

Was hat Schönheit mit Chaos zu tun?

Vergleich der Mandelbrot-Iteration mit einem chaotischen Drehpendel

Udo Backhaus (Universität Osnabrück), H.- Joachim Schlichting, (Universität GH Essen)

1. Problemstellung

In den letzten Jahren übte die Untersuchung der Mandelbrot-Menge eine wachsende Faszination auf Wissenschaftler und Laien, auf Theoretiker, Künstler und Computer-Freaks aus. Diese Faszination beruht zum großen Teil auf der merkwürdigen Schönheit der dabei erzeugten Bilder, die in vielen, auch populären, Ausstellungen, auf Tagungen und in prachtvollen Bildbänden gezeigt werden /4;5/. Ein weiterer Grund ist sicher die große Diskrepanz zwischen der unbeschreiblichen Komplexität der Bilder und der Einfachheit des zugrunde liegenden Algorithmus.

Die Schönheit der von den Bildern der *Mandelbrot-Menge* und ihrer Abkömmlinge wird häufig mit chaotischem Verhalten in Verbindung gebracht. Der dabei unterstellte Zusammenhang zwischen der Schönheit rein mathematischer Gebilde und dem komplexen Verhalten physikalischer Systeme bleibt jedoch in vielen Fällen unaufgeklärt und ruft beim Adressaten Ratlosigkeit hervor./3/

Wir wollen deshalb am konkreten Beispiel eines einfachen dynamischen Systems Beziehungen zwischen den Mandelbrot-Bildern und chaotischem Verhalten aufzeigen und damit demonstrieren, inwieweit die Schönheit der Bilder die Tiefenstruktur chaotischer Vorgänge berührt.

Die Mandelbrot-Iteration

Bilder der Mandelbrot-Menge und ihrer Abkömmlinge spiegeln das Langzeitverhalten einer gewissen Klasse von Iterationsfolgen. Das sind Zahlenfolgen, bei denen jedes Glied nach einer festen Vorschrift aus seinem Vorgänger berechnet wird:

$$x_{n+1} = F_a(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Das Langzeitverhalten solcher Folgen hängt von gewissen, die Bildungsvorschrift F charakterisierenden, Konstanten a und vom Anfangswert x_0 ab.

Die Mandelbrot-Iteration ist die komplexe Iterationsfolge

$$z_{n+1} = F_c(z_n) = z_n^2 + c \quad \text{mit } z_0, c \in \mathbb{C} \quad (2)$$

oder reell geschrieben

(mit $x = R(z)$, $y = I(z)$)

$$\begin{aligned} (x_{n+1}, y_{n+1}) &= F_{c_x, c_y}(x_n, y_n) \\ &= (x_n^2 - y_n^2 + c_x, 2x_n y_n + c_y) \end{aligned} \quad (3)$$

Das Verhalten dieser Folge hängt von vier Bedingungen ab: den beiden Parametern c_x und c_y und den beiden Anfangswerten x_0 und y_0 .

Was aber haben solche Untersuchungen diskreter

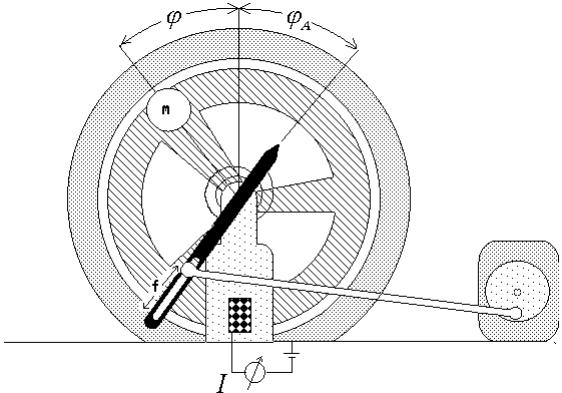


Bild 1: Drehpendel mit Unwucht. Experimentell leicht zu variierende Parameter: Zusatzmasse m , Anregungsfrequenz Ω , Anregungsamplitude f , Dämpfungsstromstärke I .

Iterationsfolgen mit der Untersuchung physikalischer Systeme zu tun?

