

# Flußnetzwerke

## - Strukturbildung in der natürlichen Umwelt -

Volkhard Nordmeier, Claus Zeiger und Hans Joachim Schlichting  
Universität - Gesamthochschule – Essen

Das wohl bekannteste und größte existierende natürliche Flußnetzwerk der Erde ist der Amazonas mit seinen Zuflüssen (vgl. Abb.1). Aber auch Strukturen, wie sie bei der Entwässerung von Landschaftsgebieten entstehen – man denke beispielsweise an Priele im Wattenmeer oder durch Erosion hervorgerufene Abflußmuster -, zeichnen sich durch eine typischerweise hierarchisch verzweigte, fraktale Struktur aus.



Abb.1: Beispiel eines Real-Flußnetzwerkes: der Amazonas und seine Zuflüsse.

Im Rahmen einer thermodynamischen Beschreibung lassen sich derartige Entwässerungs-Netzwerke als offene, von Energie durchflossene und als **(dissipative) stationäre Nichtgleichgewichtssysteme (Fließgleichgewichte)** charakterisieren (vgl. z.B. [1]). Unter Anwendung des *Prigogineschen Extremalprinzips* (der minimalen Entropieerzeugung) ist zu erwarten, daß die Strukturbildung in einem selbstorganisierten Prozeß stattfindet, bei dem die **Energiedissipationsrate** beim Abfließen des zugeführten Wassers (im Laufe der Zeit) **minimiert** wird (vgl. [2]-[4]).

### Flußnetzwerke als ‘optimale’ Fließgleichgewichte

Zur Untersuchung und zur Visualisierung der Musterbildung bei Flußnetzwerken und der dabei ablaufenden Optimierungsprozesse wurde ein Computerprogramm implementiert, das mit einfachen Mitteln das oben beschriebene Verhalten simuliert: Ein Flußnetzwerk wird zufällig erschaffen und unter Minimierung der Energiedissipationsrate bis zu einem Optimum hin verändert. Die simulierten Netzwerke ähneln dabei in erstaunlich realistischer Weise den Strukturen natürlicher Flußnetzwerke (vgl. Abb.5 u. Abb.6).

Modelliert man ein Flußnetzwerk im Fließgleichgewicht, so muß die fortwährende Entwässerung durch gleichmäßige und dauerhafte Berieselung (z.B. in Form von ‚Regen‘) ausgeglichen werden. Dieser Ansatz steht in direkter Analogie zum wohl bekanntesten Beispiel eines Fließgleichgewichtssystems: einer Badewanne mit offenem Ab-

fluß, bei der durch ständigen Zufluß die pro Zeiteinheit abfließende Wassermenge ausgeglichen und so der Wasserspiegel konstant gehalten wird.

### **Abschätzung der Energiedissipationsrate**

Die dem Netzwerk durch die Berieselung zugeführte potentielle Energie wird während des Abfließens in kinetische Energie umgewandelt und dabei zu einem Teil (z.B. in Form von Reibung mit dem ‚Flußbett‘) dissipiert.

Im einfachsten Ansatz läßt sich die Energiedissipation  $E_{diss}$  als proportional zur potentiellen Energie  $E_{pot}$  abschätzen und es gilt:

$$E_{diss} \sim E_{pot} \sim m \cdot h .$$

Betrachtet man nun die Energiedissipation  $E_{diss,i}$  in einem Teilkanal  $i$  des Netzwerkes, und es sei  $m_i$  die gesamte durch diesen Kanal abfließende Wassermenge,  $l_i$  die entsprechende Länge des betrachteten Teilstückes und  $s_i$  sein Gefälle, so ergibt sich mit  $h_i \sim s_i \cdot l_i$ :

$$E_{diss,i} \sim m_i \cdot s_i \cdot l_i .$$

Zur Bestimmung der Energiedissipationsrate benötigt man den Durchfluß bzw. die Durchflußrate, also die pro Zeiteinheit durch das Netzwerk bzw. seine Teilkanäle durchgeflossene Wassermenge. Der Fluß  $Q_i$  durch den Kanal  $i$  berechnet sich zu:

$$Q_i \sim \frac{m_i}{t} .$$

Für die Energiedissipationsrate  $P_{diss,i} = E_{diss,i} / t$  auf einem der Segmente gilt dann:

$$P_{diss,i} \sim Q_i \cdot s_i \cdot l_i .$$

Dieser Zusammenhang läßt sich noch etwas vereinfachen, da empirisch gezeigt werden konnte (vgl.[2]-[4]), daß zwischen dem Durchfluß und der Steigung eines Kanalsegmentes eine einfache Beziehung besteht:

$$s_i \sim Q_i^\alpha \text{ mit } \alpha \approx -0.5 .$$

D.h.:

$$P_{diss,i} \sim Q_i^{0.5} \cdot l_i .$$

Werden die einzelnen Dissipationsterme über alle Teilstücke des Netzwerkes aufsummiert, so berechnet sich die Gesamt-Energiedissipationsrate  $P_{diss}$  zu:

$$P_{diss} \sim \sum_{i=1}^n P_{diss,i} \sim \sum_{i=1}^n Q_i^{0.5} \cdot l_i$$

Diese Gleichung bietet eine einfache Abschätzung der Dissipationsrate nur aus der Kenntnis der einzelnen Durchflußmengen und Segmentlängen des untersuchten Netzwerkes.

## Minimierung der Dissipationsrate – ein einfacher Algorithmus

Eine gegebene (Gitter-) Fläche wird berieselt und das gesamte Wasser durch Drainagekanäle - den einzelnen Segmenten des Flußnetzwerkes - bis zu einem Abfluß abgeführt. Der Abfluß liegt entweder auf der Fläche (z.B. in der Mitte) oder am Rand der Ebene (z.B. in einer Ecke) und Wasserverluste durch Verdunsten oder Versickern werden ausgeschlossen. Weiterhin wird der Regen über die ganze Fläche als gleichmäßig verteilt und als konstant angesehen.

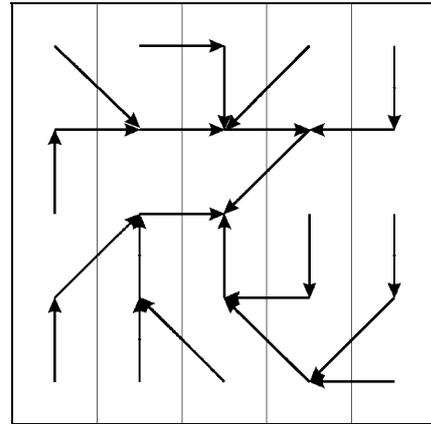


Abb.2: Entwässerung eines Netzwerkes über die nächsten Nachbarn bis hin zum Mittelpunkt.

Unterteilt man das Gitter in  $n$  Flächenabschnitte und entwässert diese über Kanäle, wobei ihre jeweilige Fließrichtung einem Gefälle entspricht, so ergeben sich verschiedene Möglichkeiten, wie diese Kanalsegmente grundsätzlich angeordnet sein können. Die jeweilige Kanalverbindung reiche dabei immer nur bis zu einer seiner nächsten Nachbarflächen und von da aus über die nachfolgenden Kanäle immer weiter bis hin zum Abfluß. Im gezeigten Beispiel (Abb.2) besitzt jedes innere Feld acht nächste Nachbarn (die sog. *Moore-Nachbarn*).

Zur Verdeutlichung der o.g. Abschätzungen läßt sich z.B. die Energiedissipationsrate des Flußnetzwerkes aus Abb.2 qualitativ zu einem Zahlenwert (in dimensionsloser Form) berechnen. Dieser Zahlenwert wird im folgenden auch kurz Dissipationsrate genannt.

Um die Berechnung zu vereinfachen, sind (o.B.d.A.)

