 2 + 5v(x) = 2 + 10 - 15x = 12 - 15x$,
 $g(x) = v[u(x)] = 2 - 3u(x) = 2 - 6 - 15x = -4 - 15x$
- b) $u(x) = 2 + x$, $v(x) = x^2$: $f(x) = u[v(x)] = 2 + v(x) = 2 + x^2$, $g(x) = v[u(x)] = u(x)^2 = (2+x)^2$
- c) $u(x) = 1 - x^2$, $v(x) = (1-x)^2$: $f(x) = 1 - v(x)^2 = 1 - (1-x)^4$, $g(x) = [1 - u(x)]^2 = (1 - 1 + x^2)^2 = x^4$
- d) $u(x) = e^x$, $v(x) = x^2$: $f(x) = e^{v(x)} = e^{x^2}$, $g(x) = u(x)^2 = (e^x)^2 = e^{2x}$
- e) $u(x) = \frac{1}{4+x^2}$, $v(x) = \frac{2}{x}$: $f(x) = \frac{1}{4 + (2/x)^2} = \frac{x^2}{4x^2 + 4}$, $g(x) = \frac{2}{\frac{1}{4+x^2}} = 2(4+x^2) = 8 + 2x^2$
- f) $u(x) = 1 + x^3$, $v(x) = 2 \ln(x)$: $f(x) = 1 + [2 \ln(x)]^3$, $g(x) = 2 \ln(1 + x^3)$
- g) $u(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $v(x) = \frac{4}{x}$: $f(x) = \sqrt{\frac{16}{x^2} + 1}$, $g(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Aufgabe 4: Umkehrfunktion

Bilden Sie die Umkehrfunktion $\bar{f}(y)$ zu

$$y = f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Diskutieren Sie den Definitions- und Wertebereich. Skizzieren Sie $f(x)$ und $\bar{f}(x)$. Wie hängen diese beiden Graphen zusammen? Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie $(\bar{f} \circ f)(x)$, sowie $(f \circ \bar{f})(x)$ berechnen.

Umkehrfunktion berechnen: Man bildet zunächst (i) $x = f(y) = \frac{1}{1-y}$, welches sich umformen lässt zu $1-y = \frac{1}{x}$ und somit zu $y = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Aus der Eigenschaft $\bar{f}[f(y)] \stackrel{!}{=} y$ und (i) erkennen wir, dass $y = \bar{f}[f(y)] = \bar{f}(x)$, also das so umgeformte y unsere gesuchte Umkehrfunktion ist, also

$$\bar{f}(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}.$$

Definitions- und Wertebereich: Der größtmögliche reelle Definitionsbereich für $f(x)$ ist $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Der zugehörige Wertebereich ist $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für die Umkehrfunktion lauten diese $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $W = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Überprüfen des Ergebnisses:

$$\bar{f}[f(x)] = \frac{f(x)-1}{f(x)} = \frac{\frac{1}{1-x}-1}{\frac{1}{1-x}} = 1 - (1-x) = x$$

$$f[\bar{f}(x)] = \frac{1}{1-\bar{f}(x)} = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{x-(x-1)}{x}} = \frac{x}{x-x+1} = x$$

Skizzen: Ein Plot der beiden Funktionen findet sich unter [https://www.wolframalpha.com/input?i=plot+1/\(1-x\), \(x-1\)/x](https://www.wolframalpha.com/input?i=plot+1/(1-x), (x-1)/x). Diese sind spiegelsymmetrisch bezüglich der Geraden $y = x$.

Aufgabe 5: Rechnen mit Potenzen

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke (es sei $n \in \mathbb{N}$).

a) $(0,3)^6 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^6 = \left(\frac{3}{10} \cdot \frac{10}{3}\right)^6 = 1^6 = 1$

b) $2^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2 \cdot 2^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2 \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)^4 = 2$

c) $2^n \left(\frac{x}{2}\right)^n x = \left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)^n \cdot x = x^n \cdot x = x^{n+1}$

d) $\left(\frac{a-b}{c}\right)^{2n} \left(\frac{c}{b-a}\right)^{2n} = \left(\frac{a-b}{c} \cdot \frac{c}{b-a}\right)^{2n} = \left(\frac{a-b}{b-a}\right)^{2n} = (-1)^{2n} = [(-1)^2]^n = 1^n = 1$

e) $(a-b)^n + (b-a)^n = (a-b)^n + (-1)^n (a-b)^n = [1 + (-1)^n] (a-b)^n = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ 2(a-b)^n, & n \text{ gerade} \end{cases}$

