Hinweise zu den Übungsaufgaben:

Die Übungsblätter des Vorkurses sind bewusst umfangreich gestaltet, sodass Ihnen eine große Auswahl an Aufgaben zur Verfügung steht. **Es geht keineswegs darum, alle Teilaufgaben zu bearbeiten.** Sie sollten sich vielmehr selbst überlegen, welche Themenbereiche Sie zum Beispiel etwas mehr üben wollen, und welche Sie schon ganz gut verstanden haben. Als konkretes Beispiel: Aufgabe 3 zur Verkettung von Funktionen hat 7 Teilaufgaben. Wenn Sie das Gefühl haben, Sie müssen dieses Themengebiet noch viel üben, so können Sie natürlich alle Teilaufgaben bearbeiten. Wenn Sie nach den ersten Teilaufgaben denken, dass Sie das Thema schon ausreichend verstanden haben, so können Sie natürlich auch einfach mit der nächsten Aufgabe weitermachen. **Generell steht es Ihnen vollkommen frei, die Aufgaben so zu bearbeiten, wie es Ihnen gefällt und Ihnen am besten hilft, die in der Vorlesung besprochenen Themen zu vertiefen!** Diese Anmerkung gilt natürlich auch für alle folgenden Übungsblätter des Vorkurses.

Aufgabe 1: Elementare Funktionen

Geben Sie für die angegebenen Funktionen den größtmöglichen Definitionsbereich (als Teilbereich der reellen Zahlen), sowie den zugehörigen Wertebereich an. Diskutieren Sie Symmetrie, Stetigkeit, Monotonie und asymptotisches Verhalten. Skizzieren Sie die Funktionen.

a) $f(x) = x^2$	d) $f(x) = \ln(x)$
b) $f(x) = e^{-x}$	e) $f(x) = \sqrt{x}$
c) $f(x) = e^{-x^2}$	f) $f(x) = \frac{1}{x}$

Aufgabe 2: Symmetrie

Geben Sie an, ob es sich bei den nachfolgenden Funktionen um gerade oder ungerade Funktionen handelt.

a) $f(x) = 3x^3 + 7x^2 + \frac{1}{2}x$	e) $f(x) = \sqrt{x+1}$
b) $f(x) = \frac{4x^6 + 16x^2}{x^2 + 4}$	f) $f(x) = \sqrt{27 + x^2}$
c) $f(x) = -\frac{7}{x}$	g) $f(x) = x^2(2+x) - 4x^2$
d) $f(x) = e^{-15x^2 + \frac{1}{2}}$	h) $f(x) = \exp\left(\frac{1}{5}x\right)$
	i) $f(x) = x^2e^{- x }$

Aufgabe 3: Verkettung von Funktionen

Bilden Sie die Funktionen $f(x) = (u \circ v)(x) = u[v(x)]$ und $g(x) = (v \circ u)(x) = v[u(x)]$.

a) $u(x) = 2+5x$	$v(x) = 2 - 3x$		
b) $u(x) = 2 + x$	$v(x) = x^2$	e) $u(x) = \frac{1}{4+x^2}$	$v(x) = \frac{2}{x}$
c) $u(x) = 1-x^2$	$v(x) = (1-x)^2$	f) $u(x) = 1+x^3$	$v(x) = 2\ln(x)$
d) $u(x) = e^x$	$v(x) = x^2$	g) $u(x) = \sqrt{x^2+1}$	$v(x) = \frac{4}{x}$

Aufgabe 4: Umkehrfunktion

Bilden Sie die Umkehrfunktion $\bar{f}(y)$ zu

$$y = f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Diskutieren Sie den Definitions- und Wertebereich. Skizzieren Sie $f(x)$ und $\bar{f}(x)$. Wie hängen diese beiden Graphen zusammen? Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie $(\bar{f} \circ f)(x)$, sowie $(f \circ \bar{f})(x)$ berechnen.

Aufgabe 5: Rechnen mit Potenzen

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke (es sei $n \in \mathbb{N}$).

