physica didactica 18/1, 14- 44 (1991)

Strukturen im Chaos -

Einfache Systeme als Zugang zu einem neuen Forschungsbereich der modernen Physik

Die Realität ist vielleicht das reinste Chaos

G. Chr. Lichtenberg

Das Tolle neben dem Schönen

Das Chaos ist auch nicht mehr, was es mal war, nämlich: das Ungeordnete, Wirre, Gesetzlose, Formlose, Zufällige, Tolle... Seit einiger Zeit wird es mit Schönheit, Kreativität, Struktur und Ordnung in Verbindung gebracht: "Das Tolle neben dem Schönen" (Jean Paul) also. Die "Schönheit im Chaos" ist eines der Schlagworte, mit denen sich ein in den letzten Jahren ebenso sprunghaft wie chaotisch entwickelnder Zweig der naturwissenschaftlichen Forschung in einer breiteren Öffentlichkeit Aufmerksamkeit zu verschaffen sucht. Nicht wenige Wissenschaftler sehen in der Chaosforschung mehr als nur eine Herausforderung insbesondere der klassisch geprägten Naturwissenschaften. Schon ist von einer konzeptuellen Revolution im Sinne T.S. Kuhns die Rede, die eine völlig veränderte Welt zurücklassen wird [1].

Dabei ist die dialektische Vermittlung zwischen Ordnung und Chaos so alt wie die Welt. Es gibt kaum einen Ursprungsmythos, in dem nicht der Kosmos, unser geordnetes Universum, aus dem Chaos geschöpft wird: Die Welt ist also geordnetes Chaos, von einem Demiurgen zur Ordnung gebrachte Formlosigkeit: "In the beginning, how the heav'ns and earth rose out of chaos" (John Milton).

Die kulturellen Aktivitäten der Menschen haben sich seither vor allem auf die geordnete, von strengen Gesetzen beherrschte Welt bezogen, in der zufallsbestimmtes und willkürliches Verhalten stets auch als Ausdruck einer höheren Notwendigkeit angesehen wurden. Das unerbittliche und gleichgültige Schicksal, wie es vor allem in der griechischen Tragödie seinen bleibenden Ausdruck gefunden hat, wird im modernen Denken zur Ordnung der Natur [2]: Die neuzeitliche Physik hat es sich zur wesentlichen Aufgabe gemacht, die Ratschläge des Schicksals in Form von physikalischen Gesetzen aufzudecken und sich durch die Technik dienstbar zu machen. Die Befragung des Orakels wird zur berühmten Frage an die Natur, aus mystischen Kulthandlungen werden exakte Experimente, die allerdings für den Laien meist nicht weniger mystisch erscheinen.

Je einflußreicher diese deterministische Position der Naturwissenschaften wurde und je mächtiger sie in Form der Technisierung auf das Alltagsleben der Menschen einwirkte, umso deutlicher wurden jedoch auch Defizite erkennbar. Sie machten sich vor allem in Anzeichen dafür bemerkbar, daß das mit der Schaffung der Welt mühsam zur Ordnung gebrachte Chaos in der einen oder anderen Weise noch virulent ist: "Das Tohuwabohu, aus dem alles gekommen ist, hat nie aufgehört zu existieren. Es geht durch Zeit und Raum hindurch. Die Unordnung zeugt die Ordnung und geht durch sie hindurch" (Michel Serres [3]).

Obwohl diese Sicht der Dinge bereits vor 200 Jahren vom Naturphilosophen Friedrich Schelling erkannt und mit einer aus heutigem Verständnis geradezu visionären Deutlichkeit dargestellt wurde, mußten erst jene Probleme und Phänomene, die sich klassisch nicht lösen und beschreiben ließen, weiter in den Mittelpunkt des naturwissenschaftlichen Interesses rücken, bevor sich etwas tat. Stellvertretend für viele andere sei hier nur das Problem der Turbulenz genannt, das sich nunmehr seit über 100 Jahren hartnäckigen, mit allen Mitteln der klassischen Physik ausgeführten Lösungsversuchen widersetzt und erst heute im Rahmen der Chaosforschung bereit zu sein scheint, seine Geheimnisse preiszugeben; freilich auf ganz andere Weise als man es aus klassischer Sicht erwarten konnte. Die Bedeutung der Turbulenz mag man vielleicht auch daran ermessen, daß kein Geringerer als Arnold Sommerfeld noch im Erfolgstaumel der quantenmechanischen Umwälzungen daran dachte, seinem Doktoranden Heisenberg "kein Thema aus der Spektroskopie, sondern das schwierige Problem der Turbulenz vor(zuschlagen), in der Hoffnung, daß wenn irgendeiner, Heisenberg dies Problem lösen würde. Aber es ist bis heute ungelöst" [4].

Die Turbulenz manifestiert sich in einem chaotischen Ensemble wohlgeordneter ineinander geschachtelter Hierarchien von Wirbeln. Solche Wirbel sind übrigens nicht nur als chaotisches Phänomen interessant, sondern auch als Metapher für die Beziehung zwischen chaotischen und sich selbst organisierenden Vorgängen, wie sie typisch sind u.a. für zahlreiche Phänomene in der Natur: "Der Wirbel ist nicht etwas Feststehendes, sondern beständig Wandelbares - aber in jedem Augenblick neu Reproduziertes. Kein Produkt in der Natur ist also fixiert, sondern in jedem Augenblick durch die Kraft der ganzen Natur reproduziert" (Schelling [5]).

Die Chaosforschung ist also ein äußerst facettenreiches und mehrperspektivisches Unternehmen, das noch für manche Überraschung gut sein wird. Wir wollen uns im folgenden auf einen wichtigen Aspekt chaotischer Phänomene beschränken, indem wir der Frage nachgehen, inwieweit chaotisches, also im naiven Verständnis nicht beherrschbares, zufallsbestimmtes Verhalten überhaupt physikalisch zugänglich gemacht werden kann. Wir wollen in aller Bescheidenheit versuchen, der folgenden Aufforderung Schillers nachzukommen: "Sucht das vertraute Gesetz in des Zufalls grausenden Wundern, / Sucht den ruhenden Pol in der Erscheinungen Flucht "[6].

Der Zufall hat viele Gesichter

Alles Sein des Universums ist
das Ergebnis von Zufall und Notwendigkeit
Demokrit

Wenn das Chaos durch irgendetwas bestimmt ist, dann durch den Zufall. So ließe sich der Eindruck umschreiben, den chaotische Erscheinungen beim unvoreingenommenen Betrachter hinterlassen. Das Chaos erweist sich daher als eine Art Trojanisches Pferd, das dem Zufall Einlaß in eine Disziplin zu gewähren scheint, zu deren "Tugenden" es gehört, nichts dem Zufall zu überlassen.

Indessen ist es nicht das erste Mal, daß sich die Physik mit den "Angriffen" des Zufalls auseinanderzusetzen hat. Bereits im 18. Jahrhundert hatten sich die Wissenschaftler zufallsbedingten Problemen zu stellen, die sich bei der mathematischen Durchleuchtung von Glücksspielen ergaben. Dabei konnte der Zufall schließlich im Rahmen der Wahrscheinlichkeitstheorie kalkulierbar und somit "unschädlich" gemacht werden: "Auch der Zufall ist nicht unergründlich - er hat seine Regelmäßigkeit" (Novalis). An der großen Bedeutung statistischer Konzepte für die moderne Physik läßt sich die kreative Rolle des Zufalls bei der physikalischen Gestaltung der Realität ermessen. Dennoch wurde auch nach dieser probabilistischen Revolution an der Fiktion einer zufallsfreien, deterministischen Physik festgehalten: Zufallsbedingtes Verhalten wurde als bloßer Reflex der Komplexität der Natur angesehen, wie sie sich beispielsweise in der großen Teilchenzahl eines Gases äußert. Weil der Mensch überfordert sei, alle Anfangsbedingungen der Teilchen festzustellen, sei er auf statistische Methoden angewiesen oder müsse sich vom Laplaceschen Dämon beraten lassen:

"Wir müssen...den gegenwärtigen Zustand des Weltalls als die Wirkung seines früheren und als die Ursache des folgenden Zustands betrachten. Eine Intelligenz, welche für einen gegebenen Augenblick alle in der Natur wirkenden Kräfte sowie die gegenseitige Lage der sie zusammensetzenden Elemente kennte und überdies umfassend genug wäre, um diese gegebenen Größen der Analysis zu unterwerfen, würde in derselben Formel die Bewegungen der größten Weltkörper wie des leichtesten Atoms umschließen; nichts würde ihr ungewiß sein, und Zukunft wie Vergangenheit würden ihr offen vor Augen liegen" [7].

Diese Auffassung reicht bis in unsere Tage: Das Bemühen, durch Erfassung einer immer größeren Zahl von Parametern mit Hilfe immer größerer Computersysteme schließlich zu langfristigen Wetterprognosen zu kommen, zählt ebenso dazu wie die Versuche, durch groß angelegte Computersimulationen die ökonomische, politische und ökologische Entwicklung auf unserem Planeten vorherzusagen[8]. Nicht zuletzt der sich dabei abzeichnenden Erfolglosigkeit ist es zuzuschreiben, daß der Zufall in Gestalt chaotischer Phänomene erneut Sand ins Getriebe der klassischen Weltmaschine bringt. Diesmal ist der Sand zu fein, als daß er vom Laplaceschen Dämon beseitigt werden könnte. Zwar wird die kausale Basis des Determinismus auch im Falle chaotischer Vorgänge nicht in Frage gestellt. Der Zufall bedient sich gewissermaßen der Kausalität, um das Unvorhersagbare zu entfalten, so daß "auch das Zufälligste...nur (als) ein auf entfernterem Wege herangekommenes Notwendiges" (Schopenhauer) erscheint.

Dennoch wird diese deterministische Variante des Zufalls vorerst noch als ungeheuerlicher angesehen als die indeterministische Version zufallsbedingten Verhaltens im Rahmen der Quantentheorie: In Gestalt der Unschärferelation wird dort der Zufall zu einem konstituierenden Element eines herrschenden physikalischen Paradigmas. Auch wenn Einstein sich dieser Auffassung zeit seines Lebens mit den berühmten Worten, daß Gott nicht würfelt, widersetzt hat, ist sie von der übrigen scientific community einhellig akzeptiert worden. Vermutlich fällt es weitaus schwerer, zufallsbedingte Vorgänge im vertrauten makroskopischen Bereich der klassischen Physik anzuerkennen als in dem der unmittelbaren Erfahrung entzogenen Mikrokosmos.

