Physik eines Kinderspielzeugs

Springtiere

CHRISTIAN UCKE | HANS-JOACHIM SCHLICHTING

Ein Floh beschleunigt beim Absprung bis zum mehreren Hundertfachen der Erdbeschleunigung. Kleine Plastikspielzeuge in Form eines Tieres und versehen mit einer Feder bringen nicht ganz so hohe Werte, erlauben aber detaillierte Untersuchungen.

Es dürfte nicht ganz einfach sein, die Sprunghöhe eines Flohes unter kontrollierten Bedingungen zu messen. Vielleicht schwanken deshalb die Angaben stark; 30 cm scheint konsensfähig zu sein [1]. Ein Floh hat etwa eine Größe von 1 mm. Etwa auf dieser Strecke erbringt er auch seinen Absprung. Unterstellt man eine gleichmäßige Beschleunigung, ergibt sich aus der Formel $a = h \cdot g/d$ eine Beschleunigung a von 300 g, wobei h die Sprunghöhe, d die Beschleunigungsstrecke und g die Erdbeschleunigung sind. Der Floh ist dabei noch nicht einmal Weltmeister. So genannte Schnellkäfer schaffen bis zu 380 g [1]. In Wirklichkeit dürfte die Spitzenbeschleunigung noch größer sein, da eine gleichmäßige Beschleunigung kaum vorausgesetzt werden kann. Auch spielt der Luftwiderstand bei so kleinen Tieren eine erhebliche Rolle. Er ist abhängig vom Verhältnis Oberfläche zum Volumen und das ist um so größer, je kleiner das Tier ist. Biologen haben Flöhe in Luft bei normalem Luftdruck und im Vakuum hochgeschossen und dabei festgestellt, dass der Floh im Vakuum bis zu viermal höher kam [2].

INTERNET

Eine Filmsequenz des Sprunges mit 1000 Bildern pro Sekunde ist aus dem Internet herunterladbar unter:

www.e20.physik.tu-muenchen.de/~cucke/ftp/lectures/jump2.avi

Ein einfaches Spielzeug erlaubt dem gegenüber kontrolliertere Untersuchungen. Auf einem Unterteil ist eine Druckfeder befestigt, die zusammengedrückt wird und mit Hilfe eines Gummisaugers in dieser Position abgestellt werden kann. Nach einiger Zeit (Sekunden bis Stunden, wobei letzteres ziemlich frustrierend sein kann) löst sich der Gummisauger von dem Unterteil, und das Spielzeug schnellt in die Höhe (Abbildung 1).

Ein solches zur Untersuchung ausgewähltes Spielzeug springt ca. 120 cm hoch. Andere Exemplare schaffen 100 cm bis zu 140 cm. Sprunghöhe ist hier zunächst definiert als maximaler Abstand des Schwerpunkts zum Boden. Dieser Abstand schwankt um den angegebenen Wert, da die Startbedingungen (symmetrisches und gleichmäßiges Aufdrücken des Gummisaugers) nicht immer gleich sind. Etwas verdrehtes Aufdrücken des Gummisaugers führt zu einer Art Schraubensprung; etwas unsymmetrisches Aufdrücken führt zu einem oder sogar mehrfachen Saltos. Solche Aktionen vermindern die maximale Sprunghöhe.

Die Sprunghöhe bedarf einer genaueren Klärung. Beim Hochsprung wird die Sprunghöhe ähnlich gerechnet, wie eben definiert, nämlich als Abstand einer zu überquerenden Latte vom Boden. Das ist nicht gleich dem maximalen Abstand des Körperschwerpunkts vom Boden, da bei diversen Sprungtechniken der Körper über die Latte, der Schwerpunkt aber unter der Latte durchgeschummelt wird. Physikalisch interessant ist der maximale Abstand des Schwerpunkts in der zusammengedrückten Stellung bis zum höchsten Punkt des Schwerpunkts, da dies für Energieüberlegungen ausschlaggebend ist. Beim Floh ist diese Differenzierung unwesentlich, da die Sprunghöhe im Verhältnis zur Körpergröße sehr groß ist. Beim Springtier hat sie schon eine gewisse Bedeutung. Beim Menschen ist

