

Auf der Suche nach Strukturen komplexer Phänomene

Volkhard Nordmeier, H.-Joachim Schlichting
Universität Essen

*Es kann nicht mehr darum gehen,
ins Innere der Dinge einzudringen, sondern darum,
ihre FINITEN Erscheinungsformen zu erschließen,
das heißt, ihre wahrnehmbaren, greifbaren
- oder zählbaren Formen.*

Paul Valéry

Komplexe Signale

Der Mensch wird tagtäglich mit einer Vielzahl an Wahrnehmungen konfrontiert und reagiert ständig auf Reize verschiedenster Herkunft. Viele der Signale können wir dabei ohne Schwierigkeiten erfassen: ein Gespräch mit dem Nachbarn, der Brief eines alten Bekannten, die Nachrichtensendung im Radio oder die Reportage in der Zeitung. Aber ebenso existieren eine Vielzahl von Signalen aus Natur und Technik, die uns fremdartig oder unverständlich, ja sogar rein zufällig erscheinen: ein Buch oder eine Zeitung in fremder Sprache, der Gesang eines Vogels oder eines Pottwals, das nächtliche Rauschen eines Fernsehgerätes oder das Piepsen eines versehentlich angerufenen Faxgerätes, die Fehlermeldungen einer unbekannten Computeroberfläche, das Plätschern eines Baches oder das Rascheln der Blätter eines Baumes.

Diese Signale haben eines gemeinsam: Sie sind komplex und für uns zunächst unverständlich, so daß wir sie oftmals sogar als zufällig bzw. stochastisch oder einfach als Rauschen bezeichnen. Trotzdem läßt sich die Komplexität in vielen Fällen insofern reduzieren, als beispielsweise aus dem Gesang des Vogels eine Nachtigall und aus dem Rascheln der Blätter eine Pappel erkannt werden kann. Eine derartige Entscheidung fällt allerdings nicht immer so leicht. Manche für uns unbekannte Signale enthalten weder eine erkennbare Regelmäßigkeit noch einen Hinweis auf ihre Herkunft.

Wir wollen daher im folgenden der Frage nachgehen, in wie weit beliebigen komplexen Signalen 'anzusehen' ist, ob sie einen rein zufälligen Charakter besitzen oder von einem i.e.S. sinnvoll agierenden System ausgehen bzw. einen deterministischen Ursprung haben. Dabei wird es vor allem darum gehen, in den komplexen Signalen gestalthafte Zusammenhänge bzw. morphologische Muster zu erkennen. Das aus der klassischen Physik vertraute Aufdecken funktionaler Zusammenhänge spielt hier eine untergeordnete Rolle.

Wie mißt man Komplexität ?

Bei der Erfassung und Charakterisierung komplexer Phänomene spielen typische Äußerungen (Signale) der zugrundeliegenden Systeme eine wesentliche Rolle. Oft zeigen die aus experimentellen Untersuchungen ermittelten Zeitserien von Meßdaten ein derart irreguläres bzw. komplexes Verhalten, daß der Unterscheidung von Signalen, die von einem deterministischen System herrühren und solchen, die rein zufälliger Natur sind, eine besondere Bedeutung zukommt. Läßt sich einem solchen Signal eine deterministische (chaotische) Herkunft nachweisen, so kann versucht werden, aus dem ermittelten zeitlichen Verhalten der Meßgröße ein Modell zur mathematischen bzw. physikalischen Beschreibung des Systems zu erstellen.

Dabei geht man von dem überraschenden Befund der Chaosphysik aus, daß extrem einfache Systeme, also solche, die mit sehr wenigen - allerdings nichtlinearen - Differentialgleichungen beschrieben werden, zu völlig irregulärem chaotischen Verhalten in der Lage sind, das sich auf den ersten Blick nicht von stochastischem Verhalten zu unterscheiden scheint.

Sollte es nun umgekehrt gelingen, unbekannten irregulären Signalen 'anzusehen', daß sie von derart einfachen Systemen herrühren (ohne die Systeme im einzelnen kennen zu müssen), so hätte man ein Verfahren zur Unterscheidung von stochastischen und chaotischen Signalen zur Hand.

Ein derartiges Verfahren soll im weiteren vorgestellt werden. Mit ihm gelingt es, den 'Grad an Komplexität' von verschiedenen irregulären Signalen zu bestimmen.

Stochastisches Verhalten ist rein zufällig und in sofern völlig uninteressant, als man darüber nichts anderes sagen kann, als was es selbst offenbart. Chaotisches Verhalten ist zwar ebenfalls irregulär und vom Zufall bestimmt, weist aber gewisse zeitliche Korrelationen (d.h. Zusammenhänge zwischen aufeinanderfolgenden Meßpunkten) auf, wenn auch - anders als bei klassisch deterministischem Vorgängen - nur mehr oder weniger stark begrenzt.

Die zeitlichen und räumlichen 'Strukturen' komplexer Systeme werden im Rahmen der nichtlinearen Physik seit etwa zwei Jahrzehnten mit Hilfe neuer Theorien und Methoden erforscht. Die auf diesem Gebiet sehr erfolgreiche Chaosforschung versucht dabei u.a., Gesetzmäßigkeiten aufzuspüren, die in den komplexen Signalen verborgen sind.

Chaotische Systeme zeigen insbesondere sensitive Abhängigkeit der Langzeitentwicklung von den Anfangsbedingungen. Obwohl beispielsweise die Gesetze der klassischen Mechanik es erlauben würden, die Bahn einer Kugel beim Roulette-Spiel exakt zu beschreiben, so kommt es doch zu einer Selbstverstärkung der Ungenauigkeiten in den Anfangsbedingungen, die das Spielergebnis als zufällig erscheinen lassen.¹ Ein Ziel der Chaosforschung ist die Entwicklung geeigneter Methoden und Verfahren, die es erlauben, das globale Verhalten unabhängig von der Kenntnis der Anfangsbedingungen zu beschreiben.

