

# Strukturen im Sand

## Kollektives Verhalten und Selbstorganisation bei Granulaten

H. J. Schlichting, V. Nordmeier

### Kurzfassung

Sand und andere Granulate eignen sich als Modellsubstanzen zur Untersuchung wesentlicher Aspekte von Phänomenen und Mechanismen der Selbstorganisation in Vielteilchensystemen. Es wird anhand einfacher, mit schulischen Mitteln durchführbarer Experimente gezeigt, daß Sand- und andere Granulatkörper, die in der Schlichtheit ihrer Gestalt und Wechselwirkungen untereinander kaum zu unterbieten sind, durch relativ unspezifische Zufuhr von mechanischer Energie zu einem kollektiven Verhalten angeregt werden können, das in äußerst reichhaltigen und auch ästhetisch ansprechenden (dissipativen) Strukturen einen sichtbaren Ausdruck findet.

*Figur = Bewegung -  
das ist das reinste morphologische Paradies.*  
PAUL VALÉRY

*Die Flamme, der Sandhaufen ist keine Form der Realität, sondern selbst Realität.*  
ROBERT PIRSIG

### 1. Von Sand und anderen Granulaten

Wenn ein Kind sich darüber ärgert, daß man mit „Zuckersand“ keine Burgen, sondern nur kegelförmige Berge bauen kann, bei denen aufgrund größerer oder kleinerer Lawinen stets der gleiche Böschungswinkel eingehalten wird, so ist für den Physiker gerade dieses Phänomen der sogenannten selbstorganisierten Kritikalität interessant [1]. Und wenn das Kind den Sand fasziniert durch die Finger rinnen läßt, dann zeigt sich für den Physiker darin die seltsame Eigenschaft von Sand und anderen Granulaten<sup>1</sup>, sich als Festkörper zuweilen wie eine Flüssigkeit zu verhalten (Abb.1). Wie man aus der Benutzung von Sand als Zeitmesser in den Sanduhren weiß, ist die Fließgeschwindigkeit jedoch anders als bei Flüssigkeiten unabhängig von der Höhe des Sandes über der Öffnung.

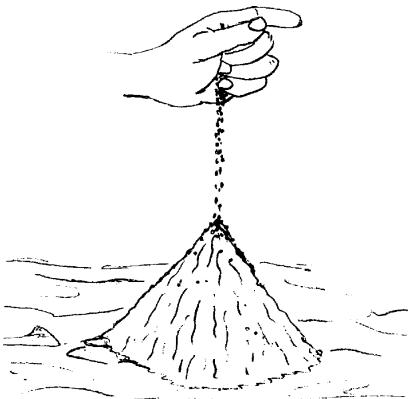


Abb.1: Trotz der Zufuhr weiterer Sandkörner fluktuiert die Neigung des Haufens aufgrund von Selbstorganisationsvorgängen um einen festen Mittelwert.

<sup>1</sup> Im folgenden steht „Sand“ als Synonym für beliebige Granulate.

Die Natur demonstriert in Wüsten und sandreichen Gegenden in Form von vielfältig gestalteten Dünen und Mustern, daß diese und andere Eigenschaften des Sandes zu einem erstaunlich reichhaltigen Verhalten führen können (Abb.2 - 4).



Abb.3: Die Bewegungsenergie des Windes treibt den Wüstensand immer wieder aus dem thermodynamischen Gleichgewicht heraus und bringt auf diese Weise oft bizarre, ästhetisch ansprechende Strukturen hervor.

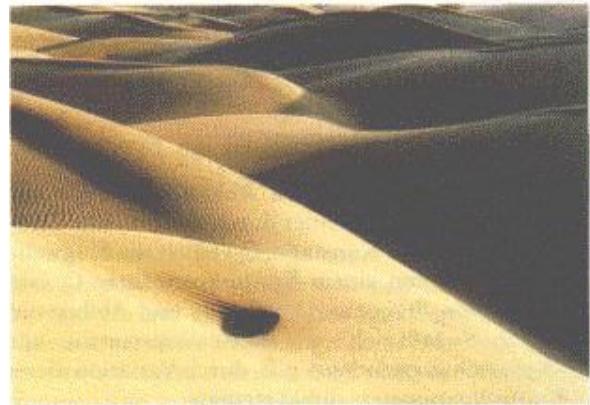


Abb.2: Die Oberfläche der Sanddünen ist i.a. ihrerseits in Form von Sandrippeln strukturiert.

Dies sind natürlich keine neuen Erkenntnisse [2]. Neu ist aber das Interesse der aktuellen Forschung insbesondere an der Frage, wie einfache Sandkörner, die in der Schlichtheit ihrer Gestalt und Wechselwirkungen untereinander kaum zu unterbieten sind, einen derartigen Reichtum an Strukturen hervorzubringen vermögen.



Abb.5: Selbst zwischen den Sandrippeln bilden sich weitere Substrukturen aus.



Abb.4: In der Gezeitenströmung bilden sich auf dem Wattboden ähnliche Rippelstrukturen aus wie im trockenen Sand.

Von einer Antwort auf diese Frage erhofft man sich nicht nur, die Entstehung der Sandrassel oder das in mancher Hinsicht merkwürdige Verhalten von Granulaten zu verstehen. Es geht darüber hinaus ganz allgemein um eine Annäherung an die Frage, inwieweit das Verhalten amorpher und flüssiger Systeme dem Verhalten von Granulaten entspricht. Beispielsweise interessieren sich so verschiedene Bereiche der Industrie wie die Beton-, Pharma- und Lebensmittelindustrie dafür, wie man Granulate lagern, transportieren und trotz verschiedener Körnung zu mechanisch einheitlichen und homogenen Substanzen verarbeiten kann [3]. Schließlich eignen sich Sand und andere Granulate in der einen oder anderen Hinsicht als Modellsubstanzen für Selbstorganisationsphänomene in komplexen Vielteilchensystemen.

Besonders dieser Aspekt macht u.E. die Granulate auch für die Schulphysik interessant. Dazu sollen im folgenden einige Anregungen gegeben werden.

## 2. Phänomene

### 2.1 Bewegter Sand

Die Rippelmuster sowohl von trockenem Sand (Abb.3 und 4) als auch von Sand auf dem Boden von Gewässern (Abb.5) können als das Ergebnis einer im wahrsten Sinne des Wortes bewegten Vergangenheit angesehen werden. Sie sind die „toten“ Zeugen von dynamischen Vorgängen, in denen von Wind oder Wasser bewegte Sandkörner ein kollektives und strukturiertes Verhalten an den Tag legten. Diese Vorgänge zeigen, daß Sandkörner offenbar die Energie, die ihnen durch bewegte Fluide (Wind und strömendes Wasser) auf eine im Vergleich zum resultierenden Verhalten unspezifische Weise übertragen wird, in kreativer Weise zu nutzen vermögen [2].