Die lineare Welt ist einfach

"Die Welt ist so kompliziert, verworren und überladen; um etwas klarer zu sehen muß man ausdünnen, ausdünnen "
Italo Calvino

Beim Ausdünnen bewiesen Newton und andere eine glückliche Hand. Jedenfalls gelang es den Begründern der klassischen Physik, die Komplexität der Welt auf ein Maß zu reduzieren, das eine quantitative, mathematisch einfache Beschreibung ermöglichte. Dabei spielte die Beschränkung auf weitgehend lineare und reversible Vorgänge eine wesentliche Rolle, wie sie bereits in der Newtonschen Regel, "gleichartigen Wirkungen dieselben Ursachen zuzuschreiben" [9], mit großer Deutlichkeit zum Ausdruck kommt.

Zu einer mathematischen Beschreibung des Verhaltens eines Systems kommt man, indem man die Einflüsse, denen das System ausgesetzt ist, die sog. Dynamik, durch eine Differentialgleichung erfaßt und durch Lösung derselben explizit macht. Die Tatsache, daß das Auffinden der Lösung bei linearen Differentialgleichungen sehr einfach ist, hat nicht unwesentlich zum Erfolg der klassischen Physik beigetragen: Die allgemeine Lösung ergibt sich einfach aus der Summe zweier spezieller Lösungen. Hierin manifestiert sich das für das klassische Naturverständnis typische Überlagerungsprinzip, wonach ein komplexer Vorgang aus der Summe einfacher Vorgänge zusammengesetzt werden kann. Mit der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung hat man die gesamte Entwicklung des System auf einmal in der Hand, vorausgesetzt nur, man kennt dessen gegenwärtigen Zustand mit hinreichender Genauigkeit. Die Differentialgleichungen verleihen der Zeit Gestalt; mit ihnen besitzt man gewissermaßen die Ewigkeit im gegenwärtigen Augenblick. Der Ausspruch: "Die Herrschaft über den Augenblick ist die Herrschaft über das Leben" (Marie Ebner - Eschenbach) könnte daher als deterministisches Credo angesehen werden. Der Erfolg der klassischen Physik zeigt uns, daß die Natur sich tatsächlich in vielen Fällen so verhält, wie in den Berechnungen unterstellt wird. Man denke nur an die Voraussagen von Sonnen- und Mondfinsternissen und an die erfolgreiche Landung von Menschen auf dem Mond.

Die Welt ist nichtlinear

"Ich kam daher auf glatten Wegen
Und jetzt steht mir Geröll entgegen"
Goethe, Faust II

Diese Erfahrung sollte den Wissenschaftlern der klassischen Physik nicht erspart bleiben. Es sei nur an das Problem der Turbulenz erinnert. Ganz im Geiste des Laplaceschen Dämons ging man und geht man teilweise auch heute noch davon aus, daß die Erfolglosigkeit der klassischer Bemühungen lediglich der Komplexität zuzuschreiben sei, die es wie Geröll von den klassischen Wegen zu beseitigen gelte. Große Hoffnungen werden dabei auf die Entwicklung leistungsfähiger Computer gesetzt, denen gewissermaßen die Rolle von Planierraupen zugedacht ist. Als Ironie des Schicksals muß es indessen angesehen werden, daß die Computer offenbar dabei sind, das Gegenteil zu bewirken: Mit ihrer Hilfe können irreguläre, heute chaotisch genannte Erscheinungen selbst aus Systemen mit nur wenigen Freiheitsgraden herausgerechnet und auf eindrucksvolle Weise visualisiert werden. "Sehr geringe Unterschiede bedingen manchmal große Verschiedenheiten" Marie von Ebner- Eschenbach

Durch diese Alltagsweisheit wird die Einsicht vermittelt, daß die Verknüpfung zwischen einer als unbedeutend angesehenen Ursache und einer unerwartet großen Wirkung durchaus kausal sein kann. Die Konsequenzen, die sich daraus für die klassische Physik ergeben, werden gleichwohl erst heute in vollem Umfang erkannt. Aber bereits vor etwa hundert Jahren hatten namhafte Physiker darauf aufmerksam gemacht, daß das Kausalitätsprinzip in der Form: Gleiche Ursachen führen zu gleichen Wirkungen verträglich ist mit zufallsbedingt erscheinenden Vorgängen: So hatte Poincaré bei der Behandlung des im Vergleich mit Vielteilchensystemen einfach erscheinenden Dreikörperproblems erkannt, "daß kleine Unterschiede in den Anfangsbedingungen große Unterschiede in den späteren Erscheinungen bedingen (können); ein kleiner Irrtum in den ersteren kann einen außerordentlich großen Irrtum in den letzteren nach sich ziehen. Die Vorhersage wird unmöglich" [10]. Unabhängig von Poincaré betonte auch Maxwell, daß es in manchen Systemen Punkte gibt, wo "...influences whose physical magnitude is too small to be taken account of by a finite being may produce results of the greatest importance" [11].

Nur gleiche Ursachen haben gleiche Wirkungen

"Un coup de dé n'abolira pas le hasard"
Stéphane Mallarmé

Die Äußerungen von Poincaré und Maxwell erinnern an das Würfeln. Einerseits gibt es kaum etwas Deterministischeres als die Bewegung eines geworfenen Würfels. Der Wurf wird vollständig durch die Gesetze der Mechanik beschrieben. Würde ein Würfel zweimal auf dieselbe Art geworfen, zeigte er beide Male dieselbe Zahl. Doch erfahrungsgemäß kann kein Mensch den Würfel zweimal auf genau dieselbe Art werfen. Er kann es aufgrund der Heisenbergschen Unschärfe selbst im Prinzip nicht, weshalb die gewürfelte Zahl auch nicht das Ergebnis von Geschicklichkeit sondern von Zufall ist.

Die Dynamik des Würfels zeigt also eine sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Denn wie man sich leicht klarmacht, hängt es von kleinsten Unterschieden in den Startbedingungen ab, ob der allmählich ausrollende Würfel gerade noch eine Kante zu überwinden vermag oder zurückfällt.

Da man also die Anfangsbedingungen nur näherungsweise zu reproduzieren vermag, ist das Kausalitätsprinzip als Verknüpfung von gleichen Ursachen mit gleichen Wirkungen in der Praxis zu schwach. Um hinreichend genaue Vorhersagen machen zu können, muß man von der stärkeren Voraussetzung ausgehen, daß ähnliche Ursachen ähnliche Wirkungen hervorbringen. Diese Voraussetzung ist für lineare Systeme automatisch erfüllt. Daher ist die klassische Physik sozusagen intrinsisch gegen den Zufall gefeit. Unsere physikalische Intuition wurde aber weitgehend durch die klassischen Physik geprägt, weshalb chaotische Erscheinungen leicht übersehen oder als unphysikalisch ausgeschlossen wurden: "Was ein Mensch sieht, hängt sowohl davon ab, worauf er blickt, wie davon, worauf zu sehen ihn seine visuell-begriffliche Erfahrung gelehrt hat" [1].

Erst dadurch, daß die lineare Beschränkung fallengelassen wurde, konnte die reichhaltige Dynamik nichtlinearer Systeme in den Blick kommen und damit begonnen werden, sie zu erschließen. Die chaotischen Vorgänge sind zwar die spektakulärsten nichtlinearen Erscheinungen, sie sind aber nicht die einzigen. Darüber hinaus beruhen auch jene ordnungsphysikalisch konträren Phänomene, die mit der Entstehung und Aufrechterhaltung von Strukturen verbunden sind, auf der Nichtlinearität.

Das Ganze ist mehr als die Summe der Teile (Aristoteles)

"Denn die Idee erreicht man natürlich nicht durch Summation
Günther Anders

Nach den vorangegangenen Ausführungen ist klar, daß chaotische Phänomene durch nichtlineare Differentialgleichungen beschrieben werden. Zwar besitzen ihrem deterministischen Kern entsprechend auch nichtlineare Differentialgleichungen eindeutige Lösungen: Mit dem Anfangszustand liegt auch der Zustand zu einem beliebigen späteren Zeitpunkt fest. Allerdings ist er vorerst nur in der Gleichung verschlüsselt enthalten. Es gilt also, "die Knospe zu entfalten" und ihren nicht vorhersagbaren Formenreichtum von "chaotischer Schönheit" explizit zu machen. Denn was wär "das Wesen,...wenn es nicht erschiene" (Goethe).

Das ist leichter gesagt als getan. Bei der Lösung einer nichtlinearen Differentialgleichung machen sich nämlich die oben beschriebenen grundlegenden Unterschiede zu den linearen Systemen bemerkbar: Selbst in den einfachsten Fällen, in denen noch eine analytische Lösung gelingt, ergibt die Summe zweier spezieller Lösungen keine neue Lösung. Das Überlagerungsprinzip funktioniert nicht mehr. Vielteilchensysteme lassen sich nicht mehr in voneinander unabhängige Teilsysteme zerlegen. Die Einsicht, daß das System mehr ist als die Summe seiner Teile "und die Idee des Ganzen den Teilen, nicht umgekehrt, diese jener vorangehen" [5, S.70] ist in der Naturphilosophie Schellings als bewußte "dynamische" Position gegen die "mechanistische" lineare Physik mit Argumenten geführt worden, die zum Teil bis heute nichts an Aktualität und Brisanz verloren haben und manche philosophischen Aspekte der "dynamischen Systemtheorie" geradezu visionär vorwegnehmen. Die erste direkte Konsequenz der Tatsache, daß ein Phänomen nicht in Einzelphänomene zerlegbar ist, ohne dadurch wesentlich verändert zu werden, bekommen die Physiker allerdings erst im Rahmen der Quantenmechanik zu spüren. Inwieweit auch dadurch das Problembewußtsein für nichtlineare Phänomene geschärft wurde, ist allerdings schwer nachzuweisen.