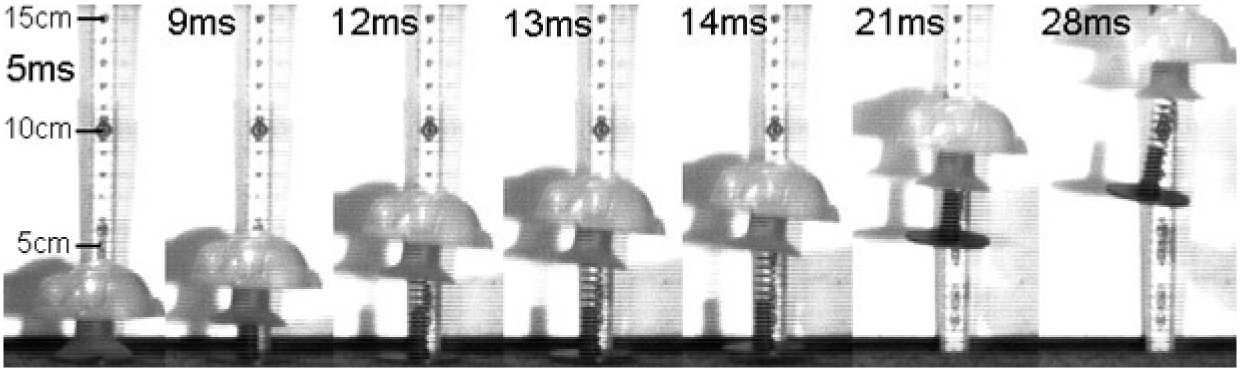


Abb. 1 ***Ausschnitte aus einer Filmaufnahme mit etwa 1000 Bildern pro Sekunde und einer Belichtungszeit von 1/4000 Sekunde pro Bild.***

sie auf jeden Fall zu berücksichtigen (siehe „Der Hochsprung aus dem Stand beim Menschen“, unten).

Der Abstand des Schwerpunkts des zusammengedrückten Spielzeugs (SP2 in Abbildung 2) vom Boden beträgt 1,7 cm. Die physikalisch relevante Sprunghöhe also etwa 118 cm. Die potentielle Energie folglich $E_{\text{pot}} = mgh$ = 0,0145 kg · 10 ms^{-2} · 1,18 m = 0,171 J.

Es liegt nahe, aus den charakteristischen Werten der Feder die Sprungenergie zu berechnen. Grob und schnell lässt sich die Federsteife ermitteln, indem man das Spielzeug auf einer Waage zusammendrückt. Dabei ergibt sich etwa 1,9 kg, was 19 N entspricht. Das Eigengewicht ist demgegenüber vernachlässigbar. Die Feder wird um eine Strecke von d = 3,5 cm zusammengedrückt. Daraus folgt eine Federsteife von c = 19 N/ 0,035 m = 543 Nm^{-1}. Genauer, aber auch aufwendiger wird es, wenn man die Feder aus dem Spielzeug isoliert und sorgfältig ausmisst. Es ergibt sich eine Federsteife von c = 495 N/m. Daraus errechnet sich mit einer Weglänge von d = 3,2 cm eine in der Feder gespeicherte Energie von $E_{\text{Fed}} = 0{,}5 \cdot c \cdot d^2$ = 0,253 J. Die Startbeschleunigung, die aber auf der Beschleunigungsstrecke d

