

Paradoxe Sanduhren

Christian Ucke und Hans-Joachim Schlichting

Obschon uralte Bekannte, lassen sich auch bei Sanduhren noch überraschende Konstruktionen realisieren. Bei einer Ausführung läuft der 'Sand' von unten nach oben - die Zeit aber nicht rückwärts. Bei einem anderen Modell vergißt sie etwas - und erinnert sich wieder.

Wer würde vermuten, daß Sanduhren erst seit dem Mittelalter bekannt sind? Grundsätzlich hätten sie auch schon im Altertum erfunden werden können. Jedoch ist derartiges nicht überliefert. Zu einem Zentrum der Sanduhrherstellung mit eigenen Zünften entwickelte sich im 17. Jahrhundert Nürnberg, u.a. weil dort ein sehr geeigneter Sand vorkam. Die Herstellung des 'richtigen' Granulats fand nach komplizierten Rezepten statt [1].

Die mechanische Uhr mit Uhrwerk löste die Sanduhr als Zeitmesser im 19. Jahrhundert fast gänzlich ab. In Kirchen und Gerichtssälen hielt sie sich noch eine Zeitlang als traditionelles Gerät zur Begrenzung der Redezeit. Auf Schiffen blieben sie lange in Verwendung. Heute ist sie allenfalls als Eier- oder Saunauhr bzw. als Dekorationsgegenstand in Gebrauch. Dennoch gilt sie immer noch als klassischer Zeitmesser. Sie findet sich als Symbol für die Vergänglichkeit des Lebens in künstlerischen Darstellungen. Und sie fasziniert seit jeher Kinder und jetzt auch wieder Physiker und Ingenieure. Die Prozesse beim Durchlaufen des Sandes durch eine enge Öffnung und der so banal aussehende Sandhaufen, der sich darunter bildet sind Gegenstand aktueller Forschung [2], die zur Chaosforschung und zur Analyse von Vielteilchensystemen Verbindung hat. Dies hier auch nur andeutungsweise darzustellen, übersteigt aber den Rahmen dieses Artikels. Wir möchten vielmehr einige besondere Sanduhren vorstellen, die durchaus klassisch zu beschreiben sind.

Ein in vielen physikalischen Praktika vorhandenes Standardexperiment besteht darin, kleine Kügelchen in einem flüssigkeitsgefüllten Zylinder nach unten sinken zu lassen. Der Innenradius des Zylinders ist erheblich größer als der Kugeldurchmesser. Aus den leicht meßbaren Parametern Kugeldurchmesser, Dichte von Kugel und Flüssigkeit sowie Sinkgeschwindigkeit wird die Viskosität der Flüssigkeit bestimmt [3].

Kugeln mit einer Dichte, die kleiner als die der umgebenden Flüssigkeit ist, steigen nach oben. Das ist das Grundprinzip der paradoxen Sanduhr, bei der der aus

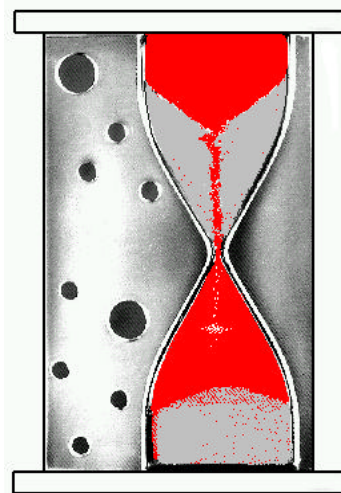


Abb.1: Bei dieser Sanduhr läuft der 'Sand' von unten nach oben. Der 'Sand' besteht aus kleinen und leichten Plastik Kügelchen, die in einer dichteren Flüssigkeit aufsteigen

kleinen Plastikkügelchen bestehende 'Sand' von unten nach oben läuft. Da die Viskosität von Flüssigkeiten stark von der Temperatur abhängt und die Kügelchen unterschiedliche Durchmesser aufweisen, läßt sich nur ein Näherungswert von etwa 15 Minuten für die Durchlaufzeit angeben.