f) $\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{(e^x)^2 - (e^{-x})^2}{e^x - e^{-x}} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{e^x - e^{-x}} = e^x + e^{-x}$

g) $e^{-x} e^{-x+2} e^{2x+3} = e^{-x-x+2} e^{2x+3} = e^{-2x+2+2x+3} = e^5$

h) $\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}} = \frac{e^{3x+1} e^{x-2}}{e^{-x+2} e^{x-2}} = \frac{e^{3x+1+x-2}}{e^{-x+2+x-2}} = \frac{e^{4x-1}}{e^0} = e^{4x-1}$

i) $\frac{1}{e^{2x}} + 3(e^{-x})^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2 = \frac{1}{(e^x)^2} + \frac{3}{(e^x)^2} - \frac{4}{(e^x)^2} = \frac{1+3-4}{(e^x)^2} = \frac{0}{(e^x)^2} = 0$

Aufgabe 6: Zerlegen von Logarithmen

Schreiben Sie folgende Ausdrücke als Summe bzw. Produkt von Logarithmen mit möglichst einfachen Funktionsargumenten:

$$\begin{aligned} \text{a) } \ln \left(\sqrt{\frac{3x^2\sqrt{y}}{2y^2\sqrt{x}}} \right) &= \ln \left[\left(\frac{3}{2} \frac{x^{3/2}}{y^{3/2}} \right)^{1/2} \right] = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3}{2} \frac{x^{3/2}}{y^{3/2}} \right) = \frac{1}{2} [\ln(3/2) + \ln(x^{3/2}) - \ln(y^{3/2})] \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} \ln(x) - \frac{3}{2} \ln(y) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \ln \left(\frac{\sqrt[3]{u}}{v^2 - w^2} \right) &= \ln(u^{1/3}) - \ln(v^2 - w^2) = \frac{1}{3} \ln(u) - \ln[(v-w)(v+w)] \\ &= \frac{1}{3} \ln(u) - \ln(v-w) - \ln(v+w) \end{aligned}$$

$$\text{c) } \ln \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) = \ln(4/3) + \ln(\pi) + \ln(r^3) = \ln(4/3) + \ln(\pi) + 3 \ln(r)$$

$$\text{d) } \ln \left[x^{\ln(x)} \right] = \ln(x) \ln(x) = [\ln(x)]^2$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \ln \left(\sqrt[4]{c \sqrt[3]{b\sqrt{a}}} \right) &= \frac{1}{4} \ln \left(c \sqrt[3]{b\sqrt{a}} \right) = \frac{1}{4} \ln(c) + \frac{1}{4} \ln \left(\sqrt[3]{b\sqrt{a}} \right) = \frac{1}{4} \ln(c) + \frac{1}{12} \ln(b\sqrt{a}) \\ &= \frac{1}{4} \ln(c) + \frac{1}{12} \ln(b) + \frac{1}{12} \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{4} \ln(c) + \frac{1}{12} \ln(b) + \frac{1}{24} \ln(a) \end{aligned}$$

Aufgabe 7: Zusammenfassen von Logarithmen

Fassen Sie folgende Terme zu einem einzelnen Logarithmus zusammen.

$$\text{a) } 2 \ln(u^2) + \frac{1}{2} \ln(uv) - 4 \ln\left(\frac{u}{v^2}\right) = \ln(u^4) + \ln(\sqrt{uv}) - \ln\left(\frac{u^4}{v^8}\right) = \ln\left(v^8 \sqrt{uv} \frac{u^4}{u^4}\right) = \ln(v^8 \sqrt{uv})$$

$$\text{b) } \ln(a^2 b^2) - 2 \ln(ab^2) = \ln(a^2 b^2) - \ln(a^2 b^4) = \ln\left(\frac{a^2 b^2}{a^2 b^4}\right) = \ln\left(\frac{1}{b^2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{1}{3} \left\{ \ln(a) + \frac{1}{3} \ln(a-b) - 2 \left[\ln(b) + \frac{1}{3} \ln\left(\frac{a}{b^2}\right) \right] \right\} &= \frac{1}{3} \left\{ \ln(a) + \ln(\sqrt[3]{a-b}) - \ln(b^2) - \ln\left[\left(\frac{a}{b^2}\right)^{2/3}\right] \right\} \\ &= \frac{1}{3} \ln\left(\frac{a}{a^{2/3}} \frac{b^{4/3}}{b^2} \sqrt[3]{a-b}\right) = \frac{1}{3} \ln\left[\frac{a^{1/3}}{b^{2/3}} (a-b)^{1/3}\right] = \frac{1}{9} \ln\left(\frac{a^2 - ab}{b^2}\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 8: Herleitung der Logarithmusregeln

Wie in Kap. 1.2.5 besprochen ist der Logarithmus definiert als

$$a^{\log_a(x)} = x.$$

Zeigen Sie, dass die drei dort angegebenen Rechenregeln für Logarithmen direkt aus den Rechenregeln für Exponentialfunktionen folgen, die in Kapitel 1.2.4 angegeben sind.