Per Rekursion zum Ziel

"Nur Richtung ist Realität, das Ziel ist immer eine Fiktion, auch das erreichte - und dies oft ganz besonders"
Arthur Schnitzler

Statt also wie im linearen Fall, den Systemzustand zu einem gewünschten Zeitpunkt durch Einsetzen der Anfangsbedingungen in die Lösungsfunktion aus der Menge aller möglichen Lösungen auszusondern, erreicht man sein Ziel bei einer nichtlinearen Differentialgleichung in der Regel nur dadurch, daß man sich vom Anfangszustand ausgehend Schritt für Schritt von einem Zustand zum nächsten vortastet. Ein beliebiger Zustand des nichtlinearen System hängt nämlich vom unmittelbar vorausgehenden ab.

Die Betonung liegt auf unmittelbar und bringt die ganze Problematik zum Ausdruck, die in der praktischen Durchführung dieses schrittweisen Vorgehens enthalten ist: Denn die Differentialgleichung beschreibt die momentane zeitliche Veränderung einer Größe. Wenn diese Änderung aber anders als im linearen Fall nicht in einer erkennbaren und verwertbaren Regelmäßigkeit bzw. Gesetzmäßigkeit erfolgt, bleibt einem nur die Möglichkeit, näherungsweise die Änderung für ein zwar möglichst kurzes aber trotzdem endliches Zeitintervall abzuschätzen (dafür gibt es zahlreiche Rezepte) und in die Differentialgleichung einzusetzen. Auf diese Weise ermittelt man den angenäherten Wert am Ende des Zeitintervalls durch den angenäherten Wert am Anfang des Zeitintervalls. Durch Wiederholung dieser Rechenvorschrift ergibt sich ein Rekursionverfahren, mit dem man den durch die Differentialgleichung beschriebenen dynamischen Prozeß schrittweise nachzuvollziehen versucht.

Der Nachteil eines solchen Rekursionsverfahrens besteht darin, daß man sich durch jeden genäherten Rechenschritt von dem durch die Differentialgleichung exakt festgelegten Orbit entfernen kann. Das wäre in einem linearen Fall nicht weiter tragisch, weil man die Genauigkeit beispielsweise durch Verkleinerung des Zeitschritts erhöhen könnte. Bei Vorliegen einer chaotischen Dynamik, so haben wir uns klargemacht, nützt das alles nichts. Denn kleinste Ursachen zeitigen größte Wirkungen und bedingen, daß je nach Rechenzeit und Größe des Computers das "Tempo" mit dem die Fehler "explodieren" und zu beliebigen Abweichungen der numerischen Bahn von der unzugänglichen exakten Bahn führen, ein wenig verzögert wird. Mit anderen Worten: Chaos kann eine Folge der numerischen Rechnung sein. Dies ist allerdings nur dann problematisch, wenn es in einem Regime des nichtlinearen Systems passiert, in dem an sich kein chaotisches Verhalten zu erwarten ist. Innerhalb des chaotischen Regimes ändert das rechnerbedingte Chaos am Endverhalten quantitativ kaum etwas, es simuliert sogar in gewisser Weise die Störungen, denen ein realer Prozeß stets ausgesetzt ist. Aber das muß im Einzelfall geprüft werden, was naturgemäß sehr aufwendig sein kann.

Da der numerische Zugang zur nichtlinearen Differentialgleichung praktisch erst mit der Entwicklung und Verbreitung leistungsfähiger Computer möglich wurde, konnte man vorher nicht im entferntesten erahnen, welche dynamischen und ästhetischen Reichtümer selbst im Schoße einer einfachen Formel verborgen sein können.(Die visuelle Dimension dieser Reichtümer versucht man zur Zeit in Medien und Ausstellungen in Form von computererzeugten Bildern einzufangen[12].) Die bis in unsere Tage wirkende Überzeugung, mit der linearisierten Version eines nichtlinearen Vorgangs bereits das Wesentliche in der Hand zu haben, hat allerdings auch nur äußerst selten den Wunsch aufkommen lassen, hier weiter zu forschen.

Der Vorteil des rekursiven Vorgehens besteht andererseits darin, daß sich reale Vorgänge, zumindest unserem naiven Empfinden entsprechend nach einem ähnlichen Schema entwickeln: "Ich...versuche, aus der Abfolge der mir täglich sich bietenden Dinge herauszulesen, was die Welt mit mir vorhat, und ich komme nur tastend voran, wohl wissend, daß keinerlei Vokabular je in Worte zu fassen vermag (die Physiker scheinen da optimistischer zu sein, H.J.S.), was da in den Dingen alles an dunklen Anspielungen dräut" [13, S.99].

In der Tat, erleben wir tagtäglich, daß in jedem nichtverschwindenden Zeitintervall viel und Unerwartetes geschehen kann, das aufgrund der ungenügenden Kenntnis des Wirkungsflusses, dem wir ausgesetzt sind, nicht voraussehbar ist. Es deutet einiges darauf hin, daß diese Eigenschaft realen Geschehens im Rahmen der Chaosforschung eine Modellierung erfahren könnte. Dadurch würde man zwar nicht zu konkreten Vorhersagen, wohl aber zu einem allgemeinen Handlungskonzept gelangen. Beispielsweise wäre es in Fragen der Gentechnologie, des Einsatzes von Pestiziden und der Entwicklung neuer Waffensysteme schon ein enormer Gewinn, wenn man zeigen könnte, daß aufgrund einer chaotischen Dynamik die Entwicklung nicht beherrschbar ist.

Zurück zur Geometrie

God is like a skillful Geometrician
Thomas Browne

Das Beispiel des Würfels hat gezeigt, daß ähnliche Erfahrungen am Anfang der Chaosforschung stehen wie seinerzeit am Anfang der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Konsequenzen sind aber grundverschieden. "Der Stock wird am anderen Ende aufgenommen" (T.S. Kuhn). Die Interessen haben sich verschoben, andere Merkmale des Zufallsgeschehens rücken ins Zentrum des Interesses.

Die Aufmerksamkeit ist nicht mehr auf das Ziel ei-

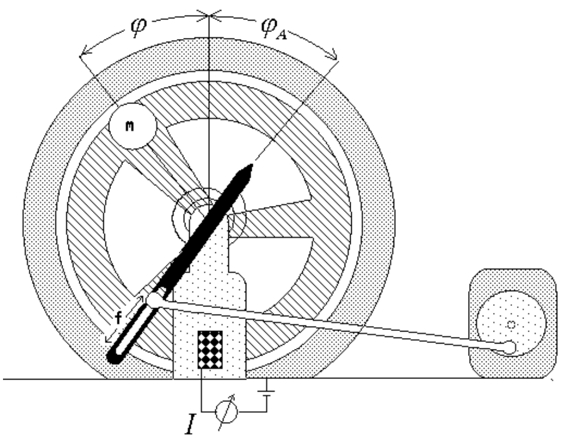

Abb. 1: Pohlsches Rad mit Unwucht

nes konkreten Ergebnisses, z.B. die Augenzahl des Würfels, ausgerichtet, sondern auf den Weg dahin, den Bewegungsvorgang selbst. Daß jeder Bewegungsvorgang einmal zu Ende geht, steht nicht zur Debatte, sondern die Frage, wie die Bewegung (bzw. die Spur, die sie im Zustandsraum hinterläßt,) erfaßt und beschrieben werden kann, leitet das Forschungsinteresse. Im Vordergrund stehen daher dynamische Systeme, die aufgrund von Reibungsfreiheit oder durch das Vorhandensein eines Antriebs, überhaupt nicht zum Stillstand kommen.

Obwohl in der Chaosphysik irreguläre Vorgänge unter einem ganz anderen Blickwinkel betrachtet werden als in der Wahrscheinlichkeitstheorie, hat man sich erneut der Frage zu stellen: Was kann wissenschaftlich über ein System ausgesagt werden , das sich faktisch unvorhersehbar verhält und damit den wissenschaftlichen Intentionen entgegenläuft? Die entscheidende Idee der Wahrscheinlichkeitstheorie war es, nicht einzelne Ergebnisse eines zufallsbedingten Vorgangs wie die durch einen Wurf erwürfelte Augenzahl zu betrachten, sondern eine Vielzahl, die Gesamtheit aller möglichen Ergebnisse.

Es ist interessant festzustellen, daß auch der Chaosfoschung eine entsprechende Idee zugrundeliegt, obwohl die mathematische Basis und die Realisierung dieser Idee kaum Ähnlichkeiten mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufweisen: Anstatt einzelne Orbits des chaotischen Systems zu verfolgen, wird versucht, die Gesamtheit des möglichen Systemverhaltens auf einmal zu erfassen.

Der Versuch, auf diese Weise zu einem mehr globalen Verständnis des Systemverhalten zu gelangen, muß als deutlicher Bruch mit der bisherigen Tradition, Systeme lokal zu betrachten, angesehen werden. Gleichwohl können die in diesem Bemühen zum Ausdruck kommenden Verfahren und Methoden auf eine bis auf Poincaré zurückgehende Tradition zurückblicken, die etwas abseits der Hauptströmungen wissenschaftlicher Aktivitäten gewissermaßen ihre Stunde vorbereiteten.

Im Rahmen einer solchen globalen Betrachtung erweisen sich Chaos und Instabilität (strukturelle Instabilität) als etwas Grundverschiedenes: Ein sich lokal unvorhersehbar verhaltendes System kann global durchaus stabil sein: Global stabile, ungefähr dieselben Verhaltensmuster zeigende Systeme müßten sich aber - so die Erwartung - geometrisch betrachtet in ihren Konturen ähneln.

In Verfolgung dieser Idee wurde ein für die weitere Chaosforschung typischer Übergang zur Geometrie vollzogen und damit eine Art qualitative Systemanalyse an die Stelle des üblichen quantitativen Vorgehens gerückt. Schöne Bilder sind seitdem gewissermaßen zum Markenzeichen der Chaosforschung geworden.

Geometrische Methoden haben nicht nur den Vorteil einer unmittelbaren Anschaulichkeit. Sie erlauben außerdem, das kreative Vermögen des Menschen zur Mustererkennung explizit für die Forschung fruchtbar zu machen. Wie noch zu zeigen sein wird, kommen dadurch Strukturen in den Blick, die man dem System "von außen" nicht ansehen kann. Sie erlauben somit Rückschlüsse auf verborgene Verhaltensweisen des Systems, die mit herkömmlichen Methoden nicht zu entdecken gewesen wären. Die Bilder können daher als eine Art Röntgenaufnahme des untersuchten Systems angesehen werden. Der Computer, mit dem diese Bilder erzeugt werden, spielt daher eine ähnlich revolutionäre Rolle bei der Untersuchung komplexer, insbesondere chaotischer dynamischer Systeme wie die Röntgenröhre zu Beginn unseres Jahrhunderts vor allem in der Medizin.