Diskretisierung physikalischer dynamischer Systeme

In der Physik wird die zeitliche Entwicklung von Systemen durch Bewegungsgleichungen beschrieben. Diese sind wegen der kontinuierlichen Abhängigkeit der Systeme von der Zeit Differentialgleichungen. In der Praxis jedoch ist die Messung und Beschreibung physikalischer Systeme fast immer diskret: beim Messen wegen des endlichen zeitlichen und räumlichen Auflösungsvermögens der Registriergeräte, bei der Berechnung wegen der nume-

rischen Integration. Nur die wenigsten Bewegungsgleichungen sind nämlich analytisch zu lösen. Bei der numerischen Behandlung handelt es sich um eine Art mathematischer Rückkopplung: Man füttert den mathematischen Ausdruck, der das Systemverhalten beschreibt (die Bewegungsgleichung), immer wieder mit seinem eigenen Ergebnis (einem neuen Systemzustand) und „hangelt“ sich auf diese Weise an der **Trajektorie** des Systems entlang.

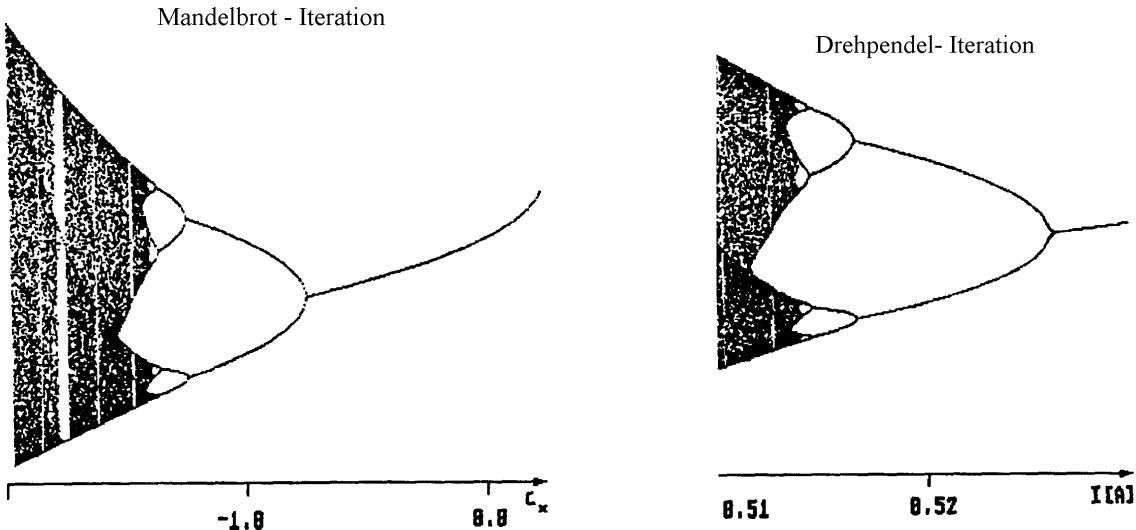


Bild 2: Einen ersten Überblick über das Verhalten der Mandelbrot- Iteration bzw. des Drehpendels gewinnt man, indem man nur einen Parameter variiert ($-2.0 \leq c_x \leq 0.25$ bzw. $510 \text{ mA} \leq I \leq 530 \text{ mA}$) und darüber die Folenglieder aufträgt, nachdem das Einschwingverhalten abgeklungen ist.

Die Diskretisierung eines Bewegungsablaufes kann als eine Art **stroboskopischer Betrachtung** angesehen werden. Die mit dieser Stroboskopierung verbundene Möglichkeit, das Verhalten des Systems nur zu bestimmten Zeitpunkten zu registrieren und dann damit überflüssige Informationen auszublenden, kann auch Vorteile haben. Sie führt dann zu vertieften Erkenntnissen über das System, wenn sie synchron mit dem Rhythmus des Systems erfolgt. Das ist schwierig bei den sogenannten **autonomen Systemen**, die ihre zeitliche Struktur selbst organisieren. Dagegen ist es leicht bei **periodisch angetriebenen Systemen**, denen ein fester Zeittakt von außen aufgeprägt wird. Auf solche angetriebenen Systeme werden wir uns im folgenden beschränken.