### 2.2 Experimente mit Mitteln der Schulphysik

Um mehr darüber zu erfahren, setzen wir Sand einfachen vertikalen Vibrationen aus und beobachten die verschiedenen Phänomene, die sich in Abhängigkeit verschiedener Frequenzen und Amplituden ergeben. Um als Schwingungserreger handelsübliche Lautsprecher und Funktionsgeneratoren der Lehrmittelindustrie ausnutzen zu können (Abb.6), benutzen wir als Granulat Bärlappsporen (Lykopodiumpulver). Richtiger Sand würde aufgrund seiner größeren Dichte leistungsstärkere Geräte erforderlich machen. Das Granulat wird den unterschiedlichen Versuchen entsprechend auf ebene Platten oder in Behälter gegeben, die auf die Lautsprechermembran montiert werden.

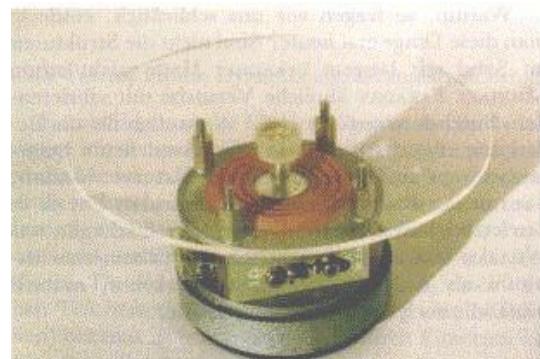


Abb.6: Ein sinusförmig schwingender Lautsprecher kann ausgenutzt werden, die auf einer Platte aufgebrachten Bärlappsporen in Vibration zu versetzen. Hier ein handelsübliches Gerät der Lehrmittelindustrie.

### 2.3 Auseinanderlaufen von Haufen

Streut man auf die Platte des Vibrators Bärlappsporen und läßt die Platte bei geeigneter fester Frequenz zunächst mit kleiner Amplitude schwingen, so passiert um so weniger, je gleichmäßiger die Teilchen die Platte bedecken. Kleine Erhöhungen laufen auseinander und werden zugunsten einer Gleichverteilung abgebaut. Durch die Schwingungen wird die schwerkraftsbedingte Haftreibungskraft, die die Teilchen zusammenhält, periodisch variiert. Infolgedessen rutschen kleinere und größere Teilchenlawinen die Böschung hinab. Dieses Phänomen entspricht weitgehend der Erwartung. Jedes Kind kennt - wiederum von Sandkastenspielen -, daß ein auf einem Brett aufgetürmter Sandhaufen auseinanderläuft, wenn man das Brett schüttelt (Abb.7).

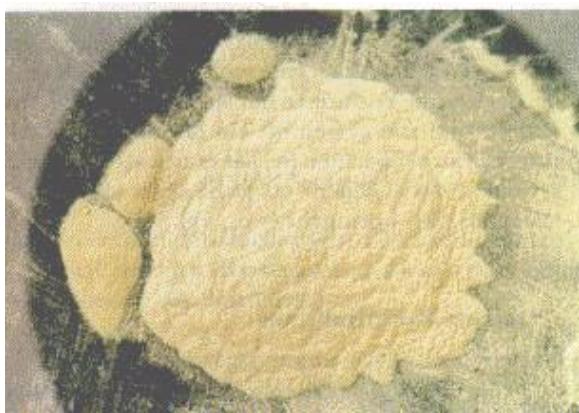


Abb.7: Ein unregelmäßig aufgehäuftes Granulat tendiert bei kleiner Amplitude dazu „auseinanderzulaufen“.

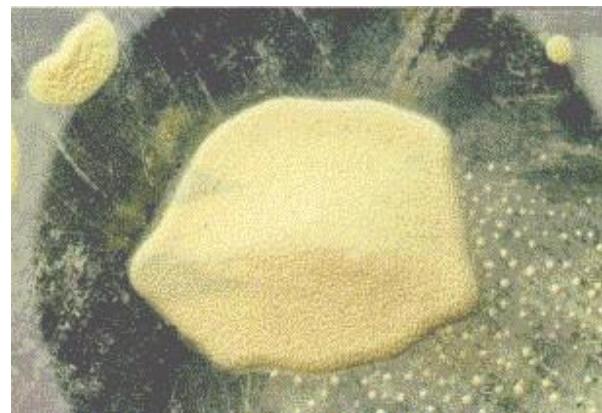


Abb.8: Überschreitet die Schwingungsamplitude der Platte einen kritischen Wert, so aggregiert sich das Granulat zu einzelnen linsenförmigen Haufen.

## 2.4 Haufenbildung

Erhöht man allmählich die Amplitude der Schwingung, so beobachtet man bei einem bestimmten kritischen Wert ein völlig neues Phänomen, man möchte sagen, genau das Gegenteil dessen, was bisher passierte: Plötzlich zieht sich die weitgehend gleichmäßige granulare Schicht zu einzelnen auffällig regelmäßigen, in ihrer Größe und ihrem Ort auf der Platte aber statistisch verteilten Häufchen zusammen (Abb.8). Wie kommt es zu diesem Symmetriebruch, der dem Granulat auf der Platte wie aus heiterem Himmel ein völlig neues Aussehen verleiht und zu einem wohlstrukturierten Muster führt? Wie ist es möglich, daß durch das Schütteln nicht, wie man erwarten würde, Unordnung sondern Ordnung hervorgerufen wird?<sup>2</sup>

## 2.5 „Fressen und Gefressenwerden“

Der globale Eindruck einer auffälligen Regelmäßigkeit wird merkwürdigerweise nicht beeinträchtigt von der ständigen Bewegung und Umstrukturierung der einzelnen Häufchen. Das Muster bleibt im statistischen Mittel gleich (Abb.9). Kommt dabei ein kleineres Häufchen einem größeren zu nahe, so wird es in der Regel von dem größeren gefressen. Große Haufen wachsen auf Kosten von kleineren. Umgekehrt schnüren sich zuweilen von den größeren Haufen wieder kleinere ab. Sie werden zwar häufig erneut gefressen, in einigen Fällen gelingt es ihnen aber, die „Gefahrenzone“ zu verlassen und dabei soviel Granulat „einzusammeln“, daß ein „Überleben“ immer wahrscheinlicher wird. Wie kommt es zu diesem „Fressen und Ge-

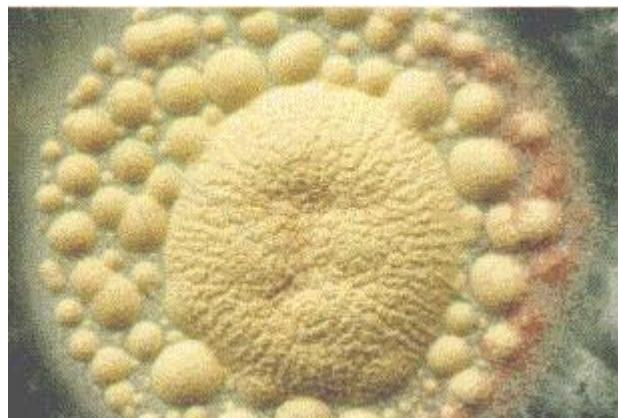


Abb.9: Große Haufen „fressen“ kleine und werden immer größer. Es schnüren sich aber von großen Haufen auch immer wieder kleine Haufen ab.