- a) $(0,3)^6 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^6$
- b) $2^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$
- c) $2^n \left(\frac{x}{2}\right)^n x$
- d) $\left(\frac{a-b}{c}\right)^{2n} \left(\frac{c}{b-a}\right)^{2n}$
- e) $(a-b)^n + (b-a)^n$
- f) $\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^x - e^{-x}}$, *Hinweis: dritte binomische Formel*
- g) $e^{-x} e^{-x+2} e^{2x+3}$
- h) $\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}}$
- i) $\frac{1}{e^{2x}} + 3(e^{-x})^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2$

Aufgabe 6: Zerlegen von Logarithmen

Schreiben Sie folgende Ausdrücke als Summe bzw. Produkt von Logarithmen mit möglichst einfachen Funktionsargumenten:

- a) $\ln\left(\sqrt{\frac{3x^2\sqrt{y}}{2y^2\sqrt{x}}}\right)$
- b) $\ln\left(\frac{\sqrt[3]{u}}{v^2 - w^2}\right)$
- c) $\ln\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$
- d) $\ln\left[x^{\ln(x)}\right]$
- e) $\ln\left(\sqrt[4]{c^3 b \sqrt{a}}\right)$

Aufgabe 7: Zusammenfassen von Logarithmen

Fassen Sie folgende Terme zu einem einzelnen Logarithmus zusammen.

- a) $2 \ln(u^2) + \frac{1}{2} \ln(uv) - 4 \ln\left(\frac{u}{v^2}\right)$
- b) $\ln(a^2 b^2) - 2 \ln(ab^2)$
- c) $\frac{1}{3} \left\{ \ln(a) + \frac{1}{3} \ln(a-b) - 2 \left[\ln(b) + \frac{1}{3} \ln\left(\frac{a}{b^2}\right) \right] \right\}$

Aufgabe 8: Herleitung der Logarithmusregeln

Wie in Kap. 1.2.5 besprochen ist der Logarithmus definiert als

$$a^{\log_a(x)} = x.$$

Zeigen Sie, dass die drei dort angegebenen Rechenregeln für Logarithmen direkt aus den Rechenregeln für Exponentialfunktionen folgen, die in Kapitel 1.2.4 angegeben sind.

Aufgabe Bonus: Irrationalität von $\sqrt{2}$

Gerade Zahlen sind solche ganzen Zahlen, die durch zwei teilbar sind, sich also eindeutig schreiben lassen als $p = 2m$ für ein bestimmtes $m \in \mathbb{Z}$. Ungerade Zahlen sind solche ganzen Zahlen, die sich nicht durch zwei Teilen lassen, also eindeutig geschrieben werden können als $p = 2m + 1$ für ein bestimmtes $m \in \mathbb{Z}$. Jede ganze Zahl ist somit entweder gerade oder ungerade.

- a) Zeigen Sie, dass das Quadrat einer geraden Zahl selbst auch gerade ist und das Quadrat einer ungeraden Zahl selbst auch ungerade ist.
- b) Zeigen Sie, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor:
1. Nehmen Sie zunächst an, $\sqrt{2}$ sei eine rationale Zahl. Dann lässt sich diese Zahl **eindeutig**

schreiben als

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

wobei p und q ganze, positive (da $\sqrt{2}$ positiv ist) und **teilerfremde** Zahlen sind, das heißt man kann den Ausdruck $\frac{p}{q}$ nicht weiter kürzen!

2. Quadrieren Sie den Ausdruck für $\sqrt{2}$ und zeigen Sie, dass daraus folgt, dass p eine gerade Zahl sein muss, indem Sie das Ergebnis aus a) verwenden.

3. Da nach **2.** p eine gerade Zahl sein muss, schreiben Sie $p = 2r$, wobei r eine ganze Zahl $r \in \mathbb{Z}$ ist. Zeigen Sie damit, dass q auch eine gerade Zahl sein muss.

Ergebnis: Damit haben Sie die Annahme aus **1.** zum Widerspruch geführt, denn wenn p und q beide gerade sind, können sie nicht teilerfremd sein, da man einen Faktor 2 aus p/q rauskürzen könnte. Es wurde also gezeigt, dass die Annahme aus **1.** ' $\sqrt{2}$ ist rational' nicht richtig sein kann. Damit folgt, dass $\sqrt{2}$ nicht rational, also irrational ist. Ein solches Vorgehen nennt man in der Beweisführung einen Widerspruchsbeweis.