Die stroboskopische Betrachtung eines Systems liefert eine Folge von Zuständen (ξ_0, ξ_1, \dots) mit $\xi_i = \xi(i\Delta t)$ und damit eine Iterationsabbildung I :

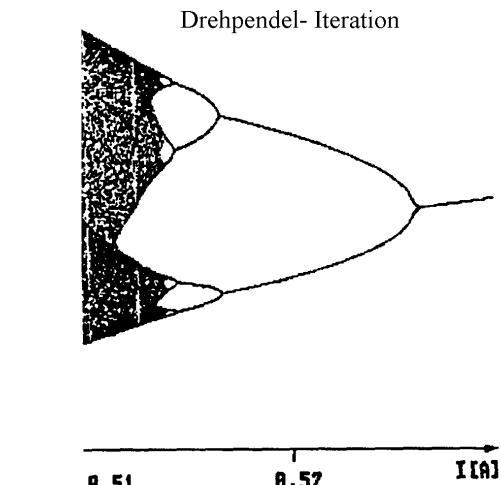
$$\xi_{n+1} = I(\xi_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Experimentell ergibt sich der Folgezustand dadurch aus einem beliebigen Zustand, daß sich das System unter dem Einfluß der Anregung weiter entwickelt – und zwar genau für die Dauer einer Anregungsperiode. Mathematisch läßt sich die Iterationsabbildung nur in den seltensten Fällen geschlossen angeben; in

der Regel beinhaltet sie einen umfangreichen Algorithmus, mit dessen Hilfe aus einem Zustand der Folgezustand berechnet werden kann.

Als Beispiel betrachten wir ein Drehpendel (Bild 1), das durch eine Zusatzmasse unwuchtig, d. h. nicht-linear gemacht wurde [1]. Sein Verhalten ergibt sich aus der Summe der angreifenden Drehmomente:

$$\theta \cdot \partial^2 \phi / \partial t^2 + \beta \cdot \partial \phi / \partial t = -D(\phi - \phi_A) + m g r \sin \phi$$



Bei harmonischer Anregung ($\phi_A = \alpha_1 \cos \Omega t$) erhält man daraus folgende Bewegungsgleichung:

$$\partial^2 \phi / \partial t^2 = \rho(I) \cdot \partial \phi / \partial t - \Omega_0^2 \phi + r_0 \sin \phi + f \cos \Omega t \quad (5)$$

Das Verhalten hängt also von vielen Parametern ab, von denen wir alle bis auf die Dämpfungsstromstärke I und die Anregungsamplitude f konstant halten wollen. Der Zustand des Rades ist vollständig bestimmt durch den Ausschlag ϕ und die Phase der Anregung Ωt . Dadurch die Stroboskopabbildung die Anregungsphase jedesmal denselben Wert hat, hat man also wie bei der Mandelbrot-Iteration eine Folge von Zahlenpaaren $(\phi_n, \dot{\phi}_n)$, die außer von den Anfangswerten von zwei Parametern abhängt:

$$(\phi_{n+1}, \dot{\phi}_{n+1}) = F_{I,f}(\phi_n, \dot{\phi}_n) = \begin{array}{l} \text{stroboskopische} \\ \text{Registrierung im Takt} \\ \text{der Anregung} \cdot 50 \\ \text{Integrationsschritten} \end{array} \quad (6)$$

Experimentell kann das Rad untersucht werden, indem man z.B. eine Lichtschranke periodisch durch die Anregungsstange verdunkelt. Mit dem so erzeugten Impuls kann entweder (zu Demonstrationszwecken) ein Stroboskop angesteuert oder die Meßwertaufnahme (z.B. mit einem Computer)

getriggert werden. Numerisch untersuchen wir das System, indem wir die Bewegungsgleichung mit einem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung mit einer festen Schrittweite von 50 Schritt/Anregungsperiode numerisch integrieren. Der Algorithmus der Iterationsabbildung besteht dann also aus 50 Integrationsschritten, von denen jeder selbst aus vier Schritten besteht.