Der Theorie der Fraktale kommt dabei eine besondere Bedeutung zu: Ein zeitlich irregulär erscheinendes Signal wird in ein geometrisches Objekt umgewandelt. Eingebettet in einen mehrdimensionalen Zustandsraum kann es ggf. erstaunlich geordnete Strukturen zeigen und mittels geeigneter Kenngrößen wie beispielsweise der fraktalen Dimension charakterisiert werden.

Fourieranalyse, Leistungsspektrum und Autokorrelation

Auf der Suche nach mathematisch-physikalischen Werkzeugen zur Analyse von Zeitreihen stößt man auf zwei 'klassische' Methoden, das Leistungsspektrum und die Autokorrelationsfunktion, die zudem mathematisch (Wiener-Khintchine-Theorem) miteinander verknüpft sind (siehe [3]). Bei der Betrachtung des Zeitverlaufs eines Meßsignals erscheint es zunächst einfach, zwischen regulärem und irregulärem Verhalten zu unterscheiden. Stößt man auf ein irreguläres Signal, ergibt sich allerdings das Problem, nachzuweisen, ob es sich dabei um einen Einschwingvorgang, eine reguläre Bewegung mit sehr langer Periode, ein quasiperiodisches oder gar einen chaotischen Vorgang handelt.

Durch Auswertung einer Zeitmeßreihe mit der Fourieranalyse kann dabei als erster Schritt reguläres und irreguläres Verhalten unterschieden werden: Ein diskretes Leistungsspektrum kann als

¹ Das Roulette, "Würfel"-Spiele und auch das klassische Magnetpendel stellen im eigentlichen Sinne gar keine dynamischen System dar: ohne äußeren Antrieb kommen derartige Systeme aufgrund von Reibung schnell zur Ruhe - sie besitzen einen (im fraktalen Sinne) null-dimensionalen Fixpunkt-Attraktor. Das 'Verhalten' dieser Systeme beschränkt sich auf einen Einschwingvorgang (transientes Chaos) in die Ruhelage.

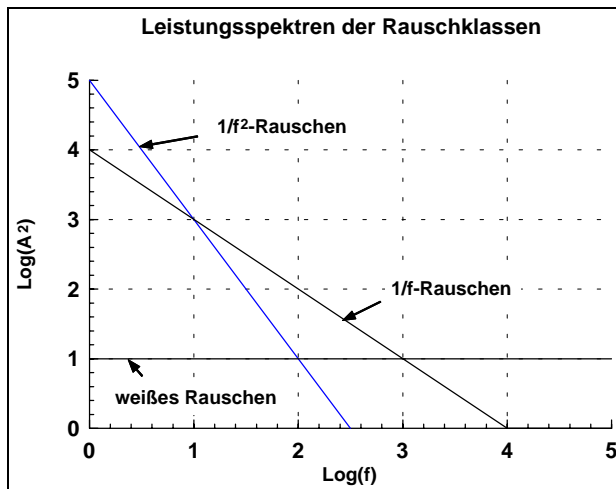


Abb.1: Leistungsspektren verschiedener Rauschklassen. Verhält sich der analysierte Datensatz im Leistungsspektrum wie ein *weißes Rauschen*, bedeutet dies eine völlige Unkorreliertheit des Signals; und die Interpretation des untersuchten Signals als eine Zufallsfolge von Ereignissen liegt nahe.

Zeigt das Leistungsspektrum andere Arten von Korrelationen (etwa ein sog. *1/f*-Verhalten, das viele natürliche Systeme kennzeichnet (vgl. Abb.1, aus [3]), so neigt man dazu, als Ursprung des Signals ein deterministisches (chaotisches), d.h. ein i.e.S. sinnvoll agierendes, System anzunehmen. Allerdings können u.U. auch numerisch erzeugte Zufallsreihen ein *1/f*-Verhalten aufweisen [4]. Daher kann das Leistungsspektrum nur als ein erster Schritt auf dem Wege der Analyse eines unbekannten, irregulären Signals dienen.

Die *Autokorrelationsfunktion* erfaßt demgegenüber direkt die zeitliche Korrelation einer Zeitreihe bzw. Funktion mit sich selbst: Es wird jeweils der Zusammenhang ein und derselben Meßgröße zu verschiedenen Zeitpunkten t und $t+\tau$ untersucht und als eine Funktion der Differenz τ dargestellt. Diese Funktion spiegelt so gesehen das 'Erinnerungsvermögen' des Systems wieder: Besteht die Autokorrelationsfunktion aus nur einer einzigen 'Spitze' bei $\tau = 0$ und verschwindet sie für alle anderen τ -Werte, so läßt sich die analysierte Meßreihe auf vollkommen zufälliges, stochastisches Verhalten zurückführen. Es besteht von Anfang an keinerlei Zusammenhang zwischen dem Signal zum Zeitpunkt t und irgendeinem späteren Zeitpunkt $t+\tau$ (Abb.2.a). In der Praxis ergibt sich als Autokorrelationsfunktion eines irregulären Signals allerdings eine kontinuierliche Funktion, die mehr oder weniger schnell auf Funktionswerte um Null abklingt - eine eindeutige Interpretation des Datensatzes bleibt schwierig, wenn nicht unmöglich (vgl. Abb.2.b u. 2.c, aus [3]). Allerdings gilt hier: Je 'schneller' die