Dissipative Strukturen

Da heißt existieren, dem Tode die Stirn bieten, eine beständige Abweichung vom Gleichgewicht sein
Michel Serres.

Bei der Untersuchung chaotischen Verhaltens wollen wir uns auf eine spezielle Klasse von Systemen beschränken, denen bei der Modellierung realer Vorgänge eine große Bedeutung zukommt, die sog. dissipativen Strukturen. Dissipative Strukturen sind offene, von Materie und/oder Energie durchflossene Vielteilchensysteme, die sich aufgrund der Dissipation von (hochwertiger) Energie in einem stationären Zustand fernab vom thermischen Gleichgewicht zu halten vermögen. Sie können überdies trotz ihres komplizierten Aufbaus ein einfaches Verhalten zeigen: Aus der Vielfalt möglicher Verhaltensweisen des Systems vermag sich durch nichtlineare Mechanismen (z.B. phasenübergangs-ähnliche Vorgänge) eine Struktur herauszuschälen, die durch wenige Parameter beschrieben werden kann.

Diese Vereinfachung des Systemverhaltens findet ihre topologische Entsprechung im zugehörigen Zustandsraum: Im Unterschied zu den vertrauten konservativen Systemen der Hamiltonschen Dynamik ist es für dissipative Systeme typisch, daß das Volumen des von den Systemzuständen eingenommenen Gebietes im Zustandsraum im Laufe der Zeit schrumpft. Dadurch kann der hochdimensionale Zustandsraum des Systems schließlich in einen niedrigdimensionalen Unterraum übergehen und einen entsprechend leichteren physikalischen Zugang ermöglichen.

Beispielsweise läßt sich das bekannte Phänomen der BÉNARDkonvektion, bei dem eine Flüssigkeitsschicht von unten erwärmt und schließlich in Bewegung versetzt wird, in einem nur dreidimensionalen Zustandsraum behandeln, ohne daß charakteristische Merkmale dieses Systems verlorengingen. Eine Beschränkung der Untersuchungen auf ein solches einfaches Untersystem ist nicht nur denkbar, sondern gängige Praxis in der Chaosforschung.

Darin manifestiert sich die vertraute Tatsache, daß trotz der enormen Komplexität der realen Außenwelt einfache Strukturen erkennbar sind, die eine einfache mathematische Beschreibung erlauben. Andererseits - und das ist ein wesentlicher Aspekt chaotischen Verhaltens - führen diese einfachen Systeme i.a. nicht zur klassischen Uhrwerkwelt, sondern können jene Komplexität hervorbringen, die sich als typisch für kreative Strukturen der Realität erweisen.

Chaotisches Drehpendel als Beispiel

Nach dieser allgemeinen Beschreibung einiger wesentlicher Ideen der Chaosphysik, sollen sie an einem experimentell wie theoretisch einfach zugänglichen System konkretisiert und vertieft werden. Im Sinne der vorangegangenen Ausführungen untersuchen wir ein einfaches mechanisches System, das man im Prinzip als Untersystem einer komplexen dissipativen Struktur auffassen kann. Bei unserem System handelt es sich um ein nichtlineares Drehpendel, das über einen periodischen Antrieb mit fester Frequenz in Schwingung gehalten wird. Wir haben es gleichsam in Umkehrung des klassischen Vorgehens aus dem (linearen) Pohlschen Rad gewonnen, indem wir dieses durch Anbringen einer kleinen Zusatzmasse zu einem nichtlinearen System gemacht haben[15].

Die numerische Simulation des Drehpendels zeigt eine überraschend reichhaltige Dynamik. Sie bildet die Grundlage für die folgenden Untersuchungen. Insbesondere soll demonstriert werden, auf welche Weise Strukturen entdeckt und beschrieben werden können, in denen die typischen Irregularitäten chaotischen Verhaltens zum Ausdruck kommen.

Am Drehpendel (Abb. 1) lassen sich experimentell die folgenden Parameter variieren: die Zusatzmasse m, die Anregungsfrequenz Ω/Ω_0 (in Einheiten der Eigenfrequenz des ungestörten Rades), die Anregungsamplitude *f*, die auf Werte zwischen 1 und 2 normiert wird, die Dämpfungsstromstärke *I*, der Anfangswinkel φ_0, die Anfangswinkelgeschwindigkeit φ_0 und die Mittellage der Anregung α.

In den folgenden Untersuchungen haben wir uns jedoch allein auf die Dämpfungsstromstärke als Kontrollparameter beschränkt. Alle anderen Parameter wurden konstant gehalten.

Die Bewegungsgleichung des Pendels ergibt sich aus den Drehmomenten, die von der Zusatzmasse und der Feder auf das Rad ausgeübt werden, wobei letzteres noch durch die Anregung harmonisch moduliert wird:

$$\Theta\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} = -D(\varphi - \varphi_A) + mgr \cdot \sin\varphi$$

Mit der Winkelauslenkung φ, dem Trägheitsmoment Θ, der Reibungskonstante β, der Federkonstante D, der Zusatzmasse m, der Erdbeschleunigung g, dem Radius r, und dem periodischen Antrieb $\varphi_A = \alpha + \alpha_1 \cos \Omega t$. Mit den Abkürzungen $\rho = \beta/\theta$, $\Omega^2_0 = D/\theta$,$r_0 = mgr/\theta$, $F = D\,\alpha_1/\theta$ ergibt

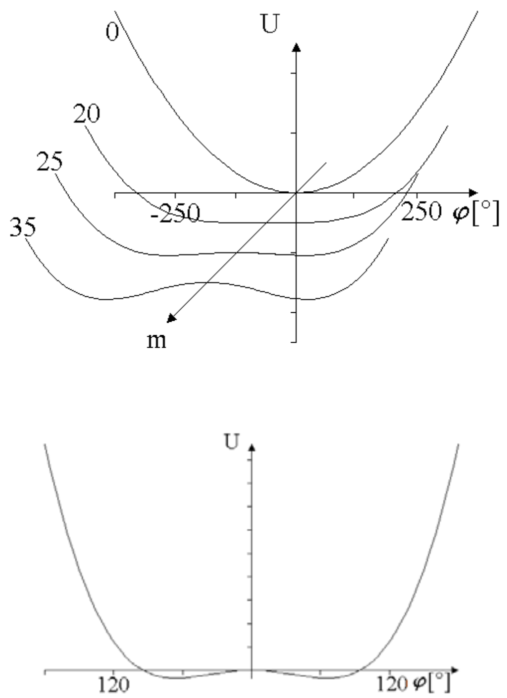

Abb. 2 Das Potential des Pohlschen Rades mit Unwucht a) für verschiedene Zusatzmassen m, b) für m = 25 g und $\alpha = 0^o$.

sich:

$$\ddot{\varphi} = -\rho\dot{\varphi} - \Omega_0^2(\varphi - \alpha) + r_0 \sin\varphi + F\cos\Omega t$$

Diese Gleichung integrieren wir numerisch mit einem Runge- Kutta- Verfahren 4. Ordnung.

Wie aus dem linearen ein nichtlineares Problem wird, läßt sich anhand des Potentials

$U(\varphi) = 1/2\ \Omega_o^2\ \varphi^2 - \Omega_o^2\ \alpha\ \varphi + r_o\ (\cos\ \varphi - 1)$

in Abhängigkeit unterschiedlicher Zusatzmassen m verfolgen. Es zeigt sich, daß das Potential mit zunehmender Masse seine "harmonische" Form verliert. Bei einer kritischen Masse von etwa 23 g wird die Symmetrie des Systems gebrochen, indem das Potential zwei Minima annimmt, die durch ein relatives Maximum voneinander getrennt sind (Abb.2a). Die qualitative Veränderung des Systems erfolgt nach Art eines kontinuierlichen Phasenübergangs.

Die "Attraktion" des Drehpendels

Das Werdende hat immer den Anschein des Gesetzlosen
G. F. Jünger

Das zeigt sich, wenn wir unser Drehpendel starten . Zunächst führt es eine stark von den Anfangsbedingungen abhängige regellose Bewegung aus. Erst nach einer gewissen Zeit findet das System als Folge der oben beschriebenen Schrumpfung des Phasenraumvolumens gewissermaßen "zu sich selbst" und regelt eine für den jeweiligen Parameterbereich typische Bewegungsfigur ein (Abb. 3 a).

Im Sinne eines topologischen Zugangs betrachtet man das Systemverhalten nicht im Orts- Zeitdiagramm, sondern im Zustands- bzw. Phasenraum. Dieser wird im Falle unseres Drehpendels durch den Winkel φ, die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$. und die Phase der Anregung (bzw. die Zeit t) aufgespannt. Die Bewegungen des dynamischen Systems werden im Phasenraum in Orbits übersetzt, die sich (im Falle des Drehpendels) auf eine Spirale um die Zeitachse zusammenziehen. Da die Orbits ebenso wie die Bewegungsfiguren im Orts-Zeitdiagramm schließlich aus dem Blickfeld hinauslaufen, geht man in der Praxis zu kompakteren Darstellungen über.

Zum einen ist es üblich, die Zeitdimension herauszuprojizieren. Im einfachsten Fall läuft dann der Orbit nach Einschwingen des Systems im Rhythmus der Anregungsperiode in sich selbst zurück

(Abb. 3b). Man spricht dann von einem Grenzzyklus. Allgemein werden solche Bewegungsfiguren, die das Systemverhalten gewissermaßen anziehen, Attraktoren genannt.