<sup>2</sup> Daß durch Schütteln nicht immer Unordnung entsteht und durch „Mischungsvorgänge“ Entmischungen und Anordnungen hervorgerufen werden, ist an anderer Stelle an einem einfachen System untersucht worden [3].

fressenwerden“? Will man ein Häufchenmuster eingehender studieren, so braucht man nur die Platte zur Ruhe zu bringen. Dann wird das aktuelle Häufchenmuster „eingefroren“. Allerdings ist es dann völlig „ohne Leben“ und hat im Grunde nur schemenhaft die zufällige äußere Gestalt bewahrt.

## 2.6 Wanderung zu den Chladni - Knotenlinien

Die Wanderung der einzelnen Häufchen ist nicht völlig erratisch. Sie kommen schließlich an gewissen Stellen endgültig zum Stehen. Diese Stellen erweisen sich als Chladnische Knotenlinien der schwingenden Platte. An diesen Stellen ruht die Platte und damit das dort landende Granulat. Nur die über die Knotenlinien hinausragenden Randgebiete bleiben in Bewegung. Damit liegt aber bereits eine Erklärung für die Drift der einzelnen Haufen nahe: Sie bewegen sich von Stellen größerer Bewegung zu Stellen größerer Ruhe. Auf diesem Weg nimmt die Schwingungsamplitude ab und die Hügel laufen wieder auseinander. Sie zerfließen zu einer flachen Pulverschicht, die schließlich auf einer Knotenlinie zur Ruhe kommt.

## 2.7 Aufböschung der Ränder

Betrachtet man einen einzelnen Haufen genauer, so zeigt sich, daß er außer der Bewegung als ganzes eine innere Dynamik aufweist. Infolge einer ständigen Umwälzung böschen sich die Ränder auf und verleihen dem Haufen die typische Linsenform, die um so perfekter ausfällt, je kleiner er ist. Diese Aufböschungen des Randes sind das Ergebnis der Tendenz, den Radius des Haufens zugunsten des Höhenwachstums zu verkleinern und der nivellierenden Tendenz der Schwerkraft. Wie wird diese Bergauftendenz der vibrierenden Teilchen verursacht? <sup>3</sup>

## 2.8 Konvektionsdynamik der Haufen

Die Tendenz zur Aufböschung der Ränder nimmt zunächst mit zunehmender Amplitude zu. Dann kommt es plötzlich zu einem erneuten Symmetriebruch. Die Haufen zeigen als ganzes ondulierende Bewegungen zunächst auf der Oberfläche und schließlich in ihrer ganzen Tiefe. Diese Bewegungen erinnern an Bénardsche Konvektionszellen [4] und bei näherem Hinsehen (z.B. mit einer Lupe) zeigen sie in der Tat dieselbe Dynamik (Abb.10). Noch eindrucksvoller lassen sich die Bénardzellen in einem mit einer flachen Sandschicht gefüllten schwingenden Gefäß demonstrieren (Abb.11).

Es erscheint einleuchtend, daß die Bewegung der vibrierenden Platte den unteren Schichten der Granulathäufchen stärker mitgeteilt wird als den oberen Schichten. Die stärker bewegten Teilchen brechen an bestimmten Stellen durch die oberen Schichten hindurch. Aus Kontinuitätsgründen „fallen“ schwerkraftsbedingt in gleichem Maße weniger bewegte und daher energieärmere Teilchen in die entstehenden Lücken, so daß es insgesamt zu einer konvektiven Umwälzung des Granulats kommt. Dieses organisiert sich aus ähnlichen Gründen, die zur Entstehung der Bénardzellen in einer von unten geheizten Flüssigkeit führen, in einem mehr oder weniger regelmäßigen Muster.

---

<sup>3</sup> Bei größeren Haufen ist hier ein weiteres Phänomen zu beobachten: Der Rand beginnt zu wabern. Dies führt nicht selten zu der bereits erwähnten Abschnürung von kleineren Haufen. Diese Beobachtung zeigt eine gewisse Ähnlichkeit zum Verhalten von Wassertropfen, die ebenfalls mit zunehmender Größe an Stabilität verlieren. Allerdings wirkt in diesem Fall keine dynamische, sondern eine statische „Kraft“ (Oberflächenspannung) der Schwerkraft entgegen.



Abb.10: Die Haufenstruktur erinnert sehr stark an Bénardzellen, wie sie beispielsweise in einer Flüssigkeit entstehen.

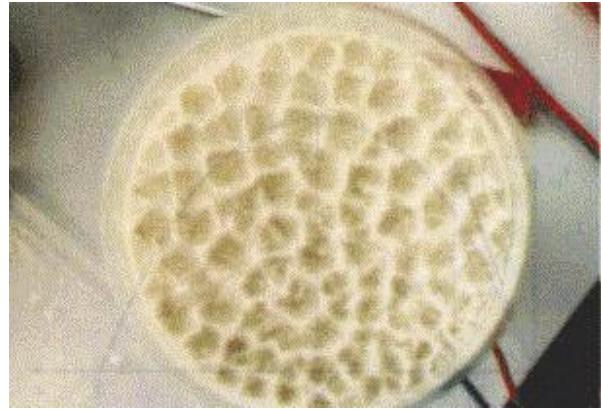


Abb.11: Sehr eindrucksvoll lassen sich die Bénardzellen in einem mit einer flachen Sandschicht gefüllten schwingenden Gefäß demonstrieren.

Die Analogie zwischen geheizter Flüssigkeit und in Schwingung versetztem Granulat geht so weit, daß man von einer „Temperatur“ des Sandes sprechen kann [5]. Die energiereichen, schnell bewegten unteren Teilchen haben eine höhere „Temperatur“ und gelangen durch Konvektion nach oben, dabei „kühlen“ sie sich in Wechselwirkung mit anderen Teilchen ab. Gleichzeitig sinken „kalte“ Teilchen nach unten, um dort „erwärm̄t“ zu werden und erneut aufzusteigen.