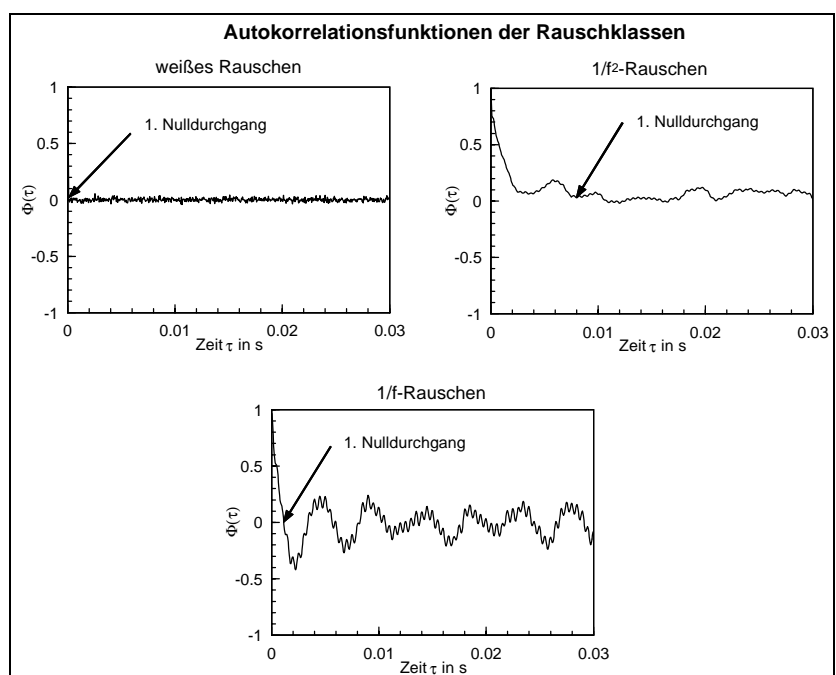


Abb.2: Autokorrelationsfunktionen der Rauschklassen.

Funktion abfällt, desto weniger innere Zusammenhänge existieren innerhalb des Signals, desto näher liegt die Interpretation als eine Zufallsfolge. Eine eindeutige Unterscheidung zwischen rein zufälligen und deterministisch-chaotischen Signalen ist daher auch mit diesem Analyseverfahren nicht immer möglich.

Trajektorien - Bahnen im Zustandsraum

Betrachten wir ein komplexes System, so kann der jeweilige Zustand zur Zeit t durch einen Satz von zeitabhängigen Parametern bzw. Variablen $x(t)$, $y(t)$, ... beschrieben werden. Man kann diesen Satz von Zustandsvariablen auch als einen Zustandsvektor darstellen:

$$\vec{X} = (x(t), y(t), \dots, \zeta(t))$$

Jeder Zustand des Systems läßt sich in dem durch diese Zustandsvektoren aufgespannten mehrdimensionalen Vektorraum eindeutig darstellen. Er entspricht jeweils einem Punkt im *Zustandsraum*. Für das Aufspannen eines Zustandsraumes ist es daher notwendig, alle beschreibenden Variablen des Systems gleichzeitig zu kennen. Die zeitliche Veränderung des Systemzustandes ergibt sich dann als eine Punktfolge von Zuständen, aus denen sich Kurven ergeben, die sogenannten *Trajektorien*. Die Variablen werden also nicht mehr über der Zeit, sondern quasi zeitversetzt gegeneinander aufgetragen: Aus der Zeitserie entsteht eine geometrische Punktfolge. Ein gedanklicher Spaziergang längs einer solchen Trajektorie im Zustandsraum ließe die zeitliche Abfolge des Signals erkennen.

Der eigentliche Vorteil der Darstellung eines Signals in einem Zustandsraum erweist sich vor allem bei chaotischen Systemen: Die Trajektorien dissipativer dynamischer Systeme, zu denen i.a. auch natürliche Systeme gezählt werden², laufen auf einen *Attraktor* zu und bleiben auf ihm. Im Falle einer chaotischen Dynamik führt dies i.a. zu *seltsamen Attraktoren*, fraktalen Gebilden im Zustandsraum, die sehr komplizierte aber zugleich geordnet erscheinende geometrische Formen annehmen können. Ihre innere Ordnung wird dann offenbar, wenn man sie beispielsweise mit den diffusen 'Punktwolken' vergleicht, die bei der entsprechenden Darstellung stochastischer Prozesse entstehen (vgl. Abb.6). Eine Untersuchung der geometrischen Strukturen des Attraktors sollte daher auch Aufschluß über das Systemverhalten geben.

Leider verfügt man i.a. nicht über die Kenntnis aller Variablen. In vielen Fällen liegt sogar nur die Zeitserie einer Variablen vor. Aber auch in diesen Fällen ist die Methode der Zustandsraumdarstellung anwendbar, da aufgrund der nichtlinearen Kopplung der Variablen sich das Verhalten jeder Variablen in jeder anderen widerspiegelt. Man gewinnt die fehlenden Variablen entweder durch die zeitlichen Ableitungen $\dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots$ ³ oder die sogenannten *Delay-Variablen* (s.u.).

Rekonstruktion eines Zustandsraumes

Die Schwankungen in den Meßgrößen eines Signals enthalten Informationen über die wechselwirkenden Prozesse und über die inneren Kopplungen des Systems. Insbesondere kann man da-

² Die folgenden Betrachtungen beziehen sich daher immer auf dissipative Systeme.

³ Diese Darstellung heißt dann auch Phasenraumportrait oder -darstellung.

von ausgehen, daß auch eine Verknüpfung der Variablen untereinander besteht. Ein Parameter wird sich nicht unabhängig von der Dynamik eines anderen verhalten, jede Variable enthält aufgrund der Wechselwirkung bzw. gegenseitiger (physikalischer) Beeinflussung mit den übrigen Variablen Informationen über die Gesamtdynamik des Systems.

Bereits im Jahre 1981 hat der Mathematiker F. Takens [1] ein Theorem aufgestellt und bewiesen, das besagt, daß sich im Prinzip aus der genauen Kenntnis einer einzelnen der beschreibenden Variablen Informationen über das gesamte System gewinnen läßt.⁴

So entwickelten sich in den letzten zehn Jahren Verfahren zur *Rekonstruktion* eines künstlichen Zustandsraumes ([2],[5]) die bei der Messung von nur einer Variablen die Darstellung und Entwicklung einer Pseudo-Trajektorie ermöglichen. Als besonders erfolgreich hat sich die Einführung von Delay- bzw. zeitverzögerten Variablen erwiesen.