Eine genauere Beobachtung ergibt, daß bei normaler, senkrechter Stellung ein relativ dicker und nicht sehr gleichmäßiger Strom von Kügelchen aufsteigt. Es bilden sich kleinere und größere Pulks. Sie formen insgesamt einen Kanal von mitgerissener Flüssigkeit. Die Kügelchen müssen durch die enge Öffnung nach oben und nehmen aufgrund der Zähigkeit der Flüssigkeit etwas davon mit sich, während gleichzeitig Flüssigkeit ausgleichend nach unten fließt. In der Öffnung kommt es offenbar zu einer Art intermitterendem Fließverhalten. Derartiges ist auch von normalen Sanduhren bekannt, wobei das Verhältnis Korngröße zum Durchmesser der Durchflußöffnung ein kritischer Parameter ist. Die Luft hat zwar eine viel geringere, dennoch nicht vernachlässigbare Zähigkeit. Während der Sand durch die Öffnung rinnt, entsteht im oberen Teil der Sanduhr ein leichter Unterdruck und es bilden sich Sandkornbrücken, die wieder in sich zusammenfallen, sobald die Druckdifferenz wieder abgebaut ist. Insgesamt kann das zu periodischem Fließverhalten führen [4].

Läßt man bei der paradoxen Sanduhr nur einige Kügelchen nach oben laufen und hält sie dann quer, kann man ganz gut einzelne Kügelchen langsam aufsteigen sehen. In diesem Fall kann man für einzelne Kügelchen sogar halbwegs quantitativ die Steiggeschwindigkeit abschätzen (siehe Informationskasten).

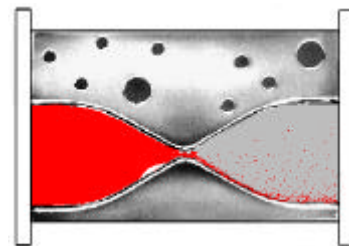


Abb.2: Bei einer quergehaltenen Sanduhr lassen sich einzelne Kügelchen beim Aufsteigen verfolgen

Hat man die Sanduhr gerade umgedreht, so daß die Kügelchen in den oberen Teil gerade hochzusteigen beginnen, sieht man mehr oder weniger deutlich im unteren, noch fast ganz mit Kügelchen angefüllten Teil ein 'Loch' nach unten wandern. Physiker könnten hier an das Wandern eines Defektelektrons in einem Halbleiter denken. Eine weitergehende Interpretation scheint aber nicht ergiebig.

Die typisch akademische und unter Physikerkollegen häufig kontrovers diskutierte Frage, ob eine normale Sanduhr im Grundzustand (d.h. wenn sich der ganze Sand unten befindet) mehr, gleich oder weniger als im stationären Bewegungszustand (d.h. während des Fallens vom Sand) wiegt, wird in der Literatur [5] behandelt: demnach wird sie schwerer! Zunächst liegt die Annahme nahe, daß sie gleich schwer bleibt, weil der Verlust an Gewicht durch das fallende und während dieser Fallzeit nicht zum Gewicht beitragende Sandkorn im zeitlichen Mittel gerade wieder ausgeglichen wird durch die beim Auftreffen des Kornes im unteren Teil der Sanduhr bewirkte Kraft [6, 7]. Diese Betrachtung vernachlässigt aber, daß das in der Öffnung losfallende Sandkorn aufgrund des oben dauernd nachrutschendes Sandes schon eine endliche, wenn auch sehr kleine Anfangsgeschwindigkeit aufweist. Und das wirkt sich so aus, daß das zeitliche Mittel der Kraft beim Auftreffen des Kornes unten größer ist als der Gewichtsverlust während des Fallens. Eine Wechselwirkung des fallendes Sandkornes mit der Luft ist hier nicht

berücksichtigt. Dürfen wir dem Leser die Diskussion dieser Frage für den Fall der paradoxen Sanduhr überlassen?

Ein weiteres Beispiel für ein verblüffendes Phänomen stellt die 'vergeßliche' oder 'ungehorsame' Sanduhr dar [8, 9]. In einen wassergefüllten Zylinder (Abbildung 3) ist eine normale Sanduhr eingelassen. Der Außendurchmesser der Sanduhr ist einige Millimeter kleiner als der Innendurchmesser des Zylinders. Sie schwebt im Ruhezustand am oberen Rand des Zylinders. Der ganze Sand befindet sich im unteren Teil der Sanduhr.

