

Fraktales Wachstum

am Beispiel der fingerartigen Durchdringung zweier Flüssigkeiten

H. Joachim Schlichting . Universität GHS Essen

*Auf der Grenze liegen immer die
seltsamsten Geschöpfe*

G.CHR. LICHTENBERG

Neue Blicke durch die alten Löcher

Eines der wesentlichen Ziele der klassischen Physik ist die Formalisierung des natürlichen Geschehens, um darauf aufbauend exakte Vorhersagen treffen zu können: "Aus seinen Formeln liest (der Physiker, HJS) Weissagungen ab" (G.CHR. LICHTENBERG). Bei der Formalisierung spielen geometrische Methoden, insbesondere euklidische Formen eine hervorragende Rolle. GALILEI sieht in der Geometrie die Sprache der Natur: "Die Philosophie ist in dem großen Buch der Natur niedergeschrieben, das immer offen vor unseren Augen liegt, dem Universum. Aber wir können es erst lesen, wenn wir die Sprache erlernt und uns die Zeichen vertraut gemacht haben, in denen es geschrieben ist. Es ist in der Sprache der Mathematik geschrieben, deren Buchstaben Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren sind; ohne diese Mittel ist es dem Menschen unmöglich, auch nur ein einziges Wort zu verstehen" [1].

Viele Systeme sind aber weder durch euklidische Formen beschreibbar noch ist ihr Verhalten exakt vorhersagbar: Daß beispielsweise das Wesentliche eines Baumes nicht durch einen Kegel oder eine Kugel erfaßt werden kann, merkt man spätestens dann, wenn man aufgrund solcher Charakterisierungen etwa die Gestalt einer Eiche von der einer Buche unterscheiden soll, eine Aufgabe, die der Mensch ohne wissenschaftliche Hilfsmittel mit Leichtigkeit erfüllen kann. Auch die Frage nach der Vorhersage des Wachstums eines konkreten Baumes erscheint vor diesem Hintergrund unangemessen, obwohl man "irgendwie" weiß, wie eine sich entwickelnde Buche einmal aussehen wird.

Wenn es um die Entwicklung von komplexen Systemen wie dem eines Baums geht, müssen offenbar neue Fragen gestellt werden. Oder wie G.CHR. LICHTENBERG es einmal ausgedrückt hat: Es müssen "neue Blicke durch die alten Löcher" getan werden. Eine Idee eines solchen Blicks gewinnt man, wenn man dem obigen Zitat GALILEIS die

lapidare Feststellung BENOIT MANDELBROT's gegenüberstellt:

"Wolken sind keine Kugeln, Berge keine Kegel, Küstenlinien keine Kreise. Die Rinde ist nicht glatt und auch der Blitz bahnt sich seinen Weg nicht gerade" [2]. Diesem Blick liegt letztlich nicht weniger als eine völlig neuartige Geometrie zugrunde, die fraktale Geometrie der Natur.

Nachdem wir an anderer Stelle den ideengeschichtlichen Hintergrund des "fraktalen Blicks" aufgezeigt haben [3], soll er im folgenden ganz konkret in Form eines einfachen Experimentes getan und damit die Möglichkeit einer Annäherung an die fraktale Geometrie im Rahmen der Schulphysik skizziert werden.

Viskoses Verästeln

Durchdringung statt Verdrängung

Was passiert, wenn man versucht, eine Flüssigkeit mit Hilfe einer anderen Flüssigkeit unterschiedlicher Viskosität zu verdrängen? Die einfachste Möglichkeit besteht darin, daß die eine Flüssigkeit die andere Flüssigkeit auf breiter Front vor sich herschiebt. Dies ist auch tatsächlich der Fall, wenn die verdrängte Flüssigkeit eine geringere Viskosität besitzt als die Flüssigkeit, von der sie verdrängt wird. Im umgekehrten Fall, wenn die zu verdrängende Flüssigkeit von größerer Viskosität ist, wird die Grenze zwischen den Flüssigkeiten hydrodynamisch instabil. Anstatt die "klebrige", schwer verschiebbare viskosere Flüssigkeit auf breiter Front vor sich herzutreiben, bricht die weniger viskose Flüssigkeit in Form fingerartiger Kanäle in die erstere hinein. Diese Kanäle entstehen an Stellen, an denen durch zufallsbedingte

Schwankungen bereits kleinste Einbuchtungen bestehen. Mit zunehmender Länge der so vorangetriebenen Finger wächst erneut eine glatte Grenzschicht zwischen beiden Flüssigkeiten heran, von der dann ebenfalls an entsprechenden Störstellen seitliche Abzweigungen und Verästelungen ausgehen usw.