- die jeweiligen Flächen und Flächenabschnitte quadratisch,
- die Kantenlängen der Flächenabschnitte auf eine Einheitslänge von Eins normiert,
- die Wassermengen, die durch Berieselung jedem Flächenabschnitt pro Zeitschritt zugeführt werden, auf den Wert Eins normiert.

Die einzelnen Kanallängen  $l_i$  ergeben sich entweder zu  $l_i = 0$ ,  $l_i = 1$  oder  $l_i = \sqrt{2}$ . Der Durchfluß  $Q_i$  ergibt sich jeweils aus den Summen der Durchflußmengen und der Regenmenge des Abschnitts selbst.

$$l_i =$$

$\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	1
1	1	1	$\sqrt{2}$	1
1	1	0	1	1
$\sqrt{2}$	1	1	1	$\sqrt{2}$
1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1

$$Q_i =$$

1	1	2	1	1
2	4	8	11	2
1	6	25	1	1
2	3	7	2	2
1	1	1	4	1

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_{Diss} &\sim \sqrt{1} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{1} \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot 1 + \sqrt{1} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{1} \cdot 1 \\ &+ \sqrt{2} \cdot 1 + \sqrt{4} \cdot 1 + \sqrt{8} \cdot 1 + \sqrt{11} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot 1 \\ &+ \sqrt{1} \cdot 1 + \sqrt{6} \cdot 1 + \sqrt{25} \cdot 0 + \sqrt{1} \cdot 1 + \sqrt{1} \cdot 1 \\ &+ \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot 1 + \sqrt{7} \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \\ &+ \sqrt{1} \cdot 1 + \sqrt{1} \cdot 1 + \sqrt{1} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{1} \cdot 1 \\ &\approx 41,07 \end{aligned}$$

Für jedes Kanalsystem läßt sich auf diese Weise die Dissipationsrate abschätzen und mit der eines andersartig strukturierten Netzwerks vergleichen. Wird nun ein vorgegebenes System in Teilen variiert, wobei einzelne Kanalsegmente etwas umgelegt werden, indem sie z.B. über andere nächste Nachbarn entwässert werden, so entstehen Strukturen, deren Dissipationsraten unterschiedlich hoch sein können.

Läßt man diese Variationen per Computer ausführen und verändert das Netzwerk dahingehend, daß immer ein Kanalsystem mit jeweils niedrigerer Dissipationsrate als neues Ausgangsmuster gespeichert wird, so vollzieht sich sukzessive ein Optimierungsprozeß, bei dem in einer Art evolutionärem Prozeß eine optimale Struktur entsteht, die einen Abfluß mit minimaler Energiedissipation erlaubt.

### Simulation von Flußnetzwerken

Für die Computersimulation hat es sich als günstig erwiesen, nicht ein quadratisches, sondern ein dreieckiges Gitter als Grundlage der numerischen Realisation zu verwenden. Eine mögliche Initialisierung eines Netzwerkes besteht z.B. darin, alle Flächenabschnitte der Reihe nach miteinander zu verbinden (vgl. Abb.3, links). Die Dissipationsrate eines derartigen Netzwerkes erweist sich allerdings im Vergleich zu dem Kanalsystem aus Abb.2 oder der Realisation aus Abb.3 (rechts) als äußerst ungünstig.

Damit ein System während des Optimierungsprozesses nicht in einer Konfiguration gefangen bleibt, die zwar lokal, jedoch nicht global optimal ist, muß bei der Auswahl der jeweils neuen Iterationsstufe eine gewisse statistische Toleranz mit einprogrammiert werden. Um eine insgesamt optimale Konfiguration zu erreichen, muß zwischenzeitlich also auch eine Variation erlaubt sein, die eine höhere Dissipationsrate besitzt, um eben in den darauffolgenden Realisationen einen global günstigeren Systemzustand erreichen zu können.