## 2.9 Chaotische Konvektionen mit Eruptionen

Bei sehr großer Amplitude gehen die Konvektionen in den einzelnen Haufen wiederum in Analogie zur Bénardkonvektion in einer Flüssigkeit plötzlich in eine irreguläre Bewegung über. Es kommt also zu einem erneuten Symmetriebruch, bei dem die vorher in einer Art zellulärem Muster angeordneten Konvektionen des Haufens in Turbulenz geraten. Dabei treten gelegentlich regelrechte Eruptionen auf, bei denen Granulatjets aus dem Haufen herausgeschossen werden (Abb.12).



Abb.12: Das Foto soll einen Eindruck vermitteln von den nur in der Bewegung wahrzunehmenden chaotischen Umwälzungen innerhalb eines Haufens.

### 3. Sich selbst organisierender Sand

*The resulting sandpile is **self-organized**, in the sense  
that it reaches the steady state all by itself  
without anyone explicitly shaping it.*

PER BAK

Um die oben gestellten Fragen zu beantworten, muß es im folgenden darum gehen, die Kooperation der einzelnen Teilchen unter dem Einfluß von Vibration und Schwere genauer zu studieren. Wir betrachten dazu die Vorgänge in einem aus wenigen, größeren Teilchen bestehenden Granulat: Durch Verwendung von Glaskügelchen ( $\phi : 2 - 4 \text{ mm}$ ), die sich individuell verfolgen lassen und durch eine Beschränkung der Verhaltensmöglichkeiten auf die denkbar einfachste nichttriviale Situation der einfachen Alternative, sollte sich das zur Haufenbildung führende Verhalten der Bärlappsporen nachspielen lassen.

#### 3.1 Ein einfaches Modell

Zur Realisation dieser Modellsituation montieren wir auf den Schwingungserreger ein relativ hohes durchsichtiges Gefäß. Die schwingungsfähige Grundplatte dieses Gefäßes ist mit Hilfe einer zwei bis drei Zentimeter hohen Wand in zwei gleiche Zellen aufgeteilt. Beide Zellen werden etwa zu einem Drittel mit kleinen Glaskügelchen gefüllt.

Versetzt man die Grundplatte nun zunächst in eine Schwingung großer Amplitude, so springen die Teilchen gewissermaßen maxwellverteilt im Raum herum, als wäre die kleine Wand nicht vorhanden. Interessant wird es erst, wenn man die Amplitude der Grundplatte langsam drosselt. Dann nimmt die mittlere Sprunghöhe der Teilchen ab. Wird sie schließlich vergleichbar mit der Wandhöhe, so kann man etwas Erstaunliches beobachten: Entgegen der Erwartung, daß die Teilchen mit verschwindender Amplitude gleichverteilt in beiden Zellen zur Ruhe kommen, sammeln sie sich stets in nur einer der beiden Zellen (Abb.13). Sofern der Behälter symmetrisch gefertigt und die Grundplatte horizontal ausgerichtet ist, fällt die Wahl der Teilchen offenbar zufallsbedingt mal auf die eine mal auf die andere Zelle.<sup>4</sup>

Wie kommt es zu diesem unerwarteten Symmetriebruch? Was veranlaßt die Teilchen, sich in einer Zelle zusammenzutun?

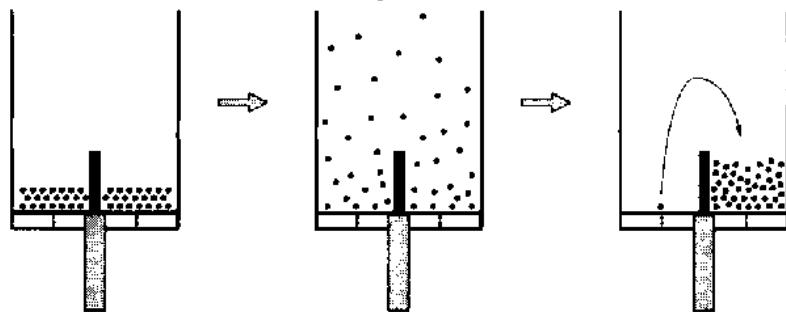
Die durch die vibrierende Platte zum Springen veranlaßten Teilchen bewegen sich auf Bahnen, die durch den „schiefen Wurf“ charakterisiert werden können (s.u.). Die konkreten Flugbahnen werden durch die jeweiligen Startbedingungen der einzelnen Teilchen bestimmt. Dabei kommt es entscheidend darauf an, ob der Start durch einen elastischen Stoß mit der harten Platte oder einen mehr oder weniger inelastischen Stoß mit auf der Platte befindlichen Teilchen vermittelt wird. Es leuchtet ein, daß die Bahn der gestoßenen Teilchen um so kleiner wird, je „weicher“ der Untergrund ist, d.h. je mehr Teilchen die Platte bedecken.

---

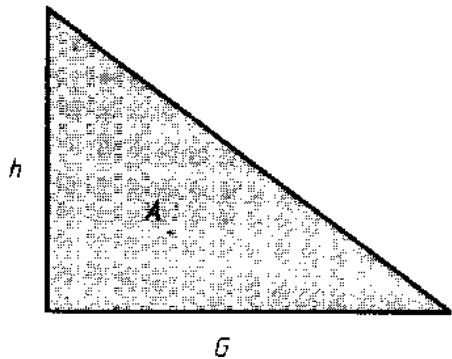
<sup>4</sup> Dieser Modellversuch läßt sich auch auf einfache Weise mit dem in zahlreichen Schulsammlungen vorhandenen Gerät zur Demonstration von Gesetzen der kinetischen Gastheorie durchführen. Dazu muß man die bewegliche Platte nur mit einer kleinen Wand ausstatten. Wir haben gute Erfahrungen mit einem schmalen Plexiglasstreifen (Höhe ca. 2 cm) gemacht, den wir auf der Mitte der Platte aufgeklebt haben. Da die Versuche zur kinetischen Gastheorie von dieser Wand nicht beeinträchtigt werden, kann die Wand dauernd im Gerät verbleiben und dieses um die erwähnten Anwendungsmöglichkeiten bereichern.

Wenn die Amplitude der Schwingung in den kritischen Bereich kommt, in dem nicht mehr alle Teilchen die Barriere zwischen den beiden Zellen zu überschreiten vermögen, wird die Konstellation instabil: Ein zufällig entstandener winziger Teilchenüberschuß in einer der beiden Zellen löst einen sich selbst verstärkenden, lawinenartig ablaufenden Prozeß aus mit dem Ergebnis, daß alle Teilchen in einer Zelle landen. Entscheidend für das lawinenartige Wachstum ist die Tatsache, daß der Teilchenüberschuß die Wahrscheinlichkeit vergrößert, daß Teilchen in der Zelle bleiben, was wiederum den Teilchenüberschuß erhöht usw.

Während der Zufall normalerweise auf die Mikrovorgänge der einzelnen Sprünge beschränkt bleibt, wächst er sich in einer derartigen instabilen Situation zu einem makroskopischen Phänomen aus. Der Zufall wird auf diese Weise in Gestalt der einseitigen Verteilung der Teilchen konserviert. Betrachtet man diese Endkonstellation als einfachste Form einer Strukturbildung, so wird deutlich, daß der Symmetriebruch als entscheidendes Element der Strukturbildung angesehen werden muß [4].