Den Fingern wachsen gewissermaßen Finger, denen Finger wachsen und so immer weiter., so ähnlich wie in einem von dem Mathematiker A. DE MORGAN umgeformten Scherzvers J.SWIFTs:

*Große Flöhe haben kleine Flöhe,
Die sie kräftig beißen,
Und die kleinen noch viel klein're Flöhe,
Und so immer weiter.
Die großen Flöhe haben leider
Auch größere, die sie nicht schonen,
Und die größern- es wird heiter-
Immer noch größere bewohnen.*

Dem "und so immer weiter" sind jedoch im einen wie im anderen Fall enge Grenzen gesetzt.

Die Flüssigkeiten verdrängen sich also nicht, sondern durchdringen sich nach dem soeben beschriebenen Muster fingerartiger Verästelungen. Dieser Entstehungsgeschichte der fingerartigen Strukturen zufolge ist jeder kleinere Ausschnitt jedem größeren Ausschnitt und dieser der Gesamtstruktur ähnlich. Das fingerartige Gebilde ist selbstähnlich und skaleninvariant, also ein Fraktal.

Verästeln in zwei Dimensionen

Entscheidend für die Form der entstehenden Fraktale ist die Viskosität der beteiligten Flüssigkeiten. Man spricht daher auch von viskosem Verästeln. Für die Schulphysik ist das viskose Verästeln insofern interessant, als es eine einfache experimentelle Darstellung fraktaler Gebilde ermöglicht: Dazu werden die beiden unterschiedlich viskosen Flüssigkeiten nacheinander in den sehr engen Zwischenraum zweier übereinanderliegender durchsichtiger Platten (z.B. Glas oder Plexiglas) gepreßt. Auf diese Weise kann das Phänomen des viskosen Verästeln auf zwei Dimensionen beschränkt werden, was eine gute Beobachtung des Wachstums der fraktalen Gebilde sowie eine einfache Auswertung der so entstandenen Bilder ermöglicht.

Konstruktion einer Hele- Shaw- Zelle

Die Herstellung einer solchen aus zwei Platten bestehenden Zelle (nach ihrem Erfinder S. HELE - SHAW) Hele- Shaw- Zelle genannt, ist relativ einfach (Abb. 1). Dazu werden z.B. zwei quadratische Plexiglasplatten (Seitenlänge 40 cm, Dicke 1,5 cm) an den vier Ecken (etwa 2 cm vom Rand entfernt) mit Löchern versehen und mit Hilfe von Schrauben zusammengehalten (Flügelschrauben ermöglichen die schnelle Demontage und Montage). In der Mitte der oberen Platte wird ein weiteres Loch gebohrt, durch das die Flüssigkeiten zwischen die Platten gepreßt werden sollen. Dazu versieht man das Loch mit einem Ansatzstück über das ein kurzes Schlauchende gestülpt wird. Mit Hilfe einer Einwegspritze,

die ihrerseits in das freie Schlauchende geschoben wird, lassen sich dann mit Druck die Flüssigkeiten nacheinander zwischen die Platten pressen.

Versuchsdurchführung

Als erstes wird Flüssigkeit mit der größeren Viskosität zwischen die Platten gebracht. Dazu füllt man die Einwegspritze mit der Flüssigkeit, und preßt sie durch den Schlauch in den engen Zwischenraum der beiden Plexiglasplatten der Hele- Shaw- Zelle. Dadurch bildet sich zunächst ein völlig unstrukturierter kreisrunder Fleck um die Einspritzöffnung. Wenn der Fleck so groß ist, daß er fast die Ränder der quadratischen Platten erreicht hat, wird die Spritze vorsichtig abgezogen. Unmittelbar anschließend