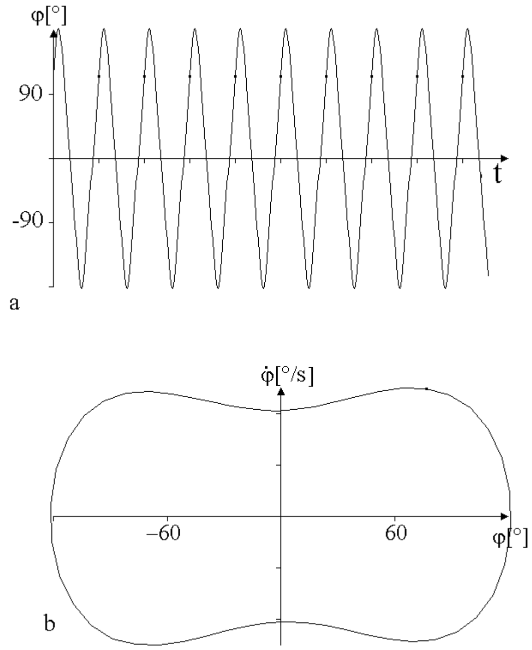

Abb. 3 Orts- Zeit- Diagramm (a) und Phasendiagramm (b) einer regulären Pendelbewegung.

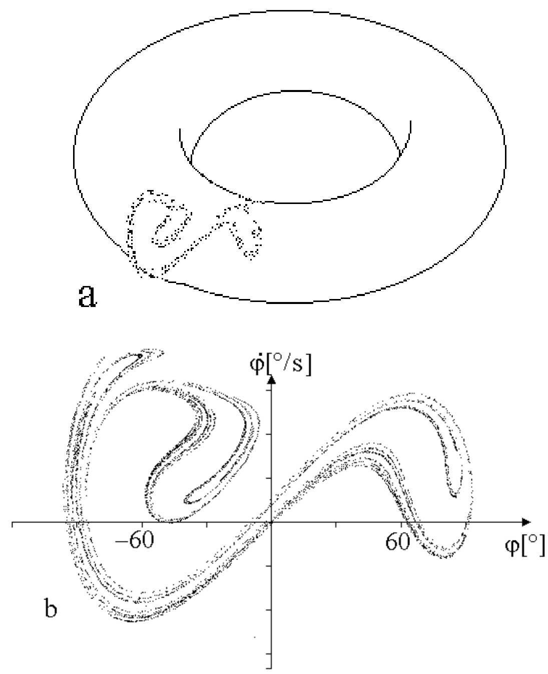

Abb. 4: Gugelhupfartig zusammengebogener Zustandsraum (a), in dem der Quer- (Poincaré) schnitt (b) einer chaotischen Bewegung eingezeichnet wurde.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Periodizität des Antriebs auszunutzen und die Zeitachse so in sich selbst zurückzubiegen, daß alle Werte der Anregungsphase φ_A mod 2π miteinander zusammenfallen: Die Orbits winden sich dann um einen gugelhupfartigen Torus (Abb. 4).

Im Falle eines sehr komplexen Systemverhaltens enthält selbst dieser Gugelhupf noch zu viel Information. Daher geht man häufig zu einer weiteren Reduktion des Datensatzes über, indem man den Bewegungsablauf im Rhythmus der Anregungspha-

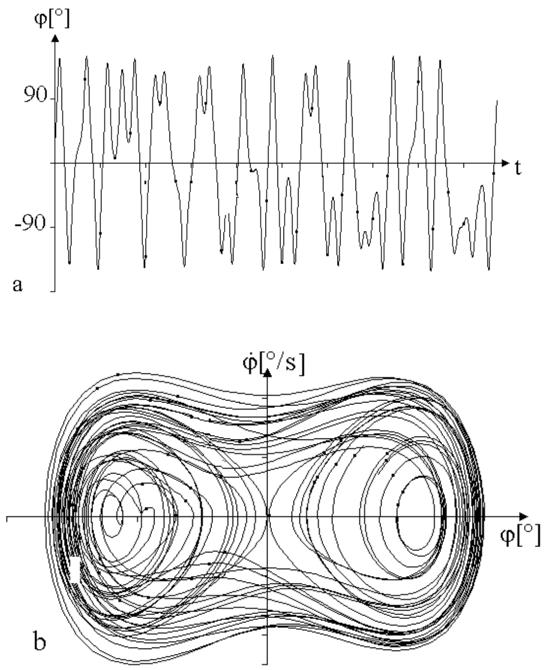

Abb. 5 Orts-Zeit-diagramm (a) und Phasendiagramm (b) einer chaotischen Pendelbewegung.

se "stroboskopiert". Das läuft anschaulich gesprochen darauf hinaus, aus dem "Gugelhupf" eine dünne Scheibe herauszuschneiden und in der "Marmorierung" die Gesamtheit des Systemverhaltens zu äquivalenten Werten der Anregungsphase vor Augen zu haben (Abb. 4). Bei einem einfachen Grenzzyklus besteht die Marmorierung allerdings nur aus einem einzigen Punkt.

Auch das Chaos kann "attraktiv" sein

Vermag sich ein dissipatives System nicht nur regulär, sondern auch in chaotischer Weise zu verhalten, so ist es aufschlußreich, in einem solchen Fall das Endverhalten des Systems zu untersuchen.

Erwartungsgemäß läßt sich in der erratischen Bewegung im Orts-Zeitdiagramm (Abb.5a) nicht einmal ansatzweise eine Struktur erkennen, die eine Vorhersage des weiteren Verlaufs erlaubte. Wir haben es hier gewissermaßen mit der Handschrift" des Chaos zu tun, in der es

sich in der kürzesten Form selbst aufzeichnet. Betrachten wir den Vorgang im Zustandsraum (Abb. 5b), so erscheint das Problem nunmehr als "ein schwarzes Ding, ein dunkler Vorgang, eine wirre Wolke von Signalen...Und wir machen uns daran, es zu erhellen, zu definieren, auf Einfaches zurückzuführen" [3, S. 34]. Dabei werden wir - insbesondere dann, wenn wir den Vorgang auf dem Monitor des Computers in vivo erleben - vielleicht an die Worte Goethes erinnert:

"Fäden kommen, Fäden weifen,/ Jeden lenk' ich seine Bahn,/ Keinen laß' ich überschweifen, /Füg' er sich im Kreis heran" [Goethe, Faust II].

In der Tat schweifen die "Fäden" nicht über, sie werden auf ein charakteristisches kompaktes Gebilde beschränkt, dessen Rand an den Grenzzyklus der regulären Bewegung erinnert: Dieses "schwarze Ding" wird chaotischer Attraktor genannt, weil es schließlich alle Orbits anzieht, die in seinem Einzugsbereich (siehe unten) starten. So wirr und unvorhersagbar sich die Orbits auch im einzelnen verhalten mögen, so sicher kann man sich sein, daß sie schließlich auf dem Attraktor landen: Die Bewegungen des Drehpendels erweisen sich trotz lokaler Unvorhersagbarkeit global gesehen als vorhersagbar.

Auf diese Weise vermag man das analytisch Unsagbare wenigstens zu visualisieren und einsichtig zu machen, daß das Chaos nicht ganz so chaotisch im Sinne von unvorhersagbar ist, wie üblicherweise unterstellt wird. Ist dies nicht auch eine Bestätigung für die Behauptung Kants, "daß die Natur auch selbst im Chaos nicht anders als regelmäßig und ordentlich verfahren kann" ? [16]. Doch was hat man, so ist weiter zu fragen, außer dieser Bestätigung gewonnen?

Der erste Teil der Antwort ist metaphorisch, dem zweiten ist der Rest meiner Ausführungen gewidmet. Kommen wir also zunächst auf die schon früher benutzte Metapher des Würfelwerfens zu sprechen. Ähnlich wie ein chaotisches System verhält sich auch der Würfel global gesehen völlig stabil: Stets bleibt er schließlich auf einer der Zahlen 1 bis 6 liegen. Daran vermögen auch äußere Störungen nichts zu ändern. Darüber hinaus stellt man fest, daß alle Zahlen mit derselben Wahrscheinlichkeit von einem Sechstel auftreten. Diese Befunde haben schließlich zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie geführt, die heute als einer der Hauptpfeiler der Naturwissenschaften angesehen werden muß. Die Parallelen sind in der Tat frappierend, auch wenn derzeit überhaupt nicht abzusehen ist, welche Bedeutung die Chaosforschung dereinst erlangen wird. Andererseits geht die Würfelmetapher über die Empfehlung, das Endverhalten des chaotischen Systems, also den chaotischen Attraktor, nach Regelmäßigkeiten zu untersuchen, nicht hinaus. Denn während der Würfel zu einem definitiven Ende kommt, zeigt die zunehmende "Schwärzung" des chaotischen Attraktors, daß es hier endlos weitergeht.

Wenn Orbits "gemischt" werden

Das "schwarze Ding" ist natürlich nur eine Projektion des dreidimensionalen chaotischen Attraktors auf eine Fläche. Sämtliche Entwicklungsphasen des Orbits wurden übereinandergelegt. Daher entsteht der Eindruck von Orbitüberschneidungen, die natürlich in Wirklichkeit (wegen der Eindeutigkeit der Lösung der Differentialgleichung) nicht vorkommen.

Übrigens kann man bereits an dieser simplen Tatsache erkennen, daß chaotische dynamische Systeme (abgesehen von diskreten Abbildungen)mindestens dreidimensional zu sein haben. Im zweidimensionalen Phasenraum kann es wegen der Nichtüberschneidbarkeit von Orbits nur zu einem Punktattraktor (System kommt zur Ruhe) oder einem Grenzzyklus (System führt eine reguläre Schwingung aus) kommen.

Das zeitliche Nacheinander der Orbits läßt sich am besten an der Marmorierung der Gugelhupfscheiben studieren (Abb. 4b), welche die Gesamtheit der Durchstoßungspunkte der Orbits zu äquivalenten Werten der Anregungsphase darstellt.

Die Veränderungen in der Marmorierung von einer Scheibe zur benachbarten visualisieren dann die zeitliche Entwicklung des Systems, wie sie sich in der "Gruppierung" der Orbitdurchstoßungspunkte manifestiert. Legt man die Scheiben in zeitlicher Anordnung nebeneinander oder besser noch, läßt sie nach Art eines Daumenkinos bzw. auf dem Bildschirm als Film ablaufen, so zeigt sich ein rhythmisches Pulsieren des Attraktors: Als sichtbarer Ausdruck des permanenten Wechselspiels von Antrieb und Dissipation blähen sich Teile des Attraktors unter gleichzeitigem Strecken auf, um sich anschließend wieder zusammenzufalten. Dabei werden im Halbtakt des Streckens benachbarte Orbits exponentiell auseinandergezogen um anschließend im Halbtakt des Faltens mit völlig anderen Orbits zusammengebracht zu werden (Abb.6). Dieser Vorgang erinnert sehr stark an das Mischen zweier zuvor getrennter farbiger Flüssigkeiten durch Umrühren. Was sich beim Farbmischen im Anschauungsraum abspielt, ähnelt in der Tat bis hin zur mathematischen Beschreibung dem "Mischen" von Orbits eines chaotischen Systems im Phasenraum [17]. Das Zustandekommen chaotischer Erscheinungen kann so gesehen als (irreversibles) Mischen von Orbits erklärt werden. Die Periodizität des Mischvorgangs reflektiert natürlich die Periodizität des regulären Antriebs unseres Systems, dem somit die Rolle des Rührers zufällt.