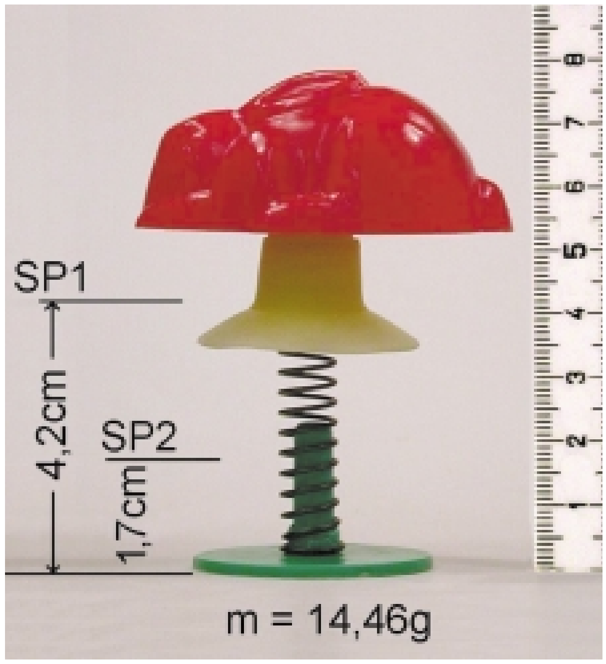


Abb. 2 ***Das Springspielzeug. SP1 und SP2 bezeichnen die Lage des Schwerpunkts im entspannten und zusammengedrückten Zustand.***

DER HOCHSPRUNG AUS DEM STAND BEIM MENSCHEN

Eine häufig gestellte Frage ist, wieviel Mal höher ein Mensch auf dem Mond als auf der Erde springen könnte. Die ebenso häufig darauf gegebene Antwort ist der Faktor sechs, weil die Mondbeschleunigung um diesen Faktor geringer als die Erdbeschleunigung ist. Eine genauere Analyse [5] erbringt jedoch keineswegs eine so klare Bestätigung.

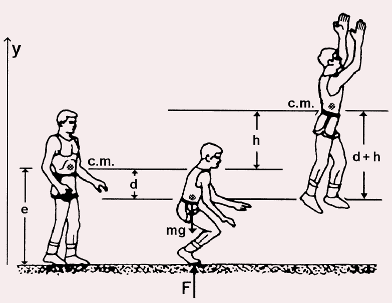
Bevor ein Mensch aus dem Stand hochspringt, geht er in die Hocke. Dabei vermindert er den Abstand seines Schwerpunkts (c. m.) vom Boden um die Strecke d (Abbildung). Das ist zugleich die Beschleunigungsstrecke beim Sprung nach oben. Die mit dem Sprung erreichte (Schwerpunkt-) höhe sei h. Ist F die durchschnittliche (Brutto-) Absprungkraft, gilt

$$F \cdot d = m \cdot g\,(d + h). \qquad (1)$$

Als Bruttoabsprungkraft sei die mit den Beinen erzielbare Kraft vermehrt um das Eigengewicht bezeichnet. Das ist die Kraft, die beim Absprung auf den Boden wirkt. Falls F nicht konstant angenommen werden kann, muss man zur integralen Form übergehen:

$$\int_0^d F dy = mg\,(d + h) \qquad (2)$$

Die zu erreichende Absprungkraft kann man als Vielfaches n des Eigengewichts des Springers ausdrücken. Auf der Erde kann man $F = nmg$ setzen. Auf dem Mond entsprechend $F = n' \cdot mg'$ mit $n' = 6n$ und $g' = g/6$. Die Kraft F bleibt näherungsweise gleich. Diese beiden Werte für F in die Gleichung (1) eingesetzt ergibt $h = (n\text{-}1)d$ bzw. $h' = (n'\text{-}1)d = (6n\text{-}1)d$. Durch Division dieser beiden Gleichungen folgt $h'/h = (6n\text{-}1)/(n\text{-}1)$.



Der Wert von n beträgt etwa zwei. Es ist ein physiologisch plausibler Wert, dass man das Doppelte seines Eigengewichts als Absprungkraft aufwenden kann. Das heißt nichts anderes, als dass man sein eigenes Körpergewicht stemmen kann.

Damit ergibt sich dann ein Verhältnis h'/h = 11. Auf dem Mond könnte man also etwa elfmal höher springen als auf der Erde. Natürlich ist bei dieser Analyse die verwendete Definition von Sprunghöhe relevant. Erst diese Definition macht die hier durchgeführte Überlegung überhaupt möglich, da dadurch die konkrete Größe (Länge) eines Springers herausfällt.