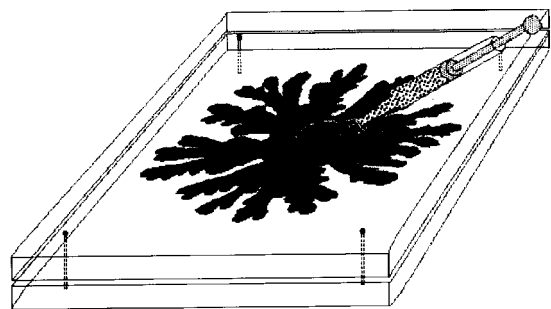


Bild 1 Hele- Shaw- Zelle, bestehend aus zwei aufeinander-geschraubten Plexiglasplatten, zwischen die mit Hilfe einer Einwegspritze Flüssigkeiten gepreßt werden.

wird eine weitere vorher präparierte Einwegspritze mit der zweiten Flüssigkeit auf den Schlauch gestülpt. Dabei muß verhindert werden, daß Luft in den Schlauch gelangt. Jetzt wird die zweite Flüssigkeit zwischen die Platten gepreßt. Sie verschafft sich in dem bereits zwischen den Platten erzeugten Fleck der ersten Flüssigkeit unter Bildung eines für die Durchdringung der beiden Flüssigkeiten charakteristischen Verästelungsmusters Platz (Abb. 2 - 5).

Um dieses Muster möglichst über einen längeren Zeitraum zu erhalten, empfiehlt es sich, mit dem Hineinpressen der zweiten Flüssigkeit aufzuhören, bevor die Verästelungen in die Nähe des von der ersten Flüssigkeit bedeckten Bereichs gelangt. Andernfalls kann es passieren, daß die zweite Flüssigkeit Abflußkanäle zum Plattenrand bildet und die bereits gebildete Struktur zerstört wird.

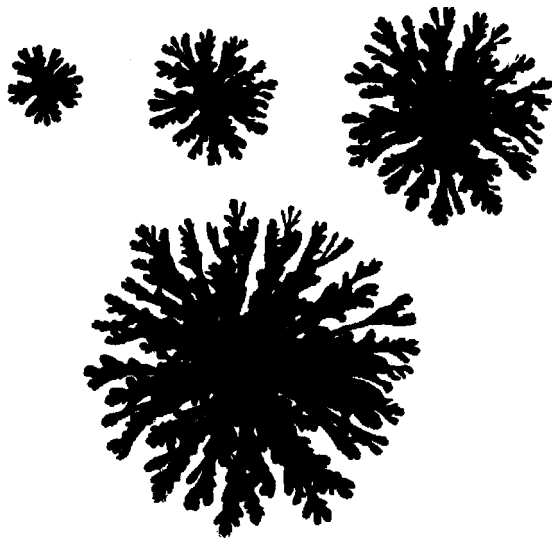


Bild 2: Verschiedene Wachstumsstadien von Hele-Shaw-Fraktalen, die bei der Injektion von gefärbtem Wasser in flüssige Seife entstehen. Auffallend ist die strukturelle Ähnlichkeit zwischen den einzelnen Bildern. Wenn der Versuch mit neuen Flüssigkeiten wiederholt werden soll, wird die Hele-Shaw-Zelle auseinandergeschraubt, sorgfältig von den Flüssigkeitsresten gereinigt und anschließend wieder zusammengeschaubt.

Interessant ist noch, daß die Strukturbildung teilweise reversibel ist. Das heißt, wenn man den Kolben der Spritze wieder ein wenig zurückzieht, wird die Flüssigkeit aus den bereits gebildeten Kanälen in die Spritze zurückgezogen, und die andere Flüssigkeit nimmt diesen Bereich ein.

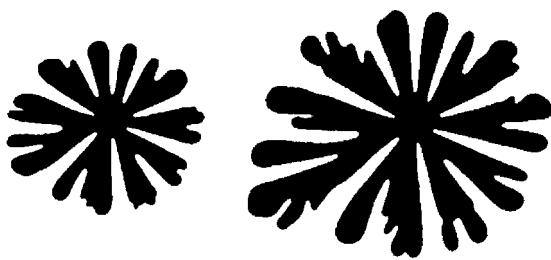


Bild 3: Zwei Wachstumsstadien der Entwicklung eines Hele-Shaw-Fraktals, das durch Injektion von gefärbtem Wasser in Rizinusöl entsteht.