*Abb. 13. Die Gleichverteilung ist instabil und führt zu einer Ansammlung der Glaskugeln in einer der beiden Zellen.*



*Abb. 14: Bleibt die Masse (und damit auch das Volumen) eines Haufens erhalten, so wächst der Böschungswinkel bzw. die Steigung des Haufens ( $\sim Gh^2$ ) proportional zum Quadrat der Höhe  $h$ .*

## 4. Mechanismen der Strukturbildung

Die in dem Modellversuch erkannten Mechanismen bilden das Grundelement für eine Erklärung der verschiedenen dynamischen Strukturbildungsvorgänge der Bärlappsporen auf der vibrierenden Platte. Eine Verallgemeinerung der im Modellversuch auf zwei Zellen beschränkten Verteilungsmöglichkeiten der Teilchen auf viele Freiheitsgrade liegt auf der Hand:

### 4.1 Die Rolle der Nichtlinearität

Der nichtlineare Verstärkungsmechanismus, der zur Ansammlung der Teilchen in einer der beiden Zellen führte, läßt sich direkt auf die Ausbildung von Haufen übertragen. Es genügt,

daß die Sporen an einer Stelle geringfügig dichter liegen, um einen Haufenbildungsprozeß auszulösen: Die Wahrscheinlichkeit, daß von außen in eine solche dichtere Ansammlung springende Teilchen darin steckenbleiben, ist größer, als daß Teilchen die Ansammlung verlassen. Auf diese Weise kommt es zu einer Aufböschung und zur Bildung von oft kreisrunden, linsenförmigen Haufen. Mit wachsender Energiezufluhr nimmt die Aufböschungstendenz der Teilchen und damit die Haufenhöhe auf Kosten des Haufenradius zu. Gleichzeitig wächst aber auch die schwerkraftsbedingte Tendenz der Haufen auseinanderzulaufen und dabei die mit der Aufböschung zunehmende potentielle Energie zu dissipieren.

Es liegt nahe, die Aufböschungstendenz durch die dadurch pro Zeiteinheit bedingte Zunahme der potentiellen Energie  $\dot{E}_p$  zu erfassen. Diese erfolgt umso schneller, je höher der Haufen bereits ist. Wir gehen der Einfachheit halber davon aus, daß gilt:  $\dot{E}_p \sim h$ .

Die Tendenz der Teilchen auseinanderzulaufen, kann pauschal durch die dabei pro Zeiteinheit dissipierte (entwertete) Energie [6]  $\dot{E}_D$  erfaßt werden.

wächst umso stärker, je steiler die Böschung  $m$  des Haufens ist. Wir gehen davon aus (siehe Abb.14), daß gilt:  $\dot{E}_D \sim m \sim h^2$ .

Daraus ergibt sich, daß  $\dot{E}_D$  „schneller“ mit der Haufenhöhe wächst als die durch die Aufböschung bedingte potentielle Energie  $\dot{E}_p$ . Daher wachsen die Haufen nicht in den Himmel:

Das Wachstum wird schließlich durch das Auseinanderlaufen begrenzt.

Ähnlich wie bei der Strukturbildung infolge der Bénardkonvektion [4] erweist sich die in der unterschiedlichen Wachstumsgeschwindigkeit der beiden gegen-einanderwirkenden Tendenzen ( $\dot{E}_D$  und  $\dot{E}_p$ ) zum Ausdruck kommenden Nichtlinearität als entscheidendes Element der Strukturbildung. Sie regelt die individuelle Haufengröße als stationäres Gleichgewicht zwischen Aufbau und Abbau ein und stabilisiert sie gegen äußere Störungen (Abb. 15).

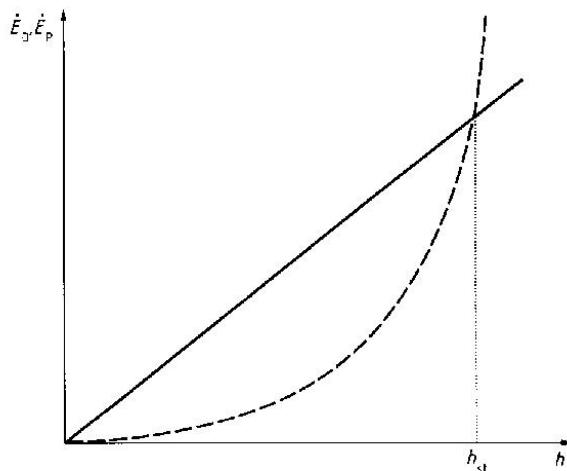


Abb. 15. Verhalten der Energieströme  $\dot{E}_D$  und  $\dot{E}_p$  als Funktion der Höhe eines gegebenen Haufens.

## 4.2 Der ideale Haufen ist kreisförmig

Die Kreisform der Haufen ist ebenfalls eine Folge dieses Regelmechanismus. Jede Abweichung von der Kreisform bedeutet, daß einige Sandkörner einen größeren Abstand vom Mittelpunkt haben als die übrigen. Die Tendenz auseinanderzulaufen und dadurch den Radius weiter zu vergrößern, ist bei ihnen kleiner als bei den anderen. Daher überwiegt für sie solange die Aufböschungstendenz, bis keine Abweichung mehr vorhanden und damit die Kreisform eingeregelt ist.

Führt man sich vor Augen, daß diese Mechanismen ständig am Werk sind, so wird klar, daß die Haufen gar keine Haufen im üblichen Verständnis sind, sondern in ständiger Bewegung befindliche Teilchen, die ihren filigranen Tanz insgesamt auf einem Gebiet ausführen, das die Form eines linsenförmigen Gebildes besitzt. Kommt die Vibration und mit ihr die lebensnotwendige Energiezufluhr zum Erliegen, so bricht die Dynamik des Haufens zusammen, ohne

daß er seine äußere Gestalt wesentlich ändert. Er ist dann aber ein in Bewegungslosigkeit erstarrter Haufen, der sich zu einem dynamischen Haufen wie ein unbelebter zu einem lebenden Organismus verhält.

### 4.3 Mathematische Modellierung und Simulation eines dynamischen Sandhaufens

Wir haben die Wechselwirkungen der Granulatteilchen rein mechanisch beschrieben: Ange regt durch die schwingende Platte kommt es zu Stößen zwischen einzelnen Teilchen. Einige Partikel können sogar die obere Granulatschicht verlassen und beschreiben dann unter dem Einfluß der Schwerkraft eine Flugbahn, vergleichbar der eines schießen Wurfes.