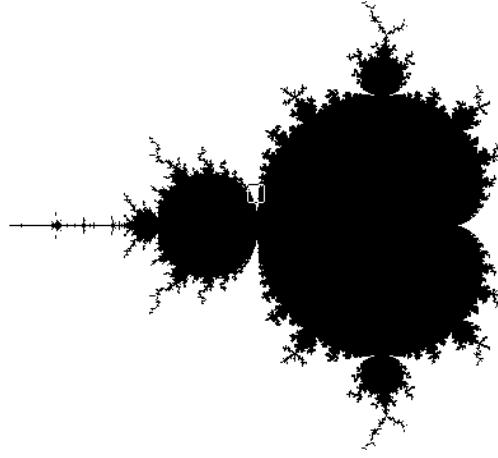


Bild 3: : Mandelbrot- Menge (links) und „Drehpendel- Menge“ (rechts): In der Parameterebene (links: $-2.0 \leq c_x \leq 0.25$, $-1.25 \leq c_y \leq 1.25$; rechts: $50 \text{ mA} \leq l \leq 600 \text{ mA}$, $1.0 \leq f \leq 2.0$) sind die Punkte gefärbt, die bei festen Anfangsbedingungen nicht zu dem jeweils unerwünschten Verhalten führen.

Auf diese Weise entsteht eine weitgehende formale Übereinstimmung zwischen der Mandelbrot-Iteration (3) und der stroboskopischen Registrierung des Drehpendels (6). Zu dem Vergleich zwischen den Systemen ermutigt jedoch nicht nur diese formale Übereinstimmung, sondern vielmehr die experimentelle Erfahrung, daß man an beiden Systemen sehr ähnliche Verhaltensweisen beobachten

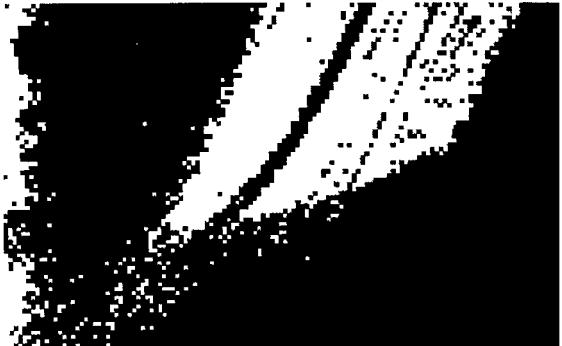


Bild 4: Zusammenhang zwischen dem Feigenbaumdiagramm der Mandelbrot- Iteration und der Mandelbrot- Menge.

kann wie z.B. Periodenverdopplung und chaotisches Verhalten.

Vergleich von Mandelbrot-Iteration und nichtlinearem Drehpendel

Bei beiden Systemen werden folgende Fragestellungen verfolgt:

- Wie hängt das System(end)verhalten – bei festen Anfangsbedingungen – von den Systemparametern ab?
- Welchen Einfluß haben – bei festen Systemparametern – die Anfangswerte auf das Verhalten?
- 1. Variation der Systemparameter bei festen Anfangswerten

Hält man zunächst nicht nur die Anfangswerte fest ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$ bzw. $\phi_0 = 10^\circ$, $\dot{\phi}_0 = 0$), sondern auch einen der Systemparameter ($c_y = 0$ bzw. $f = 1.7$), dann zeigt sich in einem Diagramm zum ersten Mal eine weitgehende Analogie zwischen beiden Systemen (Bild 2). Den Diagrammen liegt eine überraschende vielfältige Dynamik zugrunde, die die statische Darstellung allerdings nur unvollkommen wiedergeben kann. Ihre Veranschaulichung gelingt besser, wenn man mit dem Computer Töne erzeugt, deren Höhe ein Maß für den „Meßwert“ (z.B. proportional zum Realteil x bzw. zur Auslenkung ϕ) ist. Dann zeigt sich u. a., daß die Systeme im mittleren Bereich zwischen den zwei Zuständen hin- und herspringen (Periodenverdopplung) und daß die Folge

der Systemzustände im linken Diagrammbereich (bei negativen c_x -Werten bzw. kleiner Dämpfung) scheinbar völlig regellos ist (Chaos).