Das wohl einfachste Modell eines solchen Streck- und Faltmechanismus ist die SMALEsche Hufeisenabbildung, bei der ein Quadrat gestreckt und, hufeisenförmig umgebogen, dem Originalquadrat wieder einbeschrieben wird, um dann erneut gestreckt und gebogen zu werden usw. Wir erwähnen das hier, weil der Hufeisenabbildung eine paradigmatische Bedeutung für die quantitative Erfassung chaotischer Phänomene zukommt[18].

Attraktoren, die sich selbst ähneln

Durch das Mischen werden Orbits der unterschiedlichsten Startpunkte im Rhythmus des Antriebs aneinander gefaltet. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung der zugrundeliegenden Differentialgleichung kommt es dabei zu keiner Verschmelzung sondern zur Ausbildung einer infinitesimal feinen Blätterteigstruktur: Unendlich viele Schichten werden in einem endlichen Volumen zusammengepreßt. Damit stellt sich uns der chaotische Attraktor als ein hybrides Objekt zwischen Fläche und Linie dar. Ein solches Gebilde wird nach Mandelbrot Fraktal [19] genannt und unterscheidet sich von allen bekannten geometrischen Gebilden vor allem durch zwei Eigenschaften: Erstens durch seine Selbstähnlichkeit oder Skaleninvarianz. So zeigt jede Ausschnittsvergrößerung des chaotischen Attraktors dieselbe Struktur und macht es unmöglich, einen natürlichen Maßstab für das zugrundeliegende chaotische Phänomen zu bestimmen.

Zweitens durch seine gebrochene oder fraktale Dimension. Da der chaotische Attraktor mehr als eine Linie (da unendlich lang) aber weniger als eine Fläche (da vom Maße Null) darstellt, wird ihm eine Dimension zwischen 0 und 1 zugeordnet [20].

Die fraktale Dimension eines Attraktors ist übrigens eine wichtige Größe zur quantitativen Charakterisierung des Chaos in einem dynamischen System, wodurch einmal mehr die Bedeutung neuartiger geometrischer Methoden im Bereich der Chaosforschung zum Ausdruck gebracht wird.

Als Beispiel für eine praktische Anwendung sei hier die Analyse einer irregulären experimentellen Zeitserie erwähnt. Trägt man die einzelnen Daten graphisch nacheinander gegen sich selbst auf und stellt das entstehende Gebilde einen niedrigdimensionalen chaotischen Attraktor dar, so läßt sich die Zeitserie als chaotisch ansehen und als solche analysieren. Durch Abschätzen der fraktalen Dimension des so rekonstruierten Attraktors und der Divergenz der benachbarten Orbits läßt sich u.a. feststellen wie chaotisch das Signal ist [21].

Obwohl Fraktale für die Beschreibung der Natur angemessener zu sein scheinen als es die Gebilde der Euklidischen Geometrie sind [19], können wir uns ihnen anschaulich lediglich durch metaphorische Umschreibungen annähern. Mich erinnert beispielsweise das "Sandbuch" Borges, das wie der Sand weder Anfang noch Ende hat, an ein Fraktal: "Er forderte mich auf, das erste Blatt zu suchen. Ich drückte die linke Hand auf das Titelblatt und schlug das Buch auf, den Daumen fest an den Zeigefinger gepreßt. Alles war zwecklos: Immer schoben sich einige Blätter zwischen Titelblatt und Hand. Es war, als brächte das Buch sie hervor " [22].

Die Entscheidung fällt bereits beim Start

Ob das chaotische Drehpendel sich regulär oder chaotisch verhält, hängt vor allem von den Systemparametern, in unserem Fall von der Dämpfungsstromstärke ab. Neben Bereichen, in denen nur reguläres oder nur chaotisches Verhalten auftritt, f. gibt es Bereiche, in denen beides auftreten kann: Reguläre Attraktoren können mit einem chaotischen Attraktor koexistieren. In diesem Fall hängt es entscheidend von den Startpunkten, den Anfangsbedingungen ab, ob das System von einem regulären oder von dem chaotischen Attraktor eingefangen wird. Die dem jeweiligen Attraktor f zugeordneten Startpunkte nennt man Einzugsbereich des Attraktors.

Aufschluß über die einzelnen Einzugsbereiche zu gegebenen Parameterwerten verschafft man sich beispielsweise dadurch, daß man die Startpunkte systematisch durchvariiert und jeweils "abwartet" auf welchem Attraktor sie landen.

In Abb. 7 haben wir den Einzugsbereich eines regulären (dunkel) und eines chaotischen Attraktors dargestellt. Der reguläre Attraktor wurde durch ein kleines Quadrat, der chaotische Attraktor durch einen charakteristischen POINCAREschnitt (in der Augenpartie unserer "Julia") dargestellt. Die unterschiedliche Schwärzung gibt zusätzlich Auskunft über die "Entfernung" (Zahl der Iterationsschritte bis zum Erreichen des Attraktors) zum regulären Attraktor und vermittelt wenigstens einen groben Eindruck von der komplizierten und bewegten Struktur des "Potentialgebirges". Um einerseits die Schönheit des Chaos zu unterstreichen und andererseits daran zu erinnern, daß die dargestellte Punktmenge eine Art gefüllte JULIAmenge ist[23], wie wir sie aus zahlreichen populären Darstellungen kennen, wurde die Figur durch Einzeichnen von Mund, Nase und Augen zu einer "Julia" ergänzt.

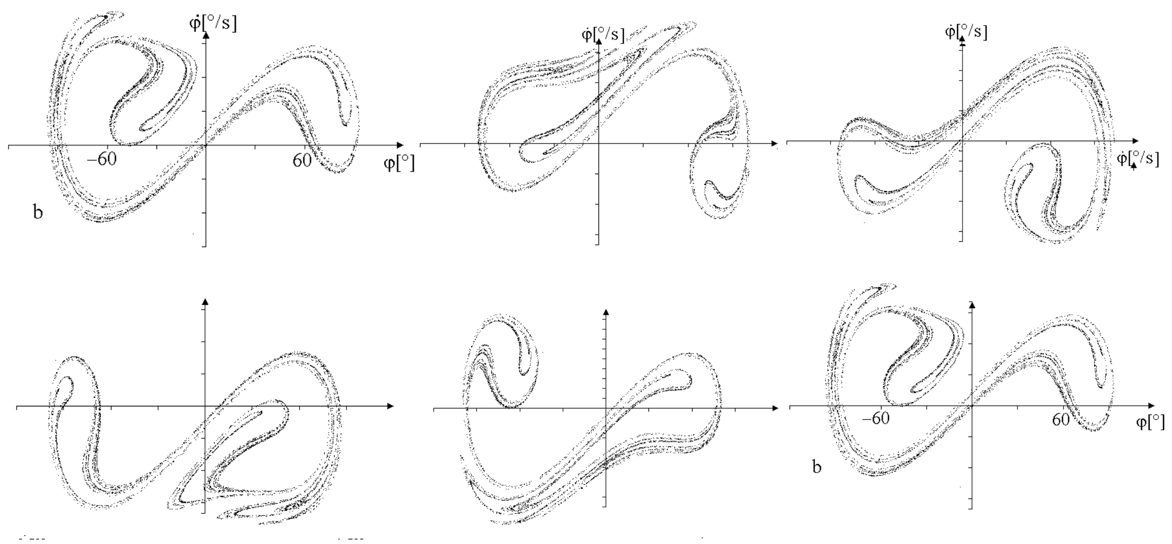

Abb. 6: Die zu verschiedenen Zeitpunkten (jeweils um den Faktor 0.2 zunehmende Anregungsphase) „stroboskopierten“ Orbits offenbaren einen charakteristischen Mischmechanismus, der als Entstehungsursache für das Chaos angesehen wird.

Wenn sich die Wege trennen

Um uns einen Eindruck von der sensitiven Abhängigkeit des Verhaltens von den Anfangsbedingungen am Beispiel des chaotischen Drehpendels zu verschaffen, vergleichen wir die zeitliche Entwicklung von 1000 regulären und chaotischen Orbits, die im chaotischen Fall in einem engen Winkelintervall von 1+ starten, sich also kaum unterscheiden, und im regulären Fall von einem immerhin 10+ breiten Winkelintervall ausgehen. Wir verfolgen die Entwicklung zu jeweils äquivalenten Werten der Anregungsphase und stellen bereits nach wenigen Anregungsperioden ein völlig unterschiedliches Verhalten fest (Abb.8).

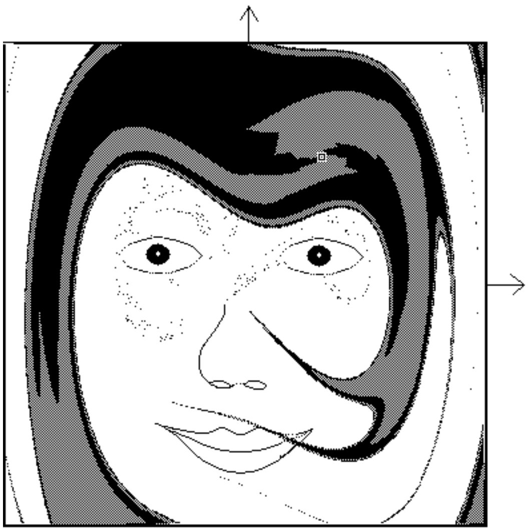

Abb. 8 Koexistierende Einzugsbereiche eines regulären (dunkel) und eines chaotischen Attraktors (weiß)

Während sich die regulären Orbits von "Generation" zu "Generation" immer mehr annähern und sich (im POINCARÉschnitt) immer mehr auf einen Punkt zusammenziehen, streben die eng beieinander liegenden chaotischen Orbits exponentiell auseinander. Sie bleiben nur kurze Zeit benachbart, um dann ziemlich plötzlich aufgrund des oben diskutierten Mischmechanismus, wild "durcheinandergewürfelt" und schließlich auf den gesamten Attraktorbereich verteilt zu werden.