#### 4.3.1 Stoßvorgänge

Wird die Platte mit dem Granulat in Schwingung versetzt, so werden zunächst die untersten Teilchen (im Idealfall) bis zur maximalen Plattengeschwindigkeit beschleunigt:

$$v_{Platte} = a \cdot t \quad \text{mit} \quad t \sim \frac{I}{\omega} \quad \Rightarrow \quad v_{Platte} = \frac{a}{\omega} = \frac{a}{2\pi \cdot f}.$$

(Mit  $a$  als maximaler Beschleunigung,  $f$  als Schwingungsfrequenz der Platte und  $\omega = 2\pi \cdot f$ .)

Diese Teilchen führen nun ihrerseits Stöße mit den darüber befindlichen Teilchen aus. Für teilelastische Stöße zwischen zwei Teilchen (gleicher Masse) mit den Geschwindigkeiten  $v_1$ ,  $v_2$  vor und  $v'_1$ ,  $v'_2$  nach dem Stoß gilt allgemein:

$$v'_2 = v_1 \cdot \frac{1+k}{2} \quad \text{mit} \quad k := \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2}.$$

Der Stoßparameter  $k$  interpoliert zwischen  $k=0$  beim inelastischen und  $k=1$  beim elastischen Stoß.

Vereinfachen wir an dieser Stelle das Stoßszenario des Granulats und beschränken uns dabei allein auf Stoßvorgänge in vertikaler Richtung [8], so ergibt sich die Geschwindigkeit  $v_N$  eines Teilchens der obersten Schicht (Schichtdicke  $N$ ) nach weiteren  $N-1$  Stoßvorgängen dieser Art zu:

$$v_N = v_{N-1} \cdot \frac{1+k}{2} = v_{N-2} \cdot \left( \frac{1+k}{2} \right)^2 = \dots = v_{Platte} \cdot \left( \frac{1+k}{2} \right)^{N-1}.$$

Daraus folgt:

$$v_N = v_{Platte} \cdot \exp \left( \ln \left( \frac{1+k}{2} \right)^{N-1} \right) = v_{Platte} \cdot \left( (N-1) \cdot \ln \left( \frac{1+k}{2} \right) \right).$$

#### 4.3.2 Flugbewegung - schiefer Wurf

Ein derart aus der Granulatschicht senkrecht nach oben herausgeschleudertes Teilchen würde (nach obiger Vereinfachung) wie beim *senkrechten Wurf* eine Strecke nach oben fliegen, umkehren und wieder herunterfallen. Eine strukturelle Veränderung der Granulatschicht wäre aufgrund solcher Bewegungsmuster nicht zu erwarten.

Aufgrund der Wechselwirkungen zwischen benachbarten Teilchen muß man allerdings davon ausgehen, daß die Teilchen unter einem bestimmten Abflugwinkel die Schicht verlassen und die Bewegung eines *schießen Wurfes* ausführen.

Bei Kenntnis der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  und des Abflugs- bzw. Wurfwinkels  $\alpha$  lässt sich die Dynamik des herausgeschleuderten Teilchens mit Hilfe der bekannten Gesetzmäßigkeiten für beschleunigte Bewegungen beschreiben. Allgemein gilt :

$$v = v_0 + a \cdot t, \quad s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2.$$

Zur Analyse der Flugbewegung eines Teilchens im Schwerfeld der Erde erfolgt zunächst (wie auch beim schiefen Wurf) eine Komponentenzerlegung der Bewegungsgleichungen (Abb.16):

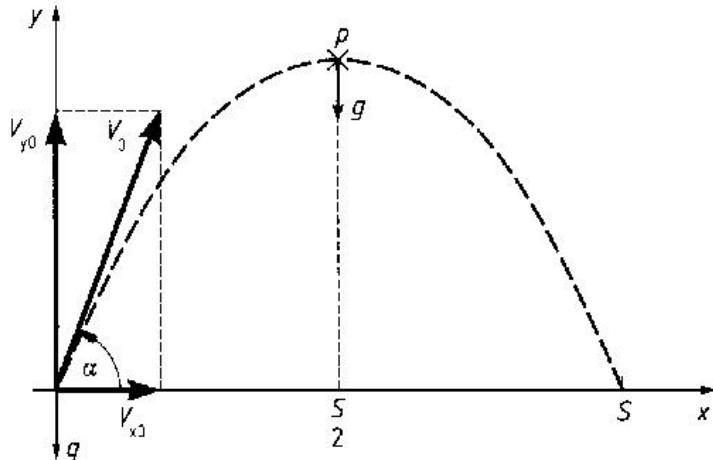


Abb. 16. Schiefer Wurf: Flugparabel und Komponentenzerlegung der Anfangsgeschwindigkeit.

In waagerechter Richtung bewegt es sich gleichförmig :

$$v_x = v_{x_0}, \quad [v_{x_0} = v_0 \cdot \cos(\alpha)] \quad \text{und} \quad x = v_{x_0} \cdot t.$$

In senkrechter Richtung fällt es :

$$v_y = v_{y_0} - g \cdot t, \quad [v_{y_0} = v_0 \cdot \sin(\alpha)] \quad \text{und} \quad y = v_{y_0} \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2.$$

Im Hinblick auf eine Simulation der Haufenbildung interessiert uns lediglich der neue Aufenthaltsort des „geworfenen“ Teilchens, der i.w. aus der Flugrichtung und der *Flug- bzw. Reichweite*  $x_S$  ermittelt werden kann. Untersucht man die Flugparabel eines Teilchens, so ist beim Erreichen des Punktes  $p$  die halbe Flugzeit  $t_{\frac{s}{2}}$  (vgl. Abb.16) verstrichen. Da an dieser Position die y-Komponente der Geschwindigkeit des Teilchens zu Null wird  $v_y(p) = 0$ , gilt:

$$t_{\frac{s}{2}} = \frac{v_{y_0}}{g}.$$

Die Flugweite  $x_S$  berechnet sich dann zu :

$$x_S = 2 \cdot x(t_{\frac{s}{2}}) = v_{x_0} \cdot \frac{v_{y_0}}{g} = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g}.$$

### 4.3.3 Formel für die Dynamik von Granulatteilchen

Kombiniert man die Überlegungen zu den Stoßvorgängen mit denen zur Flugbewegung, so ergibt sich folgendes Modell: An einem Ort liegen  $N$  Teilchen gleicher Masse senkrecht übereinander, die von unten einen teilelastischer Stoß erfahren. Das letzte Teilchen der Pulverschicht verläßt den Haufen in Form eines schiefen Wurfes. Da die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  eines solchen Teilchens (bzw.  $v_N$  bei Betrachtung aller  $N$  Teilchen) bekannt ist (s.o.), ergibt sich durch Einsetzen in obige Formel (Flugweite) dann für die Reichweite :

$$x_S = x_{S,v_N} = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g} = \left[ \frac{a}{2\pi \cdot f} \cdot \left( \frac{1+k}{2} \right)^{N-1} \right]^2 \cdot \frac{\sin(2\alpha)}{g}.$$