Um die entstehenden Muster in den verschiedenen Wachstumsphasen zu dokumentieren, kann die Hele-Shaw-Zelle von unten ausgeleuchtet und von oben fotografiert werden. Beim Auseinanderziehen der Platten werden die Strukturen übrigens nicht sofort zerstört, sondern durchlaufen andere, teilweise ebenfalls interessante Muster, die eine eigene Betrachtung wert wären. Sie kommen dadurch zustande, daß mit der Trennung der Platten Luft in den mit den Flüssigkeiten ausgefüllten Zwischenraum eindringt. Dieser Vorgang erfolgt nach einem ganz ähnlichen Durchdringungsmechanismus wie bei den

Flüssigkeiten. Der äußere Luftdruck treibt von den Seiten beginnend fein verästelte "Kanäle" in die Flüssigkeitsschicht, wodurch das Flüssigkeitsfraktal durch ein Gas-Flüssigkeitsfraktal überlagert wird.

Sehr schöne solcher Muster lassen sich übrigens mit Hilfe von verschiedenen Fetten, also extrem viskosen Flüssigkeiten zwischen zwei Platten erzeugen. Sie haben den Vorteil, nach Trennung der Platten erhalten zu bleiben. Vorformen solcher Fettfraktale kann man zuweilen beim Frühstück kennenlernen, wenn man beispielsweise zwei mit Butter bestrichene "zusammengeklappte" Scheiben Brot wieder auseinanderzieht, weil man den Aufschnitt vergessen hat.

Beispiele

Im folgenden werden einige Beispiele von viskosen Verästelungen dokumentiert. Die Bilder sind gescannte Fotografien von Hele-Shaw-Mustern.

In Abb. 2 sind vier verschiedene Wachstumsstadien eines fraktalen Musters dargestellt, wie es sich typischerweise ausbildet, wenn man zunächst flüssige Seife zwischen die Platten preßt und anschließend (z.B. mit Kaliumpermanganat gefärbtes) Wasser injiziert. Die Selbstähnlichkeit von Bildausschnitten ist auffallend. In Abb. 3 sind zwei Wachstumsstadien von gefärbtem Wasser in Rizinusöl dargestellt.

Auch hier ist die Selbstähnlichkeit der beiden Bilder auffallend. Ohne es im einzelnen genau beschreiben zu können, fällt sofort der Unterschied zu den Flüssige-Seife-Wasser-Fraktalen in Abb. 2 auf. Ganz allgemein kann man feststellen, daß die Zerklüftung dieses Fraktals weniger ausgeprägt ist als in Abb. 2.

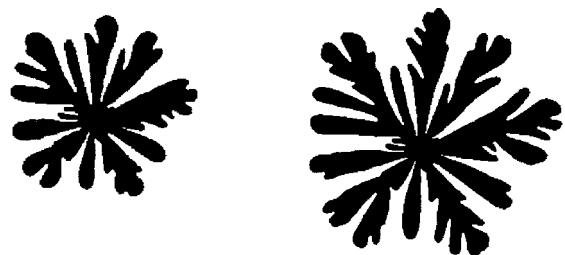


Bild 4 Zwei Wachstumsstadien eines Hele-Shaw-Fraktals, das durch Injektion von Wasser in Olivenöl entsteht. Die Ähnlichkeit mit den Rizinus-Ölivenöl-Fraktalen aus Abb. 3 bringt die Ähnlichkeit der Viskositäten der Öle zum Ausdruck.

Injiziert man Wasser in Olivenöl, so ergeben sich fraktale Strukturen, die in ihrem Zerklüftungsgrad den Rizinus-Wasser-Fraktalen ähneln. Darin drückt sich die Tatsache aus, daß sich die Viskositäten von Rizinusöl und Olivenöl nur geringfügig unterscheiden.

Schließlich sei das Verästeln am Beispiel einer sehr

viskosen Flüssigkeit, nämlich Getriebeöl (SAE 90), demonstriert, in die wiederum gefärbtes Wasser injiziert wird. Die bereits in den bisherigen Beispielen festgestellte Tendenz einer Abnahme des Zerklüftungsgrades mit der Viskosität setzt sich hier fort (Abb. 5). Außerdem nimmt die Abweichung von der kreisförmigen Grundform zu.