Die zeitliche Entwicklung einer einzelnen Reihe von Meßwerten einer einzigen Variablen ermöglicht die Konstruktion eines Zustandsvektors: Aus einem einzigen Zeitsignal werden die 'höheren' Variablen aus zeitverschobenen Meßwerten des originalen Signals erzeugt. Der folgende Algorithmus soll dieses Verfahren anhand der Rekonstruktion eines drei-dimensionalen Zustandsraumes verdeutlichen:

1. Gegeben sei eine Meßreihe von n (äquidistanten) Meßwerten $x(t_1), \dots, x(t_n)$.
2. Einführung von Delay-Variablen:

$$x_i = x(t_i), \quad y_i = x(t_i + \tau), \quad z_i = x(t_i + 2 \cdot \tau).$$

Der Zustandsvektor \vec{X}_i steht dann für einen Punkt im Zustandsraum mit den Koordinaten (x_i, y_i, z_i) bzw.:

$$\vec{X}_i = (x_i, y_i, z_i)$$

3. Rekonstruktion eines 3-dimensionalen Zustandsraumes aus den Zeitreihen der drei 'neuen' Variablen:

$$x(t) : x(t_1), \dots, x(t_n)$$

$$x(t) : x(t_1 + \tau), \dots, x(t_n + \tau)$$

$$x(t) : x(t_1 + 2 \cdot \tau), \dots, x(t_n + 2 \cdot \tau)$$

Es handelt sich bei diesem Verfahren zur Gewinnung weiterer Variablen lediglich um eine Verschiebung der Meßwerte um ein festes Zeitintervall τ .

Dies soll im folgenden an einem Beispiel erläutert werden: Der Attraktor einer harmonischen (ungedämpften) Schwingung (z.B. die Bewegung eines Massepunktes an einem (linearen) Federpendel) läßt sich in einem zwei-dimensionalen Phasenraum (die beschriebenen Variablen seien der Ort x und die Geschwindigkeit v) im Idealfall als Kreis darstellen. Es sei nun experimentell nur möglich, eine der beiden Variablen meßtechnisch zu erfassen, beispielsweise den Ort

⁴ Eine solche Meßgröße sollte genügend genau ($\Delta t \rightarrow 0$) und lang ($t \rightarrow \infty$) aufgenommen werden. In der praktischen Anwendung dieser Idee werden allerdings geringere Anforderungen an das Datenmaterial gestellt.

$x(t)$: Die gemessene Zeitserie könnte dann in der Form $x(t) = \sin(\omega t)$ angegeben werden. Versucht man jetzt, aus diesem Signal einen Pseudo-Zustandsraum zu rekonstruieren, indem $x(t)$ gegen $x(t+\tau)$ aufgetragen wird, so gelingt bei geeigneter Wahl von τ sogar eine exakte Rekonstruktion: Wird die Verzögerungszeit τ so gewählt, daß sie einem Viertel der Schwingungsperiode T_C entspricht⁵, so gilt:

$$x(t + \tau) = \sin(\omega t + \omega \tau) = \sin(\omega t + \frac{1}{2}\pi) = \cos(\omega t)$$

Mit $\omega = \frac{2\pi}{T_C}$ ergibt sich dann:

$$x(t + \tau) = \sin(\omega t + \frac{1}{2}\pi) = \cos(\omega t)$$

Wählt man in diesem Beispiel eine andere Verzögerungszeit τ , so ergeben sich für fast alle τ im rekonstruierten Zustandsraum mehr oder weniger 'schöne' Ellipsen (lediglich für ganzzahlige Vielfache von π entarten die Ellipsen). Die Struktur des rekonstruierten Attraktors (d.h. seine topologischen Eigenschaften) ist in diesem Fall offensichtlich weitgehend unabhängig von der Wahl der Verzögerungszeit.

Während die Zusammenhänge bei diesem einfachen Beispiel leicht einsichtig gemacht werden können, sind die Verhältnisse bei chaotischen Attraktoren sehr viel komplizierter und anschaulich nicht so leicht zugänglich. Eine wichtige Voraussetzung für die erfolgreiche Rekonstruktion von Zustandsräumen stellt die Erhaltung der topologischen Strukturen der Attraktoren dar; so dürfen sich beispielsweise die Trajektorien auch im Pseudo-Zustandsraum nicht schneiden.

Obwohl das Verfahren der Rekonstruktion in vielerlei Hinsicht willkürlich erscheint, zeigt es sich doch, daß bei der Wahl eines ausreichend großen Zustandsraumes die topologischen Eigenschaften der Pseudo-Trajektorien mit denen im Original-Zustandsraum i.a. stark korreliert sind, ja sogar prinzipiell 'gleichwertig' sind: Dies bedeutet, daß bei der Rekonstruktion die geometrischen Invarianten der Dynamik, wie z.B. die fraktale Dimension oder die Lyapunov-Exponenten, mit Sicherheit dann erhalten bleiben, wenn die Dimension des Zustandsraumes entsprechend groß gewählt wird (vgl. [1], [5]).

Die Güte dieses Rekonstruktionsverfahren hängt nun im allgemeinen allerdings auch von der Wahl von τ ab. Zur Bestimmung einer optimalen Delay-Zeit wurden daher verschiedenste Verfahren entwickelt (vgl. [5],[6.]). Als eine günstige Wahl der Verzögerungszeit erweist sich beispielsweise der Zeitwert, bei dem die Autokorrelationsfunktion ihr erstes Minimum oder ihre erste Nullstelle besitzt.

Informationen aus dem Zustandsraum

Im Abstrakten ereignet sich heute das Wesentliche.