Daraus folgt :

$$x_S = \left( \frac{a}{2\pi \cdot f} \right)^2 \cdot \frac{\sin(2\alpha)}{g} \cdot \exp \left[ (N-1) \cdot 2 \cdot \ln \left( \frac{1+k}{2} \right) \right] \quad (\text{mit: } \ln \left( \frac{1+k}{2} \right) \leq 0).$$

Mit anderen Worten: Je höher ein Teilchen liegt, desto (exponentiell) weniger weit kann es fliegen. Landet also ein aus einem Haufen herausgeschleudertes Teilchen auf einer Position größerer Schichtdicke, so wird es bei einem erneuten Stoß nicht mehr sehr weit kommen und in der Nähe seines Aufenthaltsortes bleiben. Die Chance für ein Entkommen sinkt sozusagen exponentiell mit der jeweiligen Schichtdicke. Anhand dieser Flugweiten-Formel läßt sich der (Selbst-) Verstärkungsmechanismus, der zu einer Aufböschung von Granulatteilchen führt, mathematisch erfassen.

### 4.3.4 Zur Simulation der Strukturbildung

Neben der Tendenz zur Haufenbildung muß für eine Simulation der Haufendynamik natürlich auch die schwerkraftsbedingte Tendenz des Auseinanderlaufens von Haufen (s.o.) realisiert werden. Für das Heruntergleiten von Partikeln haben wir folgenden Modellansatz gewählt:

#### (A) Gleiten :

- Die Abflachung der Hügel entsteht (i.w.) durch seitliches Heruntergleiten von Partikeln.
- Die „Stärke“ des Heruntergleitens, d.h. die Anzahl der seitlich abrutschenden Teilchen, läßt sich z.B. aus der „Belegungshöhdifferenz“ benachbarter Orte berechnen. Im einfachsten Fall bewegt sich ein Teilchen an eine benachbarte Position mit geringerer Belegungshöhe (d.h. nach links oder rechts) oder mehrere Teilchen rutschen von der Position  $i$  zur Position  $i \pm 1$  (mit niedrigerer Belegungshöhe  $h_{i \pm 1, \min}$ ). Die Anzahl  $X$  der bewegten Partikel beträgt dann :

$$X = |h_i - h_{i \pm 1, \min}| / 2$$

- Diese Art der Umschichtung von Partikeln zu weniger stark belegten Orten wird nun für alle Positionen des Haufens durchgeführt.

Für die Aufböschung ergibt sich dann folgender Algorithmus :

(B) Springen :

- Von einer zufällig gewählten Position aus verläßt das „oberste“ Teilchen (Schichtdicke  $N$ ) den Haufen.
- Vereinfacht man die Formel für die Flugweite und faßt die verschiedenen Startparameter als Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  zusammen , so folgt für die Sprungweite :

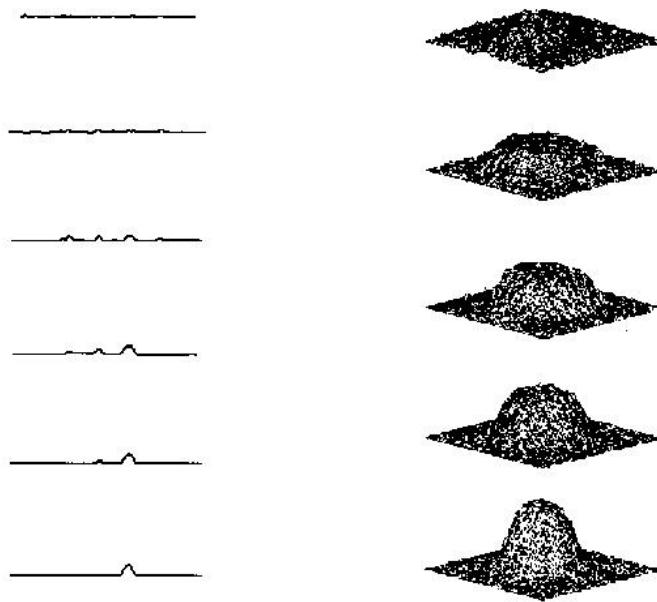
$$S = C_1(\alpha, f, a) \cdot \exp[C_2(k) \cdot (N - 1)] \quad \text{mit } C_1 \geq 0, C_2 \leq 0.$$

- Neben der exponentiellen Abhängigkeit von der Schichtdicke  $N$  (und einer durch die gewählte Stoßzahl bestimmten Konstante  $C_2$ ) hängt die Flugweite dann linear von einem Kontrollparameter  $C_1$  (abhängig von Frequenz, Amplitude und Abflugwinkel) ab. So läßt sich - wie im Realexperiment - die „Aufböschungstendenz“ z.B. durch Variation dieses Kontrollparameters direkt steuern.
- Die horizontale Flugrichtung (in zwei Dimensionen: links/rechts, in drei Dimensionen: zusätzlich vorne/hinten) kann mit Hilfe des Zufallsgenerators ausgewählt werden (aufgrund der Radialsymmetrie, s.o.).
- Dieser Vorgang wird solange iteriert, bis von allen vorhandenen Positionen (oder einem gewissen Prozentsatz davon) ein Teilchen abgeflogen ist.

Die eigentliche Simulation (Abb.17) erfolgt dann (beispielsweise) durch *Iteration* der Gleit- und Sprungvorgänge :

(C) Simulation durch Iteration :

- Zunächst wird jeder Teilchenposition in der Schicht eine entsprechende Belegungshöhe zugeordnet. Bewährt hat sich hier beispielsweise eine homogene Teilchen-Verteilung.
- Die Werte für die Stoßzahl sollten für eine Simulation von „Bärlappsporen“ (nach unseren Erfahrungen) etwa zwischen  $0.5 \leq k \leq 0.8$  gewählt werden. Der Kontrollparameter  $C_1$  (in Abhängigkeit der Anregungsamplitude und -frequenz und des Flugwinkels) sollte zur Veranschaulichung der Dynamik der Haufenbildung auch während des Programmablaufes variierbar sein.
- Pro Iterationsschritt erfolgt nun jeweils ein Vorgang „Springen“ und (mindestens) ein Vorgang „Gleiten“. In Anlehnung an eine reale Teilchendynamik, bei der sich die Positionen nur selten um eine Einheit ändern und stattdessen oft ein lawinenartiges Abrutschen zu beobachten ist, hat es sich als erfolgreich erwiesen, das „Gleiten“ etwas häufiger ablaufen zu lassen als das „Springen“ (s.o., vgl. [1]).