Beschreibung der Hele- Shaw- Fraktale

Bei dem Versuch, die unterschiedlichen Hele-Shaw- Fraktale vergleichend zu betrachten, stellt man ähnliche Probleme fest, wie etwa beim Vergleich von Bäumen: Obwohl wir durch bloßes Hinschauen beispielsweise eine Birke von einer Buche unterscheiden können, geraten wir in fast unüberwindliche Schwierigkeiten, wenn wir den Unterschied exakt beschreiben sollten. Ganz ähnlich verhält es sich mit den Hele- Shaw- Fraktalen. Die charakteristische Struktur, das Gattungsmäßige, läßt sich unmittelbar intuitiv erfassen. Man wird trotz unterschiedlicher Größe und konkreter Ausgestaltung der Strukturen sofort eine gattungsmäßige Zuordnung in den abgebildeten Bildern finden, ohne genau angeben zu können, auf welchen Entscheidungen die Zuordnung beruht. "Das Gattungsmäßige kann intensiver sein als das Konkrete" hat JORGE LUIS BORGES in einer seiner auch in naturwissenschaftlicher Hinsicht beziehungsreichen Erzählungen gesagt. Damit wird vielleicht das naturwissenschaftliche Interesse an Fraktalen auf den Punkt gebracht. Man interessiert sich nicht mehr für konkrete Details, sondern bemüht sich, die Gestalt, die Form, also das Gattungsmäßige einer Struktur zu bestimmen.

Im Sinne einer quantitativen Erfassung des Gattungsmäßigen der Fraktale ist die sogenannte fraktale Dimension von Bedeutung [3]. Sie läßt sich für die vorliegenden Beispiele von Hele- Shaw- Fraktalen folgendermaßen bestimmen: Man geht von dem für Fraktale charakteristischen Zusammenhang zwischen Masse M (Zahl der Teilchen, bzw. Pixel der gescannten Hele- Shaw- Bilder) eines (Flächenausschnitts der Größe R (konzentrische Kreisscheiben um den Ursprung vom Radius R) und der fraktalen Dimension D , $M \propto R^D$, aus, der unabhängig von R gilt. Dazu trägt man die Größe R der Flächenausschnitte gegen die jeweilige Masse der Flächenausschnitte (Zahl der Teilchen) doppeltlogarithmisch auf. Die Steigung der die Punkte verbindenden Ausgleichsgeraden liefert dann den Wert der Dimension. Sie beträgt beispielsweise für das Olivenöl- Wasser- Fraktal 1,82, für das Rizinus- Wasser- Fraktal 1,83 und für das Getriebeöl- Wasser- Fraktal 1,87.

Geht man davon aus, daß die Natur in vielen Fällen so ökonomisch wie unter den jeweiligen Bedingun-

gen möglich verfährt (vgl. auch das Prigoginesche Prinzip der minimalen Entropieproduktion [5]), so erfährt das Verhalten des viskosen Verästeln an dieser Stelle eine tiefere Begründung. Die Dissipation von Energie, die mit der flächenhaften Verschiebung der stärker viskosen Flüssigkeit verbunden wäre, ist größer als die Dissipation, die mit dem fingerartigen Verästeln einhergeht. Denn in diesem Fall ist die Verschiebung weniger als flächenhaft.

Viskoses Verästeln- l'art pour l'art?

Die Hele- Shaw- Fraktale üben einen ästhetischen Reiz auf den Betrachter aus. Wen wundert es da, daß ähnliche Gebilde Eingang in die bildende Kunst gefunden haben, wie man beispielsweise an dem Werk "La Gerbe" von HENRI MATISSE erkennen kann [6]. MATISSE dürfte wohl kaum durch Experimente mit Hele- Shaw- Zellen dazu inspiriert worden sein. Überraschenderweise zeigt sich, daß diese Gebilde in etwa dieselbe fraktale Dimension besitzen, was für einen einheitlichen Pinselstrich des Künstlers zu sprechen scheint.