Robert Musil

Die Betrachtung eines Attraktors im Zustandsraum läßt Korrelationen erkennen, die allein mit Hilfe der oben beschriebenen Methoden der Signalanalyse mittels Leistungsspektrum und Autokorrelationsfunktion nicht auffindbar wären. Die Attraktor-Darstellung im Zustandsraum gibt uns somit weitere, wertvolle Informationen über die Herkunft des untersuchten Signals.

Im folgenden soll nun die 'praktische' Anwendung des oben skizzierten Algorithmus zur Rekonstruktion eines Zustandsraumes anhand eines weiteren Beispiels gezeigt werden.

Gegeben sei eine Reihe von Meßwerten (aus Abb.3.) :

⁵ Auch für komplizierte Zeitreihen hat es sich bewährt, als Delay-Zeit einen Bruchteil einer kleinsten charakteristischen Periode T_C zu wählen.

$$x(t): 16.8, 16.1, 13.2, 9.2, 5.1, 1.5, -1.3, \dots$$

Wählen wir als Verzögerungs-Zeit beispielsweise $\tau = 2 \cdot \Delta t$, so können zur Rekonstruktion des dreidimensionalen Pseudo-Zustandsraumes aus obiger Meßreihe sukzessive eine Reihe entsprechend zeitverzögerter Zustandsvektoren gebildet werden: Zu jedem $x(t)$ -Wert wird der jeweils zweite der folgenden Meßwerte als $y(t)$ -Wert und jeder vierte der nachfolgenden Meßwerte als $z(t)$ -Wert zugeordnet und dann jeweils zu einem dreier-Tupel zusammengeschlossen.

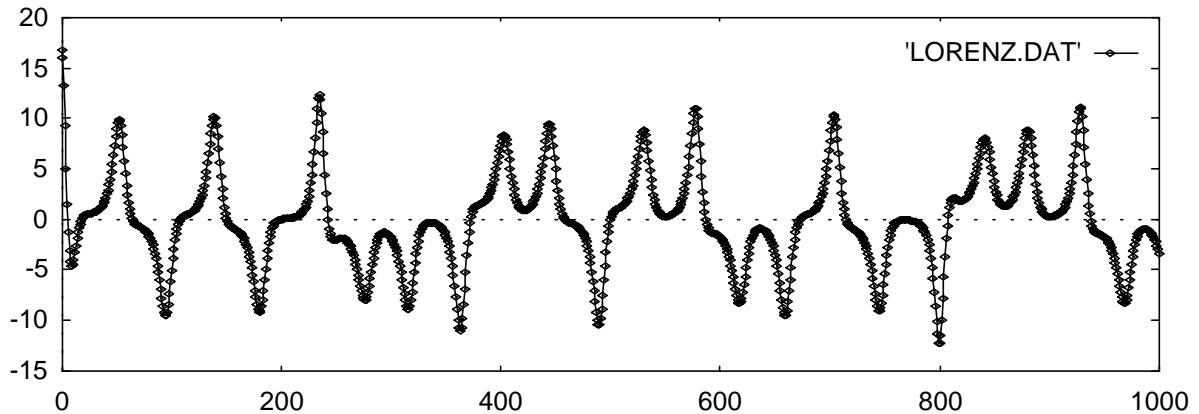


Abb.3: Experimentelle Zeitserie von (äquidistanten) Meßwerten.

Anhand dieses Verfahrens gewinnt man eine Reihe von Vektoren :

$$\vec{X}_1 = (16.8, 13.2, 5.1),$$

$$\vec{X}_2 = (16.1, 9.2, 1.5),$$

$$\vec{X}_3 = (13.2, 5.1, -1.3),$$

...

Werden diese Pseudo-Zustandsvektoren der Reihe nach in einen dreidimensionalen Zustandsraum eingebettet (Abb.4), so entsteht ein im geometrischen Sinne räumlich orientiertes Gebilde, eine im Raum leicht gekrümmte Linie, eine Pseudo-Trajektorie. Überläßt man die Bildung derartiger Zustandsvektoren bzw. Trajektorien dem Computer, so können binnen kürzester Zeit auch längere (eindimensionale) Datenreihen 'geometrisiert' werden: Die aus der Zeitreihe aus Abb.3 rekonstruierten Trajektorien laufen schnell auf ein kompaktes Gebilde im 3D-Raum zu, dem sogenannten Lorenz-Attraktor (Abb.5).

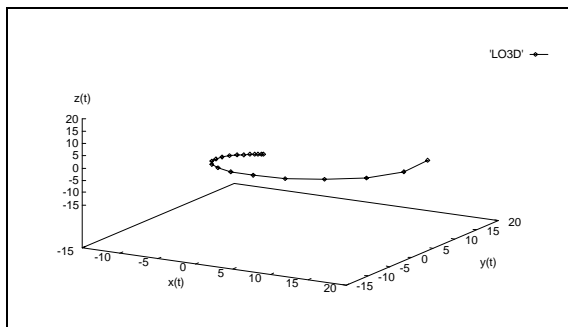


Abb.5: Teilstück der rekonstruierten 'Trajektorie' aus den ersten Meßwerten der Zeitreihe aus Abb.3.

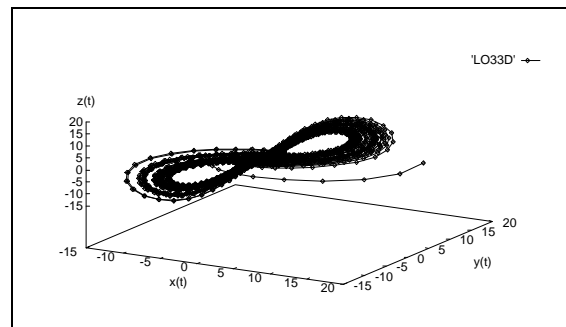


Abb.4: Aus der Zeitreihe aus Abb.3 erwächst der Lorenz-Attraktor.