Allerdings zeigt das Diagramm für das Drehpendel nur einen kleinen Ausschnitt aus seinen Verhaltensmöglichkeiten /s. 1/. Die beiden **Feigenbaum-Diagramme** in Bild 2 unterscheiden sich darüber hinaus hinsichtlich ihrer Stabilität. Bei der Mandelbrot-Iteration verschwindet das chaotische Verhalten, sowie $c_y = 0$ gewählt wird: Die Zahlenfolge wächst dann schnell über alle Grenzen. Beim nicht-

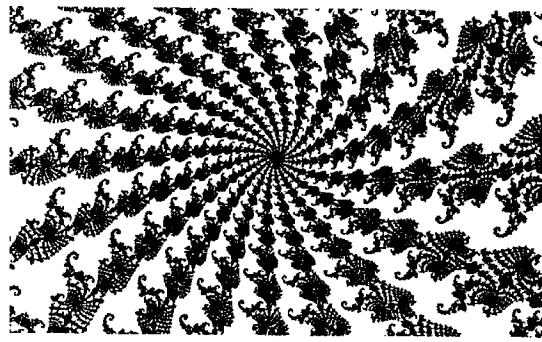


Bild 5: Zwei Vergrößerungen des Randes der Mandelbrot Menge. Keine Vergrößerung dieses Randes zeigt eine glatte Kurve: Der Rand ist ein Fraktal.

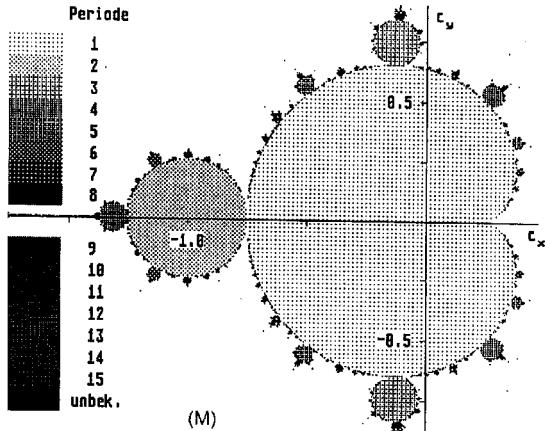


Bild 6: Nach der Periodizität des Endverhaltens gefärbte Mandelbrot- Meng bzw. „Drehpendel- Menge“: Je dunkler die Färbung, desto höher die Periodizität.

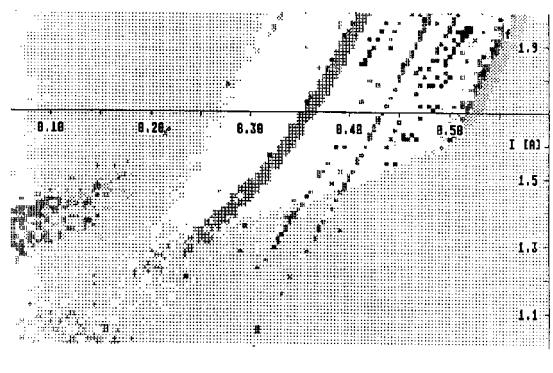
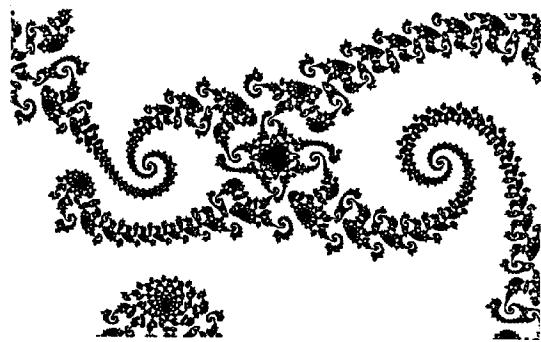
linearen Drehpendel dagegen ändert sich das Diagramm bei Variation von f stetig; das Feigenbaum-Diagramm ist **strukturell stabil**.

Nur beim Drehpendel tritt also Chaos als stabiles Verhalten auf (chaotischer Attraktor). Dafür kann (wegen der Dämpfung des Rades) nur die Mandelbrot-Iteration unter bestimmten Bedingungen unbegrenzt wachsen. Für den weiteren Vergleich der beiden Systeme liegt es deshalb nahe, das System-

verhalten an dem jeweils „unerwünschten“ Verhalten zu messen:

$$\begin{array}{ccc} \text{Mandelbrot-Iteration:} & & \text{Drehpendel:} \\ & \leftrightarrow & \\ \infty - \text{Attraktor} & & \text{chaotischer Attraktor} \end{array}$$

Für welche Parameterwerte tritt nun das unerwünschte Verhalten ein? gibt die Antwort auf diese Frage: Sie zeigt links die *Mandelbrot-Menge*. Das ist die Menge aller Parameterwerte (c_x, c_y) , für die



die Mandelbrot-Iteration mit Anfangswert $z_0 = 0$ nicht divergiert. Entsprechend zeigt das rechte Bild die Menge aller Parameterpaare (l, f) , für die die Schwingungen des Rades nicht chaotisch werden. (Den Zusammenhang zwischen *Feigenbaum-Diagramm* und *Mandelbrot-Menge* veranschaulicht Bild 4. Für das *Drehpendel* kann man stattdessen das entsprechende (winzige) Parameterintervall in Bild 6 erkennen.)