Legt man die übliche Definition von Sprunghöhe zugrunde, braucht man konkrete Daten. Sei der Abstand des Schwerpunkts eines – stehenden – Springers vom Boden e = 1 m. Aus obigen Gleichungen ergibt sich $h/d = n\text{-}1$, das heißt bei n = 2 ist $h = d$. Aus Messungen ergibt sich d zu etwa 30 cm [6]. Für die Sprunghöhe H auf der Erde folgt dann $H = e + h$ = 1,33 m. Für die Sprunghöhe H' auf dem Mond ergibt sich $H' = e + h'$ = 1 m + 3,7 m = 4,7 m.

Das Verhältnis H'/H beträgt dann 3,5. Wird n größer, nimmt das Verhältnis etwas zu. Das schaffen nur trainierte Sportler. Ein Verhältnis von sechs ergibt sich für einen beliebig gut trainierten Sportler ($n \to \infty$), der dann allerdings auch beliebig hoch springen würde.

nicht konstant bleibt, ergibt sich zu $a = F/m - g = c \cdot d/m - g$ = 495 $Nm^{-1} \cdot 0{,}032$ m/0,0098 kg – 10 ms^{-2} = 1606 ms^{-2} = 161 g. Für die Masse m wird hier nur die Summe von Kopfmasse (6,06 g), Gummisauger (2,84 g) und einem Drittel der Feder (0,94 g) eingesetzt, da der Fuß und der untere Teil Feder beim Start nicht mitbeschleunigt werden. Diese Beschleunigung ist zwar noch nicht das, was der Floh erreicht, aber doch schon ganz schön.

Unmittelbar anschaulicher als die in der Feder gespeicherte Energie ist die damit erreichbare Höhe, die sich aus dem Zusammenhang $E_{Fed} = 0{,}5 \cdot c \cdot d^2 = mgh = 0{,}253$ J zu h = 1,74 m ergibt. Wo geht mechanische Energie verloren? Oder anders gefragt: Warum springt das Spielzeug nicht so hoch?

Mit Hilfe einer digitalen Hochgeschwindigkeitskamera wurde der Start aufgenommen (Abbildung 1). Der gesamte Film ist bei uns im Internet abrufbar. Selbst bei 2000 Bildern pro Sekunde entfallen nur etwa 15 Bilder, entsprechend einer Zeitdauer von 7,5 ms, auf die direkte Beschleunigungsphase beim Start. Das reicht aber aus, um einige Auswertungen vorzunehmen. Auch die Phase unmittelbar nach dem Abheben lässt sich analysieren. Mit dem Ansatz

$$a(y) = \frac{c(d-y)}{m} - g$$

für die Beschleunigung ergibt sich für die Geschwindigkeit des Kopfes am Ende der Beschleunigungsphase

$$v = \sqrt{2\int_0^d a\,dy} = \sqrt{\frac{cd^2}{m} - 2gd}.$$

Setzt man die gleichen Zahlenwerte wie schon vorher bei der Ermittlung der Startbeschleunigung ein, ergibt sich v = 7,1 ms^{-1}. Das ist die maximale Geschwindigkeit des Kopfes am Ende der Beschleunigungsstrecke d. Sie ist nicht gleichbedeutend mit der Abhebegeschwindigkeit des Schwerpunktes des gesamten Spielzeugs. Aus den Filmaufnahmen kann man mit Hilfe von adäquaten Auswerteprogrammen eine Geschwindigkeit von v = 7 ms^{-1} ermitteln. Das ist eine bemerkenswert gute Übereinstimmung angesichts der sich aus den Pixelungenauigkeiten der digitalen Bilder und damit einhergehenden ergebenden Auswerteunsicherheiten.

Die Beschleunigung des Kopfes während der Startphase lässt sich aus den Filmaufnahmen nur mit ziemlicher Unsicherheit entnehmen. Dennoch ergibt sich eine Bestätigung des errechneten Wertes von etwa 160 g.