Spätestens jetzt stellt sich die Frage nach der Herkunft obiger Zeitreihe: Dieser Datensatz wurde bei Simulationen zur Dynamik des Lorenz-Systems (ein System von drei gekoppelten Differentialgleichungen, vgl. [7]) gewonnen. Zur Erstellung von Abb.3 wurden die numerisch berechneten Werte der X-Komponente (inkl. 'Einschwingvorgang', vgl. Abb. 4 u. 5) gespeichert.

Während bei der Simulation des Lorenz-Systems drei Differentialgleichung integriert werden müssen, um die geometrische Gestalt des Lorenz-Attraktors sichtbar zu machen, reicht bei dem hier vorgestellten Verfahren die Kenntnis der Dynamik von nur einer Zustandsvariablen zur erfolgreichen Rekonstruktion des Attraktors aus (s.o.).

Für die experimentelle Erforschung unbekannter Systeme oder solchen, deren Variablen nur unvollständig zugänglich sind, eröffnen sich mit Hilfe dieses Rekonstruktionsverfahren neue Möglichkeiten der Aufnahme und Weiterverarbeitung von Meßsignalen, da gerade bei komplexen Systemen oftmals nur eine relevante Zustandsgröße meßtechnisch erfaßbar ist (vgl.[7]).

Attraktoren - Fraktale im Zustandsraum

*Habe ich zu viele Fäden in meinem Knäuel verflochten ?
An welchem muß ich ziehen, um einen vernünftigen
Schluß in die Hand zu bekommen ?*

Italo Calvino

Wählt man den hier beschriebenen Weg der Zeitreihenanalyse und erzeugt aus einem gemessenen Datensatz eine entsprechende Trajektorie im rekonstruierten Zustandsraum, so entsteht aus dem ehemals irregulären Zeitsignal mit deterministisch-chaotischer Herkunft ein kompaktes, geordnetes geometrisches Objekt, das zudem einen ganz bestimmten und räumlich begrenzten Bereich des Zustandsraumes⁶ belegt (Abb.3). Im Vergleich dazu ergibt sich bei der Analyse einer Folge von Zufallszahlen eine diffuse Wolke von Zustandsvektoren, die rekonstruierte Trajektorie füllt in einer wild gezackten 'Kurve' (fast) den gesamten Einbettungsraum aus (Abb.6).

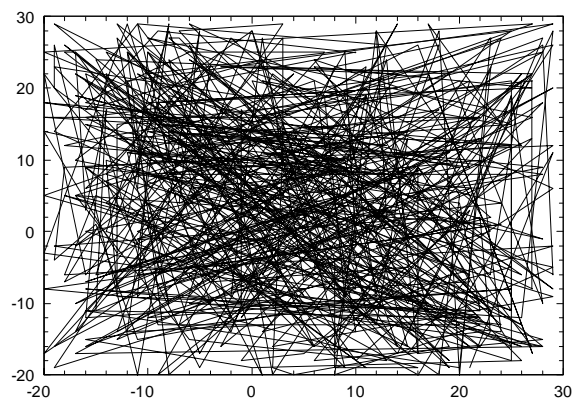


Abb.6: 2D-Zustandsraum einer Reihe von Zufallszahlen (500 Werte)

Die unterschiedliche Herkunft der Zeitreihen manifestiert sich hier in einem sehr verschiedenartigen Erscheinungsbild im Zustandsraum - die inneren Korrelationen eines deterministisch-chaotischen Signals erzwingen eine Art 'Agglomeration' der Trajektorien, sie erzeugen ein geometrisch-geordnetes Gebilde, den Attraktor.

Wenn wir hier von den geometrisch 'sichtbaren' Strukturen von Attraktoren in zwei- oder dreidimensionalen euklidischen Räumen sprechen, so können die gezeigten Überlegungen natürlich auch auf höherdimensionale Zustandsräume übertragen werden. Insbesondere lassen sich auch dann die 'chaotischen' Strukturen anhand einer Projektion der Trajektorien auf niedrigdimensionale Unterräume visualisieren.

⁶ Den (euklidischen) N -dimensionalen Zustandsraum, in dem der Attraktor eingebettet wird, nennt man auch *Einbettungsraum* und entsprechend N seine *Einbettungsdimension*. Zur Bestimmung einer optimalen Einbettungsdimension (s.u.) sind gerade in den letzten Jahren eine Vielzahl neuer Verfahren entwickelt worden. Eine allgemein zufriedenstellende Lösung dieses Problems existiert allerdings bis heute nicht (vgl.[6]).

Hat man einen chaotischen Attraktor erfolgreich rekonstruiert, so kann dessen fraktale Dimension berechnet werden. Die fraktal-geometrische Maßzahl, die insbesondere räumliche Korrelationen bzw. Dichteverteilungen von chaotischen Attraktoren mathematisch erfassbar macht, ist die *Korrelationsdimension*.

Da die fraktale Dimension nicht unabhängig vom gewählten Einbettungsraum ist, wird zur ihrer praktischen Berechnung oftmals ein von Grassberger und Procaccia [8] vorgeschlagenes analytisches Verfahren verwendet, indem quasi gleichzeitig die fraktale Dimension und die optimale Einbettungsdimension⁷ (s.o.) des Attraktors ermittelt werden.