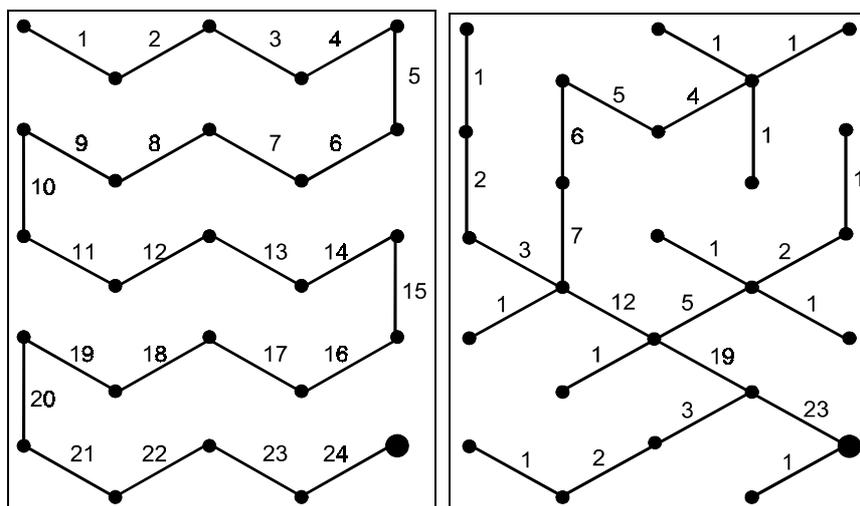


Abb.3: Links - mögliche Initialisierung eines 5x5-Netzwerkes (Dissipationsrate ~ 80,63).  
 Rechts - eine Iterationsstufe des Optimierungsprozesses (Dissipationsrate ~ 42,89).  
 Abfluß am rechten unteren Rand, zusätzlich eingetragen ist der jeweilige Durchfluß.

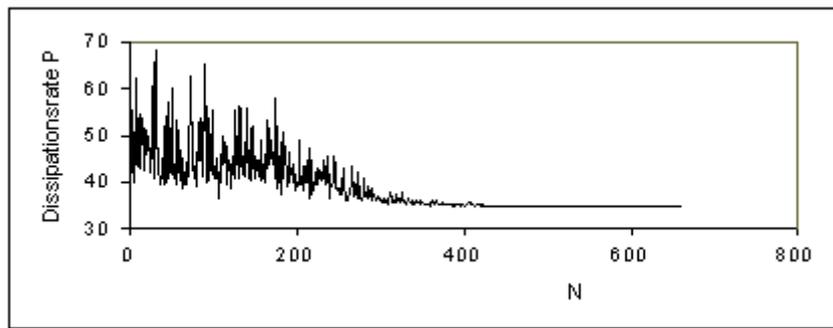


Abb.4: Mögliche Schwankungsbreite und ‚zeitliche‘ Entwicklung der Dissipationsrate während einer Simulation .

Die in Abb.4 dargestellte Zeitreihe zur Dissipationsrate zeigt deutlich, daß mit Hilfe des hier beschriebenen Algorithmus ein optimales Flußnetzwerk mit einer minimalen Energiedissipationsrate generiert werden kann. Simulationsergebnisse für Netzwerke auf größeren Gittern zeigen die Abbildungen 5 und 6.