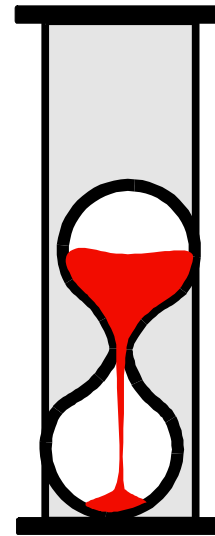


Abb.3: Die vergeßliche Sanduhr steckt in einem wassergefüllten Zylinder und befindet sich normalerweise wegen des Auftriebs oben. Stellt man den Zylinder auf den Kopf, bleibt die Sanduhr aber zunächst unten. Erst nach einer Weile schwebt sie wieder hoch.

Dreht man nun den Zylinder um, bleibt die Sanduhr zunächst unten, während der Sand schon rinnt. Erst wenn etwa die Hälfte des Sandes durchgelaufen ist, steigt die Sanduhr hoch. Oben läuft dann der Rest des Sandes durch.

Wieso bleibt die Sanduhr zunächst unten und steigt nicht gleich hoch?

Die innen befindliche Sanduhr hat insgesamt eine etwas geringere mittlere Dichte als die von Wasser. Dadurch erhält die Sanduhr einen Auftrieb und schwimmt nach oben.

Dreht man die Sanduhr in der beschriebenen Weise um, befindet sich zunächst noch fast der gesamte Sand in der oberen Hälfte. Der Schwerpunkt der Sanduhr liegt entsprechend oberhalb der Mitte

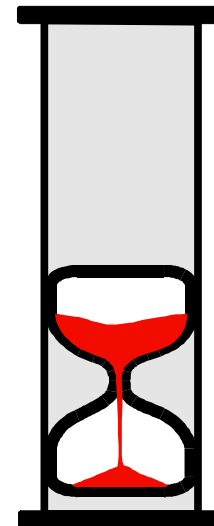


Abb.4: Eine in einem engen Zylinder befindliche Sanduhr gleicht prinzipiell dem Aufbau eines Kugelfallviskosimeters.

Wäre die Sanduhr nicht im engen Zylinder sondern im freien Wasser, würde sie sich sofort umdrehen. Im engen Zylinder stößt sie aber an die Innenwand des Zylinders. An dieser Stelle wirkt Haftreibung und verhindert das sofortige Hochschwimmen der Sanduhr. Erst wenn etwa die Hälfte des Sandes durchgelaufen ist, liegt der Gesamtschwerpunkt unterhalb der Mitte. Die Haftreibung an den Seitenwänden ist dann aufgehoben, da kein verkippendes Drehmoment mehr auf die Sanduhr wirkt. Die Sanduhr kann hochschwimmen.

Für die Herstellung der Sanduhr müssen die Maße und die Eigenschaften der verwendeten Teile aufeinander abgestimmt werden. Der Innendurchmessers des Zylinders, der Außendurchmessers der Sanduhr, Volumen und Masse der Sanduhr, Dichte der Flüssigkeit und entsprechende Reibungsbeiwerte werden experimentell ermittelt. Eine Anleitung zum Selbstbau ist in [9] enthalten.

Bei einem dritten Beispiel einer ungewöhnlichen Sanduhrkonstruktion befindet sich eine zylinderförmig ausgebildete Sanduhr in einem wassergefüllten Zylinder (Abbildung 4). Hier ist jedoch der Außendurchmesser der Sanduhr nur geringfügig kleiner als der Innendurchmesser der Zylinder, so daß die Sanduhr auf Grund der Viskosität sehr langsam im Zylinder aufsteigt bzw. niedersinkt. Unter der Bezeichnung 'Floating Sand Timer' war sie vor einiger Zeit im Handel erhältlich. Sie ist auch leicht selbst nachzubauen. Prinzipiell funktioniert auf diese Weise das sogenannte Kugelfallviskosimeter, bei dem aus der Fallzeit einer Kugel in einem Zylinder auf die Viskosität einer Flüssigkeit geschlossen wird. Im Gegensatz zum anfangs beschriebenen Standardexperiment ist hier der Kugeldurchmesser nur wenig kleiner als der Innendurchmesser des Zylinders. Daß in diesem Beispiel eine Sanduhr als fallendes Objekt verwendet wird, ist eigentlich gänzlich unwichtig. Es betont den langsam ablaufenden Vorgang zusätzlich.