Bestimmung der Attraktordimension

Um die räumlichen Korrelationen von n Punkten eines Attraktor quantitativ zu erfassen, stellen wir uns zunächst die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, daß zwei beliebig aus der Datenmenge herausgegriffene Vektoren \vec{X}_j und \vec{X}_k einen Abstand voneinander haben, der kleiner ist als eine vorgegebene Zahl r . Hierzu muß man unter den $n \cdot (n-1)$ möglichen Kombinationen

$\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_1, \vec{X}_3, \dots, \vec{X}_{n-1}, \vec{X}_n$, die jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n^2}$ angetroffen werden,

diejenigen auswählen, die die Bedingung $|\vec{X}_j - \vec{X}_k| < r$ erfüllen. Bezeichnet man diese Wahrscheinlichkeit mit $C(r)$, so ergibt sich:

$$C(r) = \frac{1}{n^2} \times \text{Anzahl der Paare } \vec{X}_j, \vec{X}_k \text{ mit } |\vec{X}_j - \vec{X}_k| < r \quad j \neq k$$

Formal kann man diese Beziehung mit Hilfe der sog. *Heaviside-Funktion* Θ beschreiben:

$$C(r) = \frac{1}{n^2} \sum_{j,k} \Theta(r - |\vec{X}_j - \vec{X}_k|)$$

$$\text{mit } \Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

Die Größe $C(r)$ kann daher auch als ein Maß dafür angesehen werden, wie dicht die Datenpunkte des Attraktors den Zustandsraum belegen, in dem sie eingebettet sind (vgl. Abb.7); sie macht eine Aussage über räumliche Korrelationen eines Attraktors und wird daher auch als *Korrelationsintegral* bzw. -*summe* bezeichnet.

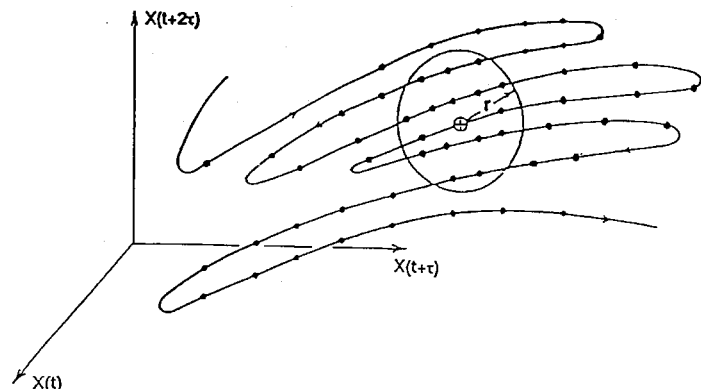


Abb.7: Zur Bestimmung des Korrelationsintegrals werden alle benachbarten Punkte in einer definierten Umgebung eines Referenzpunktes ausgezählt.

⁷ Der optimale Einbettungsraum muß gerade so groß sein, daß sich die Trajektorien des rekonstruierten Attraktors 'überschneidungsfrei' einbetten lassen.

Bei der praktischen Bestimmung dieser Korrelationssumme genügt es, auf eine zufällig verteilte Auswahl von nur m ($m \ll n$) Referenzvektoren zu stützen ($<10\%$ des Datensatzes, vgl. [5]), es ergibt sich dann:

$$C(r) \approx \frac{1}{m \cdot n} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \Theta \left(\frac{1}{r} - |\vec{x}_j - \vec{x}_k| \right)$$

Handelt es bei dem mittels diesem Verfahren analysierten Datensatz um ein deterministisch-chaotisches Signal, das sich im Zustandsraum als fraktaler Attraktor darstellt, so verhält sich bei genügend großer Anzahl von Meßwerten das Korrelationsintegral $C(r)$ für kleine r -Werte wie $C(r) \sim r^D$. Der Exponent D , die *Korrelationsdimension*, gibt dann die Dimensionalität des Attraktors an und läßt sich wie folgt berechnen:

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln C(r)}{\ln r}$$

Bei doppelt-logarithmischer Auftragung von $C(r)$ gegen r sollte sich im Grafen (in einem bestimmten Bereich von r) eine Gerade mit der Steigung D ergeben (vgl. Abb.8). Der numerische Wert von D hängt allerdings von der Wahl der Einbettungsdimension des Zustandsraumes ab - in einem zu 'klein' gewählten Zustandsraum läßt sich auch kein 'vollständiger' Attrakter 'einbetten'. Der Wert von D macht nur dann einen Sinn, wenn er für Einbettungsdimensionen größer als die Attraktordimension D unabhängig von der Wahl des Zustandsraumes wird, also ab einer bestimmten, 'optimalen' Einbettungsdimension an konstant bleibt.

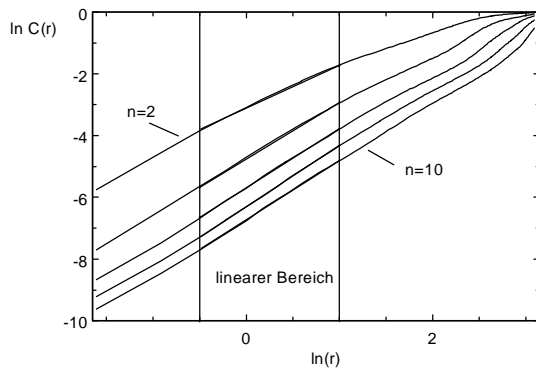


Abb.9: Korrelationsintegrale für verschieden dimensionale Einbettungen ($n=2$ bis $n=10$) des Lorenz-Attraktors.

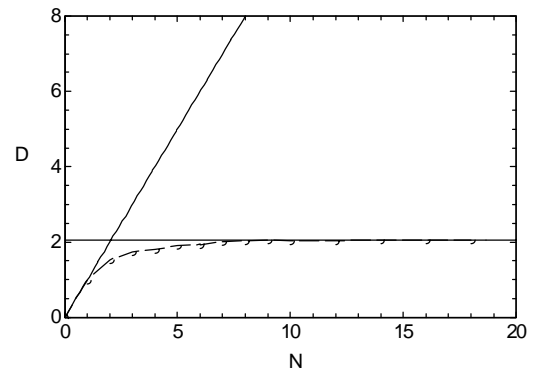


Abb.8: Die fraktale Dimension des Lorenz-Attraktors erreicht für verschieden dimensionale Einbettungen ($n=2$ bis $n=10$) einen 'Sättigungswert' von $D \approx 2.05$.