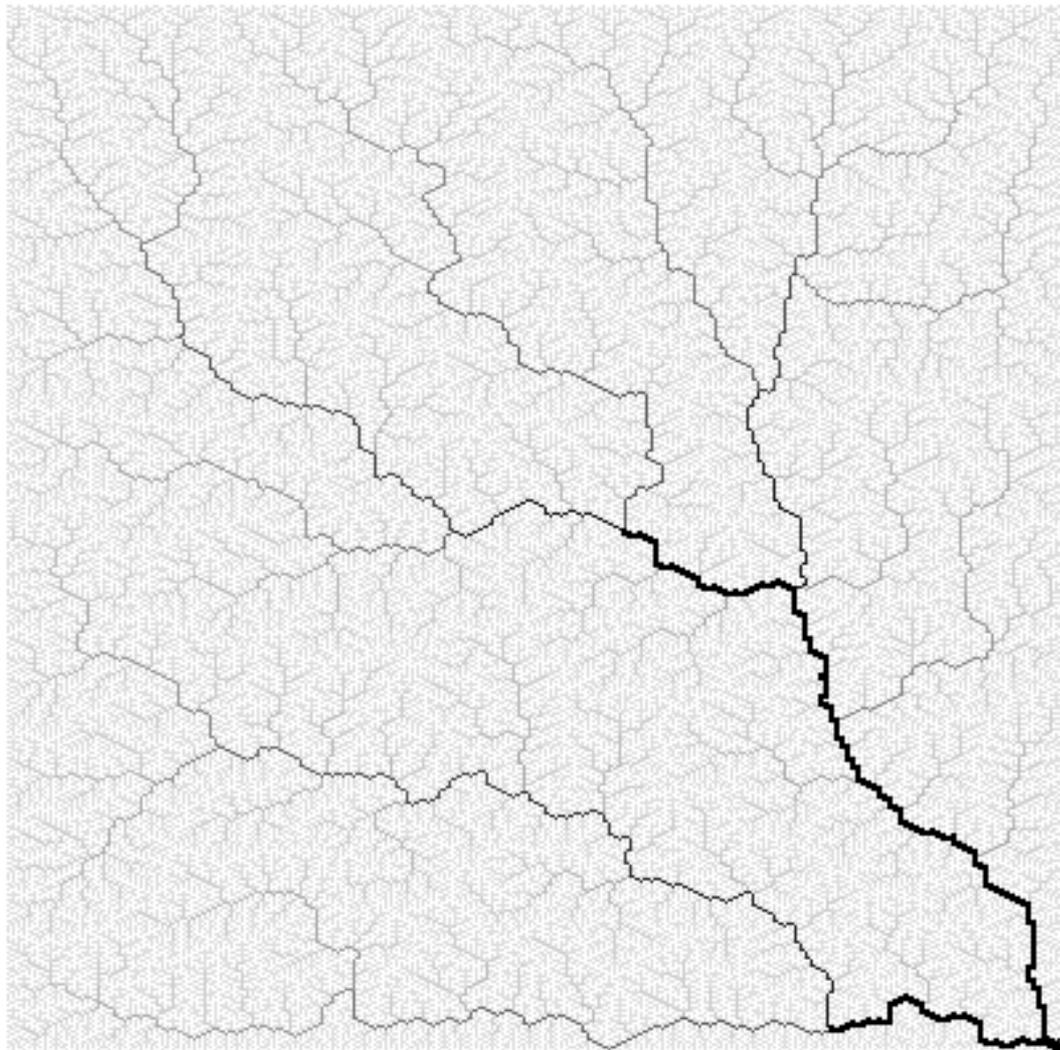


Abb.5: **Simulation** eines Flußnetzwerkes mit Abfluß in der Ecke (auf einem Gitter mit 200x200 Feldern).