Im regulären Fall werden die Unterschiede in den Anfangsbedingungen ausgemerzt und damit "vergessen"; die Orbits werden ununterscheidbar. Auch im chaotischen Fall werden die Anfangsbedingungen insofern vergessen, als die Orbits schließlich stets denselben Attraktor "erfüllen". Anders als im regulären Fall geht dabei jedoch bereits nach kurzer Zeit jede noch so enge Nachbarschaftsbeziehung völlig verloren: Das System produziert extreme Unterschiede in beliebig ähnlichen Situationen.

Das Chaos wirft seine Schatten voraus

Wir haben bislang reguläres und chaotisches Verhalten einander pauschal gegenübergestellt. Dem entspricht die Betrachtung des Systems zu je zwei verschiedenen aber festen Werten des Dämpfungsparameters. Wir wollen uns zum Abschluß wenigstens einen Überblick über die komplexe Vielfalt der Entwicklungmöglichkeiten des Systems verschaffen, indem wir die Dämpfungsstromstärke I syste-

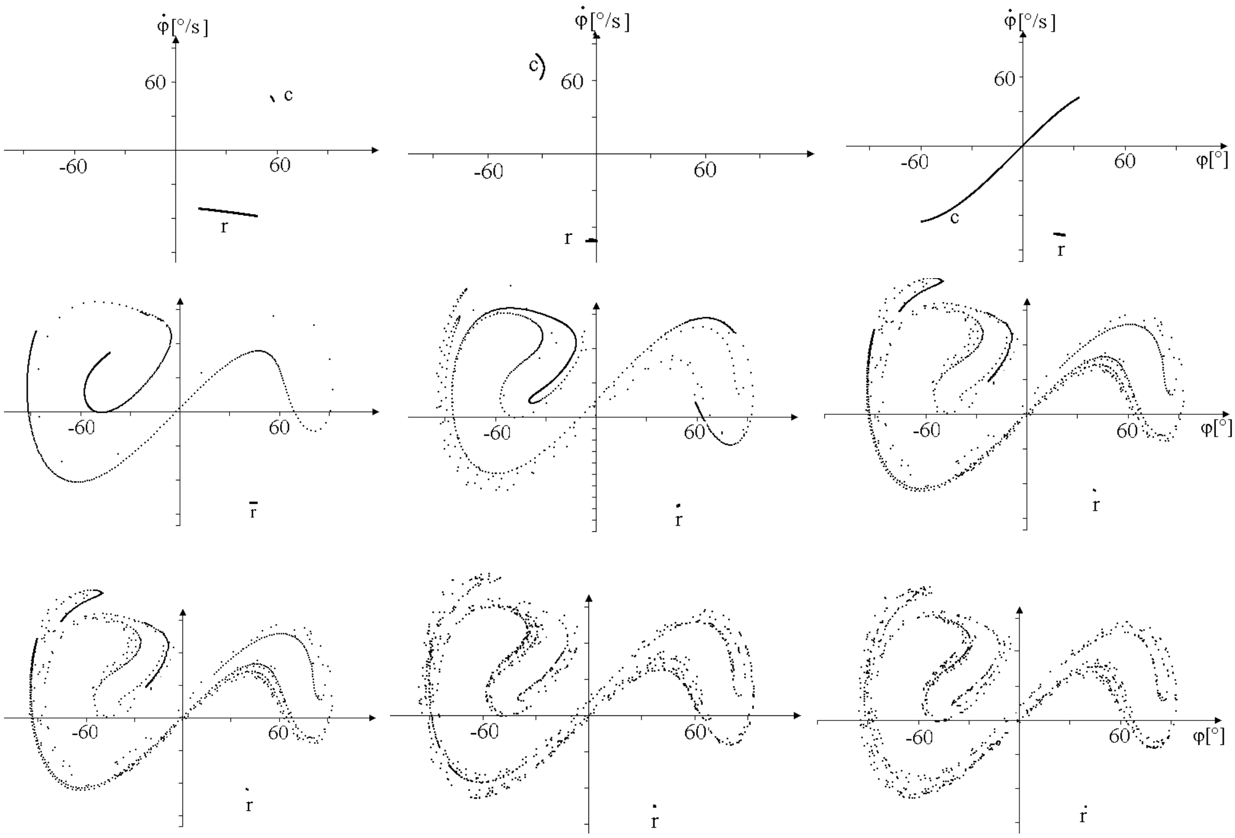

Abb. 7 POINCARÉdarstellungen der Entwicklung der Orbits für 1000 benachbarte Werte für den regulären (r) und chaotischen Fall (c) in den ersten neun Anregungsperioden.

matisch variieren. Eine sehr informationsreiche Darstellung erhält man, wenn für jeden Wert der Dämpfung jeweils nach Abklingen des Einschwingungsvorgangs die Pendelbewegung synchron mit der Anregung stroboskopiert wird und die entsprechenden Winkelwerte für viele Anregungsperioden aufgetragen werden.

Das sich ergebende Diagramm (Abb.9) zeigt zwischen regulären Bereichen bei kleiner und großer Dämpfung ein ausgedehntes Gebiet chaotischer Schwingungen, das nur gelegentlich von sogenannten Fenstern geordneten Verhaltens unterbrochen wird.

Dieses Diagramm vermag außerdem Auskunft darüber zu geben, auf welche Weise das System vom regulären zum chaotischen Verhalten oder umgekehrt überwechselt, wenn der Parameter der Dämpfung verändert wird. Beispielsweise findet der Übergang vom chaotischen zum regulären Verhalten bei sehr kleiner Dämpfung relativ abrupt statt. Die Streifenstruktur im Grenzbereich verweist jedoch darauf, daß sich der Übergang bereits lange vorher ankündigt.

Auffallend ist ferner, daß sich die "regulären Linien" schemenhaft in den chaotischen Bereich fortsetzen. Das kann nur bedeuten, daß selbst im chaotischen Bereich gelegentliche Reminiszenzen der vergangenen Ordnung erhalten bleiben. Man spricht von einem "intermittierenden" Übergang ins Chaos.

Am bekanntesten und am weitestgehenden untersucht ist der Periodenverdopplungsübergang ins Chaos, das am Drehpendel im Bereich hoher Dämpfung bei Verringerung der Stromstärke beobachtet werden kann: Die Schwingung mit konstanter Amplitude geht zunächst in eine Schwingung mit zwei verschiedenen Amplituden über, dann spalten diese ihrerseits in zwei verschiedene Amplituden auf, die kurz danach erneut aufspalten usw. (Abb.10b) in immer kürzeren Abständen bis sich schließlich unendlich viele verschiedene Amplituden einstellen und ein sog. chaotisches Band bilden. Die chaotischen Bänder werden immer wieder von Fenstern geordneten Verhaltens unterbrochen. Die in den Fenstern vorhandenen regulären Linien entwickeln sich aber ihrerseits über ein Bifurkationsdiagramm ins Chaos, das wieder reguläre Fenster aufweist usw. Durch "Ausschnittsvergrößerungen" kann man demonstrieren, wie sich dieselbe Struktur kaskadenartig wiederholt (Abb.10). Das erinnert an ineinandergeschachtelte russische Puppen oder an Reklamebilder etwa von Keksdosen, auf denen Kinder Kekse aus einer Keksdose essen, die ihrerseits eine Abbildung mit Kekseessenden Kindern trägt usw. Hier manifestiert sich erneut die bereits bei den chaotischen Attraktoren erkannte Selbstähnlichkeit.

Das Periodenverdopplungsszenario zeichnet sich durch Universalität aus. Er ist typisch für den geordneten Übergang bei einer ganzen Klasse unterschiedlichster Systeme. Dabei stimmen die Bifurkationsstrukturen nicht nur qualitativ überein. Beispielsweise konnte von GROSSMANN und THOMAE, sowie von FEIGENBAUM [24] gezeigt werden, daß die Verhältnisse der Abstände zwischen aufeinanderfolgenden Verzweigungspunkten stets demselben Grenzwert $\delta = 4.6692...$ zustreben.

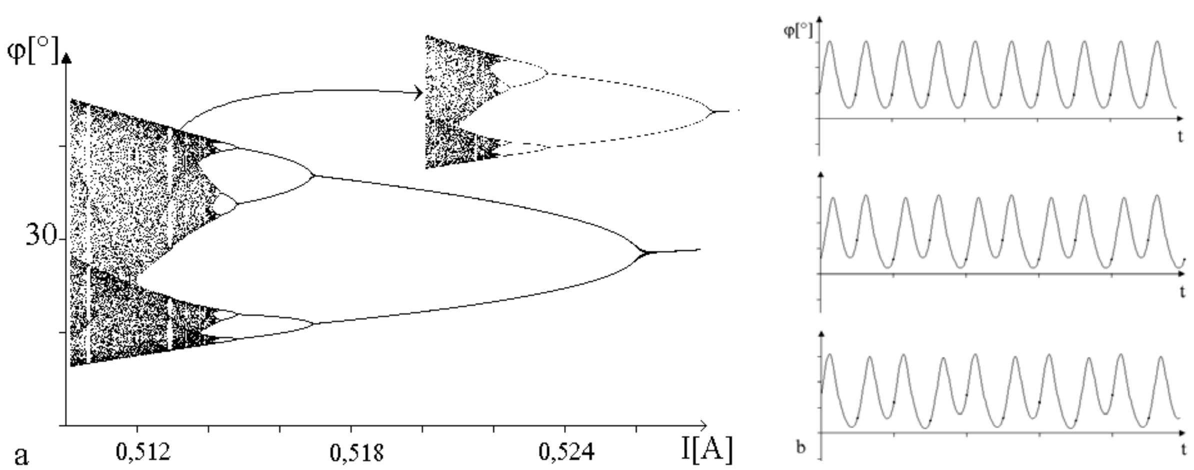

Abb. 9(a)Übergang ins Chaos in einem Periodenverdopplungsszenario. (b) Orts- Zeit- Diagramm für einen 1 er, 2 er und 4 er - Zyklus.