In der Praxis bestimmt man die fraktale Dimension aus einer gegebenen Zeitreihe, indem man für zunehmende Dimensionen N entsprechende Zustandsräume rekonstruiert und dann jeweils die Korrelationsintegrale $C(r)$ und die Korrelationsdimensionen D ermittelt (vgl. Abb.8). Erreichen bei der Erhöhung der Einbettungsdimension N die Korrelationsdimensionen D eine Sättigung (vgl. Abb.9), so ergibt sich die fraktale Dimension des Attraktors aus dem Wert der in Sät-

tigung befindlichen Korrelationsdimension. Wachsen die Dimensionen allerdings mit der Einbettungsdimension linear an (vgl. Abb. 9: Winkelhalbierende), so läßt sich kein endlichdimensionaler Zustandsraum bzw. Attraktor rekonstruieren. In diesem Fall kann das Signal und damit auch das untersuchte System als stochastisch bezeichnet werden.

Fraktale Strukturen komplexer Phänomene

Mit Hilfe des hier vorgestellten Verfahrens, mit dem aus den Zeitserien beliebiger natürlicher und physikalischer Systeme eine Rekonstruktion des zugehörigen Attraktors vorgenommen und zugleich die fraktale Dimension bestimmt werden kann, lassen sich nun folgende Aussagen treffen:

- ® Für ein stochastisches Signal läßt sich kein niedrigdimensionaler Zustandsraum rekonstruieren, die Korrelationsdimension wächst mit zunehmender Einbettungsdimension (linear) an (theoretisch sogar bis ins Unendliche).
- ® Für einen deterministisch-chaotischen Attraktor ist der Wert der Korrelationsdimension größer als Eins und gebrochen (fraktal), d.h. nicht ganzzahlig. In diesem Fall handelt es sich bei dem analysierten System um ein dissipatives System deterministisch-chaotischer Herkunft.
- ® Die Dimension des optimalen Einbettungsraumes gibt die Minimalzahl von Variablen an, die nötig sind, um das von dem Attraktor repräsentierte komplexe System hinreichend zu beschreiben.
- ® Die fraktale Dimension, d.h. zum einen die Größe des Zahlenwertes an sich und zum anderen die Relation zur Größe der Einbettungsdimension, gibt Auskunft über den 'Grad an Komplexität' der untersuchten Zeitreihe bzw. des zugrundeliegenden komplexen Systems.

Neben den Aussagen zur Komplexität des analysierten Systems hat man hier also auch ein Verfahren zur Unterscheidung von stochastischen und chaotischen Signalen gewonnen: die Existenz eines chaotischen Attraktors und insbesondere seine Fraktalität können als Abgrenzung zur Stochastizität verstanden werden. Stochastische Zeitreihen können in keinen endlich-dimensionalen Raum überschneidungsfrei eingebettet werden, ihre fraktale Dimension wächst linear mit der Einbettungsdimension - und zwar **ganzzahlig**. Die Komplexität eines solchen Systems kann in diesem Sinne als 'maximal' bezeichnet werden, während die Existenz eines niedrigdimensionalen Attraktors einen sehr viel geringeren Grad an Komplexität der zugrundeliegenden Systemdynamik zum Ausdruck bringt.

In diesem Sinne lassen sich auch die erstaunlich niedrigen fraktalen Attraktor-Dimensionen erklären, die bei Zeitreihenanalysen natürlicher Signale auftreten (wie z.B. Klimadaten, vgl. [9]) und somit einen relativ niedrigen Komplexitätsgrad der analysierten Systeme aufzeigen: Ein geringer Grad an Komplexität deutet zugleich an, daß die Zeitreihen von einem "sinnvoll" arbeitenden System herrühren.

Dies spiegelt auch die physikalische Bedeutung des Attraktors wieder: Die rekonstruierten Trajektorien eines stochastischen Signals (wenn man hier überhaupt von Trajektorien sprechen kann) laufen im Zustandsraum nicht auf einen Attraktor zu, sie verhalten sich flächenfüllend. Ein endlich dimensionaler (optimaler) Einbettungsraum existiert nicht, das rekonstruierte 'Objekt' besitzt eine unendlich große fraktale Dimension. Zur Beschreibung der Dynamik eines solchen komplexen Systems benötigen wir eine unendliche Anzahl von Variablen bzw. von Differentialgleichungen.

Literatur

- [1] F. Takens: Dynamical Systems and Turbulence.
in: Lecture Notes in Mathematics 898, **1981**
- [2] N.H. Packard, J.P. Crutchfield, J.D. Farmer, R.S. Shaw: Geometry from a Times Series.
in: Physical Review Letters 9/45, **1980**
- [3] A. Piotrowski, V. Nordmeier, H.-J. Schlichting: Spektralanalytische Methoden
im Bereich der nichtlinearen Physik.
in: Didaktik der Physik - Vorträge - Frühjahrstagung 1995, Bad Honnef: DPG, **1995**
- [4] A. Provenzale, L.A. Smith, R. Vio, G. Murante: Distinguishing between low-dimensional
dynamics and randomness in measured time series.
in: Physica D 58, **1992**
- [5] J. Agryis, G. Faust, M. Haase: Die Erforschung des Chaos.
Braunschweig, Vieweg, **1994**
- [6] Th. Buzug, G. Pfister: Optimal delay time and embedding dimension.
in: Physical Review A 10/45, **1992**
- [7] U. Backhaus, H.-J. Schlichting, H.G. Küpker: Chaos beim Wasserrad.
in: Physik und Didaktik 3, **1991**
- [8] P. Grassberger, I. Procaccia: Characterization of Strange Attractors.
in: Physical Review Letters 5/30, **1983**
- [9] V. Nordmeier, H.-J. Schlichting: Was sagen Temperaturschwankungen über
unser Klima aus ? (im Druck)