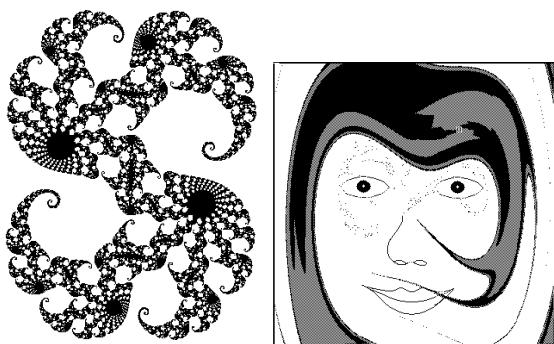


Bild 7: Menge der Anfangswerte, die bei festen Parametern (links: $c_x = 0.28008$, $c_y = -0.008688$, rechts: $f = 1.7$, $I = 280 \text{ mA}$) nicht zum erwünschten führen.

2. Variation der Anfangswerte bei festen Parametern

Untersucht man bei festen Parametern alle Anfangswerte darauf, ob sie zu dem jeweils unerwünschten Verhalten führen oder nicht und färbt sie entsprechend, dann ergeben sich für die beiden Systeme Diagramme wie in Bild 7. Für die Mandelbrot-Menge heißen diese Mengen, die für jedes Paar von Parametern anders aussehen, *gefüllte Julia-Mengen*. Deshalb nannten wir die beim chaotischen Drehpendel entstehende entsprechende Figur *Julia* und fügten nachträglich Augen, Mund und Nase hinzu. Die „Sommersprossen“ allerdings haben eine physikalische Bedeutung: Während das Rad chao-



Bild 8: In der Ebene der Anfangswerte sind die Punkte entsprechend dem Endverhalten gefärbt, zu dem sie führen. Bei $I = 540 \text{ mA}$ (links) gibt es vier unterschiedliche reguläre Endverhalten, bei $I = 513 \text{ mA}$ (Mitte) koexistieren ein regulärer und ein chaotischer Attraktor, bei $I = 505 \text{ mA}$ (rechts) zwei verschiedene chaotische Attraktoren.

Die Mandelbrot-Menge ist ein Gebilde von unvorstellbarem Formreichtum /s. Bild 5/, deren Reiz durch die Einfachheit des Erzeugungsalgorithmus noch gesteigert wird. Bild 3 zeigt, daß die Mandelbrot-Iteration für große c -Werte (auf jeden Fall für $|c| > 2.0$) divergiert. Beim Drehpendel tritt bei mittleren Dämpfungsstromstärken chaotisches Verhalten auf; bei kleiner Dämpfung schwingt das Rad so heftig, daß es von der Potentialschwelle bei $\varphi = 0^\circ$ kaum etwas bemerkt, bei großer Dämpfung schwingt es mit kleiner Amplitude um eine der beiden Gleichgewichtslagen herum. Erwartungsgemäß wird der chaotische Bereich mit zunehmender Anregungsamplitude größer, verschwindet aber bei kleiner Anregung.

Um den Darstellungen der Mandelbrot-Menge oder der „Drehpendel-Menge“ Informationen über die Dynamik des Endverhaltens entnehmen zu können, färbt man alle Parameterpunkte entsprechend der Periodizität des Endverhaltens, zu dem sie führen (Bild 6). Eindrücklicher ist es auch hier, die Dynamik durch Töne zu veranschaulichen.

tisch, also scheinbar völlig regellos schwingt, erzeugen die beim Stroboskopblitz registrierten Systemzustände eine wohl definierte Figur, den **chaotischen Attraktor**: Das Verhalten des Rades ist zwar im Detail nicht vorhersagbar. Trotzdem ist sicher, daß die Systemzustände immer auf dieser Figur liegen werden. Der chaotische Attraktor ist ein Fraktal: Registriert man genügend viele Zustände und vergrößert Teile der Figur immer stärker, dann findet man eine unendlich feine Schichtenstruktur.