Literatur:

- [1] Lübke, Anton: Das große Uhrenbuch, Verlag Ernst Wasmuth, Tübingen 1977
- [2] Herrmann, H.J.: Die wunderbare Welt der Schüttgüter. Phys. Bl. **51** (1995), 1083-1086
- [3] Walcher, W.: Praktikum der Physik, Verlag B.G. Teubner, Stuttgart
- [4] Wu, X. et al.: Why Hour Glasses Tick, Phys. Rev. Lett. **71** (1993), No.9, 1363-1366
- [5] Shen, K.Y., Scott, B.L.: The hourglass problem, American Journal of Physics **53** (1985), 787-788
- [6] Reid, W.P.: Weight of an Hourglass, American Journal of Physics **35** (1967), 351-352
- [7] R.R.: Rätselecke, Physik und Didaktik (1987), 80-81
- [8] Gardner, M.: Mathematical Games, Scientific American **215** (1966), August, 96ff
- [9] Treitz, N.: Spiele mit Physik, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main

Die paradoxe Sanduhr ist erhältlich im Versand in der Physik-Boutique, Stark-Verlag, Postfach 1852, 85318 Freising, <http://www.stark-verlag.de/> bzw. im 'Science and Fun Shop', Spektrum der Wissenschaft, Vangerowstr. 20, 69115 Heidelberg, <http://www.spektrum.de/science.html> bzw. in manchen Werbemittelkatalogen. Die vergeßliche Sanduhr findet man ebenfalls in der Physik-Boutique bzw. in manchen 'Science Läden'.

Informationskasten:

Im wesentlichen hängt die Geschwindigkeit des Sinkens bzw. Steigens von Kugeln in einer Flüssigkeit vom Dichteunterschied zwischen Kugelmaterial und Flüssigkeit, vom Durchmesser der Kugeln und von der Zähigkeit der Flüssigkeit ab. Die Zähigkeit von Flüssigkeiten ist wiederum stark temperaturabhängig.

Für die die Steiggeschwindigkeit v von einzelnen Kugeln (Radius r ; Dichte ρ_k) in einer Flüssigkeit (Dichte ρ_f ; Zähigkeit η) unter idealen Bedingungen (laminare Strömung; keine Randeffekte) gilt [3]:

$$v = \frac{2r^2 g(\rho_k - \rho_f)}{9\eta} \quad g = 10 \text{ m / s}^2$$

Die Radien der Kugeln variieren zwischen 0,15 bis 0,3mm. Geht man von $\rho_k \approx 1,05\text{g/cm}^3$ (Polystyrol), $\rho_f \approx 1,35\text{g/cm}^3$ (z.B. adäquate Mischung aus CaCl_2 und Wasser) und $\eta = 6 \text{ mPas}$ aus, ergibt sich $v \approx -0,25\text{cm/s}$ bis -1cm/s ; das Minuszeichen hier bedeutet, daß die Kugeln aufsteigen. Beobachten kann man in der Querstellung der Sanduhr für die kleinen Kugeln Steiggeschwindigkeiten zwischen 0,1 cm/s bis 0,5 cm/s. Das ist im Hinblick auf die zum Teil unsicheren Werte ein ganz passables Ergebnis. Die Anwendbarkeit der Formel ist auf Reynoldszahlen $Re < 1$ beschränkt. Für das Beispiel der Kugel mit $r = 0,3\text{mm}$ ergibt sich $Re = r \cdot \rho_f \cdot v / \eta = 0,67$. Das bedeutet tatsächlich laminare Strömungsverhältnisse.