Regel 1: Zu zeigen: $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

$$a^{\log_a(x) + \log_a(y)} \stackrel{\text{Exp.-Regel}}{=} a^{\log_a(x)} a^{\log_a(y)} \stackrel{\text{Def. Log.}}{=} xy \stackrel{\text{Def. Log.}}{=} a^{\log_a(xy)}$$

Logarithmus $\log_a$ auf beiden Seiten nehmen liefert das zu zeigende Ergebnis. *Anmerkung: Dies funktioniert formal gesehen nur, weil $y = \log_a(x)$ eindeutig ist in dem Sinne, dass es für jedes y genau ein x gibt. Diese Eigenschaft einer Funktion nennt man injektiv. Solche Eigenschaften werden in den Mathe-Vorlesungen detailliert besprochen. Die Funktion $f(x) = x^2$ ist beispielsweise nicht injektiv, da es für $y = 4 = f(x)$ die beiden Werte $x = \pm 2$ gibt.*

Regel 3: Zu zeigen: $\log_a(x^p) = p \log_a(x)$.

$$a^{p \log_a(x)} \stackrel{\text{Exp.-Regel}}{=} \left[a^{\log_a(x)} \right]^p \stackrel{\text{Def. Log.}}{=} x^p$$

Logarithmus $\log_a$ auf beiden Seiten nehmen liefert das zu zeigende Ergebnis.

Regel 2: Zu zeigen: $\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$. Folgt aus Regel 1 und Regel 3, da

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) \stackrel{\text{Regel 1}}{=} \log_a(x) + \log_a\left(\frac{1}{y}\right) = \log_a(x) + \log_a(y^{-1}) \stackrel{\text{Regel 3}}{=} \log_a(x) - \log_a(y).$$

Aufgabe Bonus: Irrationalität von $\sqrt{2}$

Gerade Zahlen sind solche ganzen Zahlen, die durch zwei teilbar sind, sich also eindeutig schreiben lassen als $p = 2m$ für ein bestimmtes $m \in \mathbb{Z}$. Ungerade Zahlen sind solche ganzen Zahlen, die sich nicht durch zwei Teilen lassen, also eindeutig geschrieben werden können als $p = 2m + 1$ für ein bestimmtes $m \in \mathbb{Z}$. Jede ganze Zahl ist somit entweder gerade oder ungerade.

- a) Zeigen Sie, dass das Quadrat einer geraden Zahl selbst auch gerade ist und das Quadrat einer ungeraden Zahl selbst auch ungerade ist.

Gerade Zahlen: Sei $p = 2m$ gerade, also $m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $p^2 = (2m)(2m) = 2(2m^2)$ ist gerade, da $2m^2 \in \mathbb{Z}$.

Ungerade Zahlen: Sei $p = 2m+1$ ungerade, also $m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $p^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$ ist ungerade, da $2m^2 + 2m \in \mathbb{Z}$.

- b) Zeigen Sie, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist.

1. Annahme $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}^+$ teilerfremd.

2. $2 = \sqrt{2}^2 = p^2/q^2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$. Damit ist p^2 gerade. Laut a) ist das Quadrat einer geraden Zahl immer gerade und das Quadrat einer ungeraden Zahl immer ungerade. Damit kann p nicht ungerade sein, sonst wäre p^2 ungerade. Also muss p gerade sein.

3. Wir können $p = 2r$ schreiben mit $r \in \mathbb{Z}$, da p gerade. Damit folgt nach **2.** $2 = p^2/q^2 = (2r)^2/q^2 = 4r^2/q^2 \Rightarrow 2q^2 = 4r^2 \Rightarrow q^2 = 2r^2$. Damit ist q^2 gerade und somit q gerade analog zur Argumentation in **2.**

Widerspruch: Die Annahme in **1.** war, dass $\sqrt{2}$ rational ist, was implizierte, dass wir p und q teilerfremd wählen können. Unter dieser Annahme haben wir gezeigt, dass p und q beides gerade Zahlen sind, also jeweils durch zwei teilbar. Das heißt, dass p und q nicht teilerfremd sind. Die Annahme in **1.** wurde somit zum Widerspruch geführt, sie muss also falsch sein. Das heißt $\sqrt{2}$ kann nicht rational sein, sondern ist irrational.