Färbte man wie in Bild 6 die gefüllte Julia-Menge entsprechend der Periodizität des sich einstellenden Endverhaltens, so bekäme sie doch eine einheitliche Farbe: Alle Anfangswerte in der gefüllten Julia-Menge führen zu demselben Endverhalten. Nicht so beim Drehpendel: Dort können, bei unveränderten Parametern, verschiedene Anfangsbedingungen zu unterschiedlichen Endverhalten führen (**koexistierende Attraktoren**). Bild 8 zeigt entsprechende Variationen unserer Julia. Bei aller Verschiedenheit des Endverhaltens bleiben sich die Bilder doch in ihrer Gestalt ähnlich. Diese Ähnlichkeit geht zurück auf das Potential, in dem das Rad schwingt und das allein durch die rücktreibende Feder und die Zusatzmasse bestimmt ist (Bild 9).

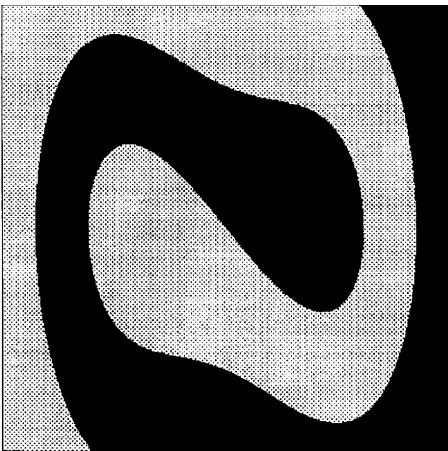


Bild 9: Einzugsbereiche der beiden Gleichgewichtspunkte bei nicht angetriebenem Drehpendel ($I = 535$ mA).

Schlußbemerkung

Mit der Gegenüberstellung der Mandelbrot-Iteration und der diskretisierten Registrierung des nichtlinearen Drehpendels sollten beispielhaft die Gemeinsamkeiten beider Arten von Untersuchungen demonstriert und damit die Antwort auf die eingangs gestellte Frage gegeben werden, was Schönheit mit Chaos zu tun hat bzw. inwiefern Chaos schön sein kann. Bei aller Verschiedenheit zwischen beiden Systemen sind doch die Fragestellungen, unter denen man die Systeme betrachtet, und die Untersuchungsmethoden, mit denen man sie untersucht, dieselben. Beide Systeme zeigen unter dieser Perspektive ähnliches Verhalten. Anders als man es normalerweise von Untersuchungen physikalischer Systeme gewohnt ist, manifestiert sich dieses Verhalten in schönen Bildern. Daher lassen sich die schönen Bilder des mathematischen Mandelbrot-Systems mit dem chaotischen Verhalten eines physikalischen Systems in Verbindung bringen und die Schönheit als Ausdruck des Chaos anzusehen. Über ihren ästhetischen Reiz hinausgehend haben diese Bilder für die Erschließung dynamischer Systeme eine reale Bedeutung: Die menschliche Fähigkeit zur Mustererkennung vermag Strukturen in Vorgängen zu entdecken, die auf den ersten Blick (d.h. bei der Betrachtung des Systems im realen Anschauungsraum) nicht zu erkennen sind. Erst mit Methoden, wie sie bei der Untersuchung der Mandelbrot-Menge angewendet werden, können die komplexen Signale in Bilder verwandelt und damit einer weitergehenden Analyse zugänglich gemacht werden.

Literatur

- 1 Backhaus, U.; H. J. Schlichting: Auf der Such nach Ordnung im Chaos. – In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 43(1991)8. – S. 455
- 2 Becker, K.-H.; M. Dörfler: Dynamische Systeme und Fraktale. – Vieweg: Braunschweig 1989
- 3 Briggs, J.; F. D. Peat: Die Entdeckung des Chaos. – Carl Hanser: München 1990
- 4 Peitgen, H.-O.; P. H. Richter: The Beauty of Fractals. – Springer: Berlin usw. 1986
- 5 Peitgen, H.-O.; D. Saupe: The Science of Fractal Images. – Springer: Berlin usw. 1988