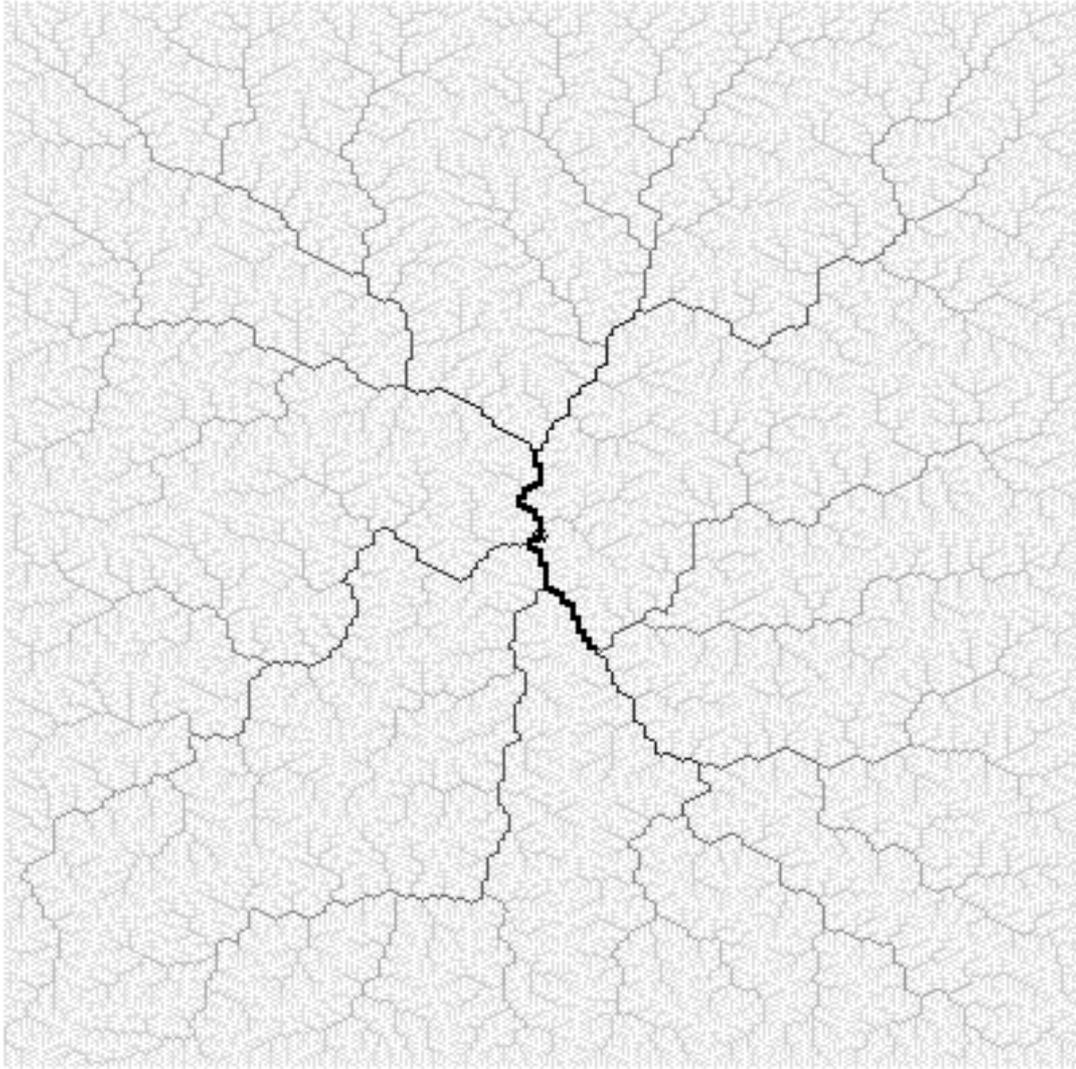


Abb.6: **Simulation** eines Flußnetzwerkes mit Abfluß in der Mitte  
(auf einem Gitter mit 200x200 Feldern).

Die hier vorgestellten Ansätze und Ergebnisse machen u.E. deutlich, daß eine unterrichtliche Thematisierung von Flußnetzwerken als ein weiteres überzeugendes Beispiel selbstorganisierter Strukturbildungsprozesse dazu geeignet ist, auf dem Wege zu einem besseren Verständnis von komplexen Phänomenen der nichtlinearen Physik beizutragen.

### **Literatur**

- [1] Nordmeier, V.: Zugänge zur nichtlinearen Physik am Beispiel fraktaler Wachstumsphänomene. Ein generisches Fraktal-Konzept. LIT-Verlag, Münster, 1999.
- [2] Sun, T.; Meakin, P; Jossang, T.: A minimum energy dissipation model for river networks and their associated topographies. In: *Fractals*, 3/1 (1993) S.576.
- [3] Sun, T.; Meakin, P; Jossang, T.: Minimum energy dissipation model for river basin geometry. In: *Physical Review E*, 6/49 (1994) S.4865.
- [4] Sun, T.; Meakin, P; Jossang, T.: The topography of optimal drainage basins. In: *Water Resources Research*, 9/30 (1994) S.2599.