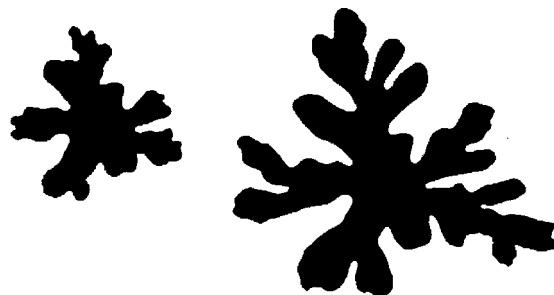


Bild 5: Zwei Wachstumsstadien eines Hele- Shaw- Fraktals, das durch Injektion von Wasser in sehr viskoses Getriebeöl entsteht. Deutlich zu erkennen ist der geringe Zerklüftungsgrad aufgrund der hohen Viskosität.

Das Hele- Shaw- Verfahren stellt außerdem eine einfache Möglichkeit dar, mit einfachen Mitteln Fraktale herzustellen und an ihrem Beispiel allgemeine Eigenschaften von Fraktalen und der fraktalen Geometrie der Natur kennenzulernen. Praktische Anwendungen der Untersuchungsergebnisse des viskosen Verästeln gibt es aber auch schon. Genannt sei hier das Beispiel der Erdölförderung durch Austreiben des Öls mit Hilfe von Hochdruck-Wasserinjektionen. Die Ineffektivität dieser Methode ist lange nicht verstanden worden. Wenn man sich aber im Sinne der vorliegenden Ausführungen vor Augen führt, daß sich das in das Erdöl injizierte Wasser eng begrenzte verästelte Pfade durch das Öl bahnt, anstatt das Öl auf breiter Front vor sich herzuschieben, wird die Ineffektivität verständlich. Schuld ist die geringe Viskosität des Wassers. Sind die Wasserkanäle von der Injektionsstelle zum Förderloch erst einmal durchgebrochen, so geht die

Ölausbeute drastisch zurück. Abhilfe hat man damit schaffen können, daßman dem Wasser viskositäts erhöhende Polymere zugefügt hat. Aufgrund dieser Maßnahme gelingt es weitgehend, das Öl durch eine geschlossene Wasserfront zum Förderloch zu treiben und die Ausbeute drastisch zu erhöhen.

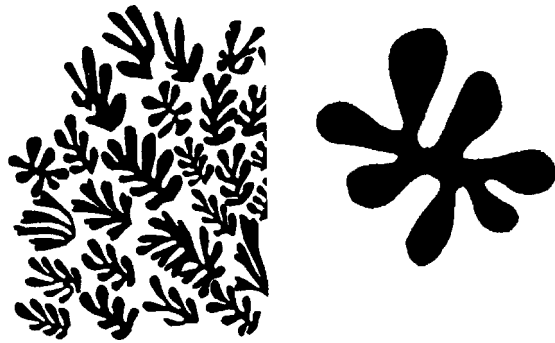


Bild 6: Gescante Ausschnitte aus Henri Matisse "la Gerbe 1953" (Entwurf für eine Keramik).

Literatur

[1] GALILEI, G.: Saggiatore 1623; z.n. BLUMENGERG, H.: Galileo Galilei. Siderius Nuncius. Nachricht von den Sternen. Frankfurt: Suhrkamp 1980.

[2] MANDELBROT, B.: Die fraktale Geometrie der Natur. Basel etc.: Birkhäuser 1987.

[3] SCHLICHTING, H.J.: Schöne fraktale Welt. Annäherungen an ein neues Konzept der Naturwissenschaften. Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht 45/4, 202- 214 (1992).

[4] NORDMEIER, V.: Fraktale in der Physik- Experimentelle Untersuchungen. Osnabrück 1990, unveröff. Eine Zusammenfassung dieser Staatsexamensarbeit erscheint demnächst in Praxis der Naturwissenschaften- Physik. Die abgebildeten Hele-Shaw- Fraktale wurden dieser Arbeit entnommen.

[5] I. PRIGOGINE, I. STENGERS: Dialog mit der Natur. München 1983.

[6] P. SCHNEIDER: Matisse. München: Prestel 1984, S.700.

Die LICHTENBERG- Zitate wurden den Sudelbüchern entnommen.