Ein wichtiges Ergebnis der Übergangsszenarien ist die Möglichkeit, qualitative Veränderungen im Systemverhalten voraussehen zu können, etwa dann, wenn sich das bevorstehende Chaos in einer Periodenverdopplungssequenz ankündigt. Dies kann von außerordentlichem praktischen Interesse sein. Beispielsweise interessiert man sich in der Medizin dafür, ob dem chaotischen Herzflimmern derartige Schwingungsmuster vorausgehen und inwieweit dies aus EKG - Aufzeichnungen eines Patienten herausgelesen werden kann [25].

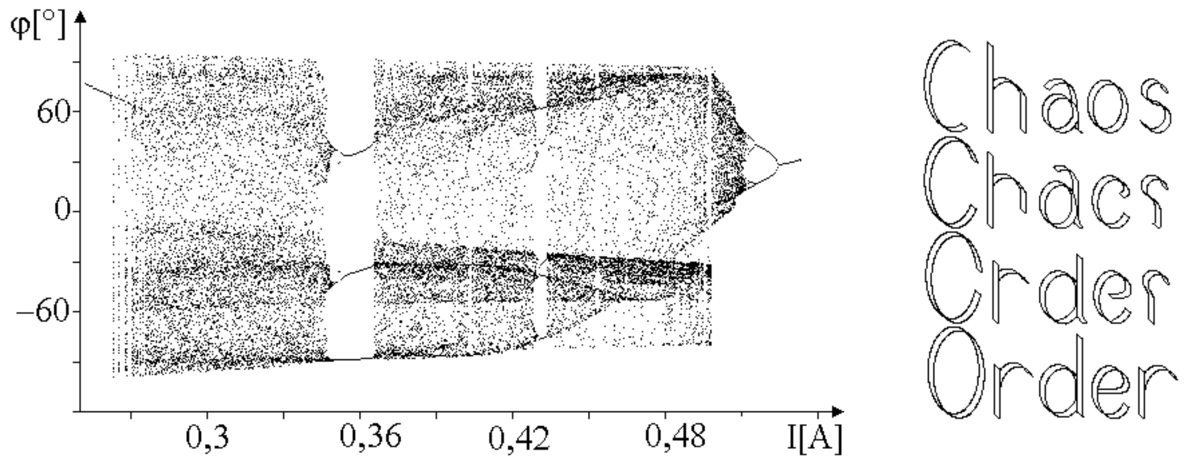

Abb. 10 Übersicht über das Langzeitverhalten des Pohlschen Rades im gesamten Dämpfungsbereich: Aufgetragen sind über jeder Dämpfungsstromstärke I nach Abklingen des Einschwingverhaltens 50 Werte für die Auslenkung beim Nulldurchgang der Anregung.

Kreatives Chaos

Die Bifurkationen, durch die die Perioden verdoppelt werden, entsprechen phasenübergangsähnlichen Vorgängen. Sie sind mit Symmetriebrüchen verbunden, durch die die Symmetrie des Systems schrittweise erniedrigt wird bis im Falle der chaotischen Schwingung überhaupt keine Symmetrie mehr zu erkennen ist. Geht man davon aus, daß dadurch die Strukturiertheit, die Komplexität und der Organisationsgrad des Systems zunimmt, so zeigt sich, daß "die Komplexität...eine scheinbare Unordnung (ist) hinter der man eine versteckte Ordnung annehmen kann; oder mehr noch, die Komplexität ist eine Ordnung, deren Code man nicht kennt" [26]. Organisiertheit, Komplexität und Chaos gehen gewissermaßen Hand in Hand. Das Fehlen jeder Form von Regelmäßigkeit und Ordnung in einem chaotischen Signal bedeutet, daß die zeitliche Entwicklung des dynamischen Systems rechnerisch irreduzibel ist. Dies ist aber eine andere Form zu sagen, das System verhalte sich unvorhersagbar. Denn es gibt keine schnellere Möglichkeit herauszufinden, wie sich das System entwickeln wird, als es selbst zu beobachten. Das ist in gewisser Weise wie bei einem Tennisspiel. Die größten Computersysteme der Welt wären nicht in der Lage, das Spiel in einer Weise zu simulieren, die dem realen Geschehen auch nur annähernd gleich käme. Der große Reiz, der von einem Tennisspiel ausgeht, beruht auf dieser seiner Unkalkulierbarkeit: Hier erleben wir Kreativität in reinster Form, vor unseren Augen entwickelt sich etwas Neues, Einmaliges: "Organisation wird aus den Umständen geboren, wie Aphrodite aus dem Schaum" [3]. Die Frage, wie Neues entsteht, muß aber als eine der großen Herausforderungen der modernen Naturwissenschaften angesehen werden.

Ausblick

Die Botschaft unseres Drehpendels, daß Chaos bereits in äußerst einfachen Systemen auftritt, sollte m.E. positiv als Hoffnung gesehen werden, dereinst tiefere physikalische Einsichten auch in die komplexen und chaotisch erscheinenden Aspekte der Realität zu gewinnen. Eine genauere Einschätzung der künftigen Bedeutung der Chaosforschung innerhalb der Naturwissenschaften kann vorerst nicht gegeben werden, zumal einiges dafür spricht, daß auch die Entwicklung eines wissenschaftlichen Paradigmas dem Verhalten eines chaotischen Systems ähnelt: Die Aktivitäten der Wissenschaftler selbst stellen offenbar den schnellsten analogen "Rechenvorgang" dar, und es bleibt uns nichts anderes übrig, als mitzumachen oder zuzusehen und auf das Ergebnis gespannt zu sein.

Auch wenn diese Einsicht in die Irreduzibilität komplexer dynamischer Vorgänge die Grenzen der klassischen Uhrwerkwelt aufzeigt und damit das Elend des bloßen Kalküls offenbart, kann sie insofern positiv gewendet werden, als sie auf andere Strategien als reines Rechnen und lineares Denken verweist: Computersimulationen komplexer Vorgänge (Weltmodell, langfristige Wettervorhersagen) sollten ebenso skeptisch beurteilt werden wie die Fähigkeiten des Menschen, in komplexen Situationen "richtige" Entscheidungen zu treffen [8].

Von diesen mehr globalen Fragen abgesehen, zeitigt die Chaosforschung bereits heute eine Reihe von wertvollen Erkenntnissen in verschiedenen Bereichen der Mathematik, Naturwissenschaften [27], Medizin [28] und anderen Gebieten [29]. Eine umfassende Würdigung erscheint allerdings nur unter dem allgemeinen Aspekt der Selbstorganisation sinnvoll und geht über den Rahmen unseres Themas hinaus.

Literatur

[1] Kuhn, T. S.: Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen. Frankfurt 1976.

[2] Whitehead, A.N.: Wissenschaft und moderne Welt. Frankfurt 1988.

[3] Serres, M.: Der Parasit. Frankfurt 1984.

[4] Sommerfeld, A.: Zwanzig Jahre spektroskopischer Theorie in München. Gesammelte Schriften IV. Braunschweig 1968, S. 638.

[5] Schelling, F.W.J.: Werke III. Stuttgart etc. 1856-61.

[6] Schiller, F.: Der Spaziergang. In: Sämtliche Werke I. Stuttgart etc. 1965, S. 132.

[7] Laplace, P. S. de: Die Entwicklung des Sonnensystems. In: S. Sambursky:

Der Weg der Physik. München 1978, S. 462.

[8] Dörner, C.D.: Wie Menschen eine Welt verbessern wollten und sie dabei zerstörten. Bild der Wissenschaft 12/2, 48 (1975).

[9] Newton, I.: Mathematische Prinzipien der Naturlehre. Darmstadt 1963, S. 380.

[10] Poincaré, H.: Wissenschaft und Methode. Darmstadt 1973, S. 57.

[11] Maxwell, J.C.: Does the progress of Physical Science tend to give any advantage to the opinion of Necessity (or Determinism) over that of Contingency of Events and the Freedom of the Will? Zitiert nach: Sullivan,

J.W.N.: Aspects of Science. London 1923.

[12] Peitgen, H.O., Richter, P.H.: The Beauty of Fractals. Berlin etc. 1986.

[13] Calvino, I.: Wenn ein Reisender in einer Winternacht. München 1989. [14] Haken, H.: Synergetik. Berlin etc. 1983.

[15] Backhaus, U., Schlichting, H. J.: Auf der Suche nach Ordnung im Chaos.
Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht43/8, 456 (1990).

[16] Kant, I.: Naturgeschichte des Himmels. Leipzig o. J., S. 13.

[17] Ottino, J.M.: Mischen zäher Flüssigkeiten. Spektrum der Wissenschaft 3, 66 (1989)

[18] Thomson, J.M.T., Stewart, H.B.: Nonlinear Dynamics and Chaos. New York: Wiley 1986, p. 245.

[19] Mandelbrot, B.: Die fraktale Geometrie der Natur. Basel: Birkhäuser 1987.

[20] Großmann, S.: Selbstähnlichkeit: Das Strukturgesetz im und vor dem Chaos. Phys. Bl. 45/6 (1989).

[21] Holden, A.V.: Chaos in complicated systems. Nature 305, 183 (1983).

[22] Borges, J.: Die zwei Labyrinthe. München 1986, S. 155.

[23] Backhaus, U., Schlichting, H. J.: Mandelbrot-Iteration und Pohlsches Rad. In: Wiebel, K.H. (Hrsg.): Zur Didaktik der Physik und Chemie. Alsbach 1990, S.293.

[24] Großmann, S., Thomae, S.: Z. Naturforschung 32a, 1353(1977); Feigenbaum, M.: J. Stat. Phys. 19, 25 (1978).

[25] Glass, L., Shrier, A., Belair, J.: Chaotic cardiac rhythm. In: Holden, A.V.(Ed.): Chaos. Manchester 1986.

[26] Atlan, H.: Entre le cristal et la fumée. Paris: Seuil 1979, p. 78.

[27] Iooss, G., Hellemann, R.H.G., Stora, R.: Comportement chaotique des syst-émes mes déterministes. Amsterdam etc. 1983.

[28] Gerok, W. et al. (Hrsg.): Ordnung und Chaos in der unbelebten und belebten Natur. Stuttgart 1989.

[29] Hierholzer, K., Wittmann, H.G. (Hrsg.): Phasensprünge und Stetigkeit in der natürlichen und kulturellen Welt. Stuttgart 1988.