*Abb. 17. Ergebnisse der Computersimulationen von zweidimensionalen (links) und dreidimensionalen (rechts) Sandhaufen.*

## 5. Sand als Modellsubstanz

*To see a World in a Grain of Sand*  
WILLIAM BLAKE

Das kollektive Verhalten von Sand spricht nicht nur für sich, sondern eignet sich darüber hinaus, grundlegende Ideen der Selbstorganisation in Vielteilchensystemen zu vermitteln [4,6,7]. Außerdem wollen wir mit den Sandphänomenen die Aufmerksamkeit auf die „endlose Welt lenken, aus der der Sand genommen wurde“ (Katherine Hayles).

Am Beispiel des Sandes erfahren wir, daß sich unter dem Einfluß der Schwerkraft, deren Wirkungen wir bislang nur in der Nähe des thermodynamischen Gleichgewichts kennengelernt haben, unerwartete Vorgänge ereignen, sobald sich der Sand durch Zufuhr von kinetischer Energie aus dem Gleichgewicht entfernt: „Die Gravitation wirkt sich auf dieses System nicht so aus wie auf einen schweren Körper, sie veranlaßt ihn, neue, differenzierte Verhaltensweisen, neue raum-zeitliche Strukturen zu entwickeln. Dies ist ein Beispiel dafür, daß physikalisch-chemische Systeme fern vom Gleichgewicht empfindlich werden für Faktoren, die in Gleichgewichtsnähe vernachlässigbar sind“ [9].

Die Kooperation der Sandkörner führt zu Formen, deren Aussehen und Zustandekommen große Ähnlichkeit mit Formen in ganz anderen Bereichen aufweisen. Es zeigt sich, daß das materielle Substrat, in dem die Formen auftreten, aus einer übergeordneten Perspektive in ihrer Bedeutung in den Hintergrund treten. Allerdings wird auch klar, daß die Formen ohne ein Substrat undenkbar sind, sondern Modifikationen der Materie darstellen, die ebenso wenig von der Materie getrennt werden können wie die Welle vom Wasser. „Keine Welle ohne Wasser, aber keine Welle aus demselben Wasser“ (PAUL VALÉRY). Die Selbstorganisationsvorgänge innerhalb des Sandes bringen nicht nur die spezifische Form des Haufens hervor

und stabilisieren sie gegen äußere Störungen, die Form ist umgekehrt notwendig dafür, daß die Vorgänge ablaufen können. Form und Funktion sind in subtiler Weise aufeinander bezogen und bedingen sich gegenseitig. Darin erkennt man einen wichtigen Aspekt, der auch im Bereich des Lebens eine wichtige Rolle spielt [7].

Warum, so fragen wir uns schließlich, entdeckt man diese Dinge erst heute? Sind nicht die Strukturen im Sand seit langem bekannt? Hatte nicht schon MICHAEL FARADAY ähnliche Versuche mit vibrierendem Sand durchgeführt [10]? Wesentlich für die Bedeutung, die den Strukturen im Sand heute beigegeben werden, ist ein verändertes Naturverständnis, das mit der Etablierung der nichtlinearen Physik in den letzten Jahrzehnten einhergeht. Vielleicht gilt, was WILLIAM SHAKESPEARE in seinem Mittsommernachtstraum als Aufgabe des Dichters erkennt, mutatis mutandis auch für den Wissenschaftler:

*The forms of things unknown, the poet's pen  
Turns them to shapes, and gives to airy nothing  
A local habitation and a name.*

## Literatur

- [1] H. J. SCHLICHTING, V. NORDMEIER: Lawinen eines Sandhaufens. Wie gesetzmäßig verhalten sich unvorhersehbare Ereignisse. - Praxis der Naturwissenschaften/Physik 45/1 (1996) (Dort weitere Literatur).
- [2] F.J. PETTIJOHN, P.E. POTTER, R. SIEVER: Sand and Sandstone. New York etc., Springer 1987.
- [3] H. J. SCHLICHTING, D. JUNGmann, V. NORDMEIER: Die Großen landen immer oben. Mischen durch Entmischen. - Physik in der Schule (1996) (Im Druck).
- [4] H. J. SCHLICHTING: Prozeß und Struktur. Probleme der Selbstorganisation im Bereich der unbelebten Natur. - Physik in der Schule 32/11 (1994) S.392 sowie 32/12 (1994) S.430.
- [5] H. M. JAEGER, S. R. NAGEL: Physics of the Granular State. - Science 255 (1992) S.1523 (Dort umfangreiche Literaturliste).
- [6] H. J. SCHLICHTING: Energie, Entropie, Synergie. Ein Zugang zur nichtlinearen Physik. - MNU 46/3 (1993) S.138.
- [7] H. J. SCHLICHTING: Auf der Grenze liegen immer die seltsamsten Geschöpfe. Nichtlineare Systeme aus der Perspektive ihrer fraktalen Grenzen. - MNU 47/8 (1994) S. 451.
- [8] F. DINKELACKER, A. HÜBLER, E. LÜSCHER: Pattern Formation of Powder on a Vibrating Disc. - Biol. Cybern. 56 (1987) S.51.
- [9] I. PRIGOGINE, I. STENGERS: Das Paradox der Zeit. Zeit, Chaos und Quanten. München, Zürich: Piper (1993) S. 92.
- [10] M. FARADAY: On a peculiar class of Acoustical Figure; and on certain Forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic Surfaces. - Phil. Trans. Roy. Soc. London 121 (1831) S.299-340.

## ANHANG:

### Anmerkungen zu Abschnitt 4.1 und Abbildung 14:

Wenn die Masse und damit auch das Volumen eines kegelförmigen Sandhaufens erhalten bleibt, so ist  $G^2 h$  konstant (mit  $G$ : Radius der Grundfläche,  $h$ : Höhe des Haufens), denn:

$$V = \frac{\pi}{3} G^2 h.$$

Die Steigung (Böschung)  $m$  eines Haufens ergibt sich aus dem Quotienten seiner Höhe  $h$  und dem Radius seiner Grundfläche  $G$ :

$$m = \frac{h}{G}.$$

Prinzipiell könnte man jetzt zwei Lösungswege skizzieren:

- Vollständiges Auflösen der Volumengleichung nach  $G$  und Einsetzen in die zweite Gleichung:

$$m = \frac{h}{G} = \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{h^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{V}} \sim h^{\frac{3}{2}} \quad \text{mit} \quad G = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$$

- Einfaches Auflösen der Volumengleichung nach  $G$  und Einsetzen in die zweite Gleichung:

$$m = \frac{h}{G} = \frac{\pi}{3} \frac{G h^2}{V} \sim G h^2 \quad \text{mit} \quad G = \frac{3V}{\pi r h}$$

Allerdings wächst in beiden Fällen die Steigung eines Haufens überproportional zu seiner Höhe an. Die ‘Dissipationsrate’  $\dot{E}_D \sim m$  (vgl. Abschnitt 4.1) verhält sich also in jedem Fall nichtlinear.