Für die Geschwindigkeit des Schwerpunkts des gesamten Spielzeugs unmittelbar nach dem Abheben ergibt sich v = 4,84 ms^{-1}. Daraus folgt eine kinetische (Start-)Energie von $E_{kin} = 0{,}5mv^2 = 0{,}5 \cdot 0{,}0145$ kg $\cdot$ (4,84 $ms^{-1})^2$ = 0,170 J. Das stimmt ausgezeichnet mit der aus der Sprunghöhe ermittelten Energie überein. Ein Unterschied hätte hier aus eventuellen Verlusten durch den Luftwiderstand herrühren können, der aber bei diesen Geschwindigkeiten offenbar nur eine untergeordnete Rolle spielt.

Unmittelbar nach dem Abheben schwingt das Oberteil gegen das Unterteil des Spielzeugs. Mit dem bloßen Auge ist das nicht wahrnehmbar. Die Analyse des Videos ergibt eine Frequenz von 74 Hz. Diese Frequenz ist [3]

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{\mu}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{495\ \mathrm{Nm}^{-1}}{0{,}0021\ \mathrm{kg}}} = 77\ \mathrm{Hz}$$

mit $\mu = m_1 \cdot m_2/(m_1 + m_2)$ und m_1 = 0,0089 kg; m_2 = 0,00275 kg.

Die Übereinstimmung von Messung und Rechnung ist sehr gut. Dabei ist hier noch nicht einmal die eigentlich nicht vernachlässigbare Masse der Feder selbst berücksichtigt, die tendenziell die Frequenz erniedrigen würde.

Es könnte auch Energie in die Schwingungen der Feder nach dem Absprung dissipieren. Dies ließe sich aus weiteren Analysen abschätzen, bei denen die Dämpfung der Schwingung ermittelt wird. Da die Feder aber relativ steif ist, schätzen wir diesen Anteil als eher unbedeutend ein.

Zieht man den Kopf vom Sauger ab, erkennt man darunter die in den Sauger mit einigen Windungen hineingepresste Feder. Diese Windungen können ihre Energie praktisch nicht zum Sprung einsetzen, da sie durch starke Reibung an der Gummifläche behindert werden. Dies quantitativ abzuschätzen, ist jedoch kaum möglich.

Mit diesem Spielzeug lassen sich weitere Untersuchungen durchführen, indem man es ohne Kopf, ohne Unterteil, mit Zusatzmassen und auch umgedreht springen lässt [4]. Es stellt damit ein hübsches Experiment dar, bei dem elementare physikalische Überlegungen auf ihre Konsistenz überprüft werden können und sich außerdem interdisziplinäre Verbindungen zur Biologie und zum Sport ergeben, die sich noch erheblich vertiefen lassen.

Literatur

[1] G. Czihak et al., Biologie, Springer-Verlag, Berlin 1990.
[2] K. Schmidt-Nielsen, Scaling – Why is animal size so important, Cambridge University Press, Cambridge 1984; und H. Genz, *Physik in unserer Zeit* **28**, 38 (1/1997).
[3] F. Kuypers, Klassische Mechanik, Wiley-VCH, Weinheim 1997.
[4] H.J. Schlichting, Physik in der Schule **32**, 55 (1994).
[5] A. Díaz-Jiménez, The Physics Teacher **31**, 534 (1993).
[6] F. Tusker, A. Huber, Lehrstuhl für Bewegungs- und Trainingslehre an der Technischen Universität München, persönliche Mitteilung.


Die Autoren

Christian Ucke und Hans-Joachim Schlichting betreuen seit Jahren die Rubrik „Spielwiese“.
Anschriften: *Dr. Christian Ucke, Physikdepartment E 20, Techn. Univ. München, 85747 Garching, cucke@e20.physik.tu-muenchen.de*
Prof. Dr. Hans-Joachim Schlichting, Institut für Didaktik der Physik, Universität Münster, Wilhelm-Klemm-Straße 10, 48149 Münster, schlichting@uni-muenster.de