DOI: 10.1002/piuz.200601149

Physik des Fahrradfahrens

Gleichgewicht auf zwei Rädern

WILFRIED SUHR | H. JOACHIM SCHLICHTING

Auf zwei Rädern stets das Gleichgewicht zu halten, ist nicht immer einfach. Wie wir es einhalten können sagen uns die Gesetze der Physik, die wir uns beim Fahren freilich nicht bewusst machen. Übung macht auch hier den Meister.

Wenn man einen lässig dahinfahrenden, sich elegant in die Kurve legenden Fahrradfahrer erlebt, erscheint das Einregeln in solche Gleichgewichtslagen eine der natürlichsten und leichtesten Übungen zu sein. Erinnert man sich jedoch daran, welche Mühen und halsbrecherischen Aktionen nötig waren, um das Radfahren zu erlernen, so ahnt man, dass sich diese Leichtigkeit einem komplexen und subtilen Zusammenspiel ganz unterschiedlicher Einflussfaktoren verdankt.

Im Folgenden stellen wir die wesentlichen physikalischen Prinzipien des Gleichgewichts an einem einfachen Fahrradmodell dar und liefern die Voraussetzungen für ein zumindest qualitatives physikalisches Verständnis.

Den meisten Radfahrern dürfte kaum bewusst sein, was sie im Einzelnen tun, wenn sie Rad fahren. Wem ist beispielsweise klar, dass man den Lenker nach links und nicht nach rechts einschlägt, wenn das Fahrrad nach links zu kippen droht?

Auf den ersten Blick vermuten wir, dass ein Objekt mit nur zwei Auflagepunkten, dass schon im statischen Fall eine äußerst fallträchtige Angelegenheit ist, dies erst recht in Bewegung sein sollte. Wie wir alle wissen, ist das Gegenteil der Fall. Während es akrobatischer Fähigkeiten bedarf, ein Fahrrad im Stand im Gleichgewicht zu halten, gelingt dies nach einiger Übung in Bewegung fast jedem.

Fahrlagenbeschreibung

Betrachten wir ein Rad auf einer vollkommen ebenen Unterlage (Abbildung 1). Dann wird die Fahrlage durch die beiden Ebenen festgelegt, die jeweils die kreisrunde Umfangslinie von Vorder- und Hinterrad enthalten. Beide Ebenen schneiden sich entlang der Lenkachse, so dass sich ihre Stellung zueinander durch den Lenkwinkel ϕ angeben lässt. Bei gerade stehendem Lenker sei $\phi = 0°$. Wie stark die Hinterradebene gegenüber dem Lot geneigt ist, gibt der Kippwinkel κ an. Da die Unterlage in allen Richtungen dieselben Eigenschaften hat, ist die Kenntnis der Fahrtrichtung für unsere Untersuchung unerheblich. Zur Festlegung der Fahrlage benötigt man daher nur noch die geometrischen Abmessungen des Fahrrades. Hier beginnt allerdings das eigentliche Problem aller Fahrradphysik, denn die Punkte, an denen die Räder den Boden berühren, verlagern sich in komplizierter Weise, je nach Größe von Lenk- und Kippwinkel. Handhabbar wird diese Problematik erst durch eine Beschränkung der Betrachtungen auf sehr kleine Winkel ϕ und κ.

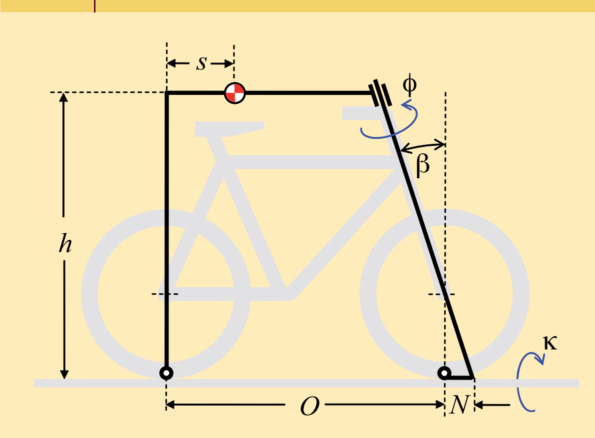
Aufgrund dieser Einschränkung gelten die nachfolgenden Aussagen also nur für eine nahezu aufrechte Fahrlage, bei der die Bahnradien von Kurvenfahrten sehr groß sind. Wir erhalten dadurch ein einfach verwendbares Fahrradmodell, auf das sich typische Fahrräder entsprechend Abbildung 1 reduzieren lassen. In diesem Modell haben die Räder nur noch winzige Durchmesser. Kleine Lenkereinschläge ϕ und Rahmenneigungen κ lassen die üblichen Fahrradmaße, wie Steuerkopfwinkel β, Radstand O und Nachlauf N, daher fast unverändert. Die Massen aller Fahrradkomponenten, inklusive der Fahrermasse, werden in einem einzigen Schwerpunkt zusammengefasst. Dieser hat den Abstand s vom Auflagepunkt des Hinterrades und erreicht in aufrechter Fahrlage die Höhe h.

Ungestörte Kreise

Ein Fahrrad befindet sich in einer Gleichgewichtslage, wenn es hinsichtlich all seiner Bewegungsmöglichkeiten keine Beschleunigung erfährt. Zur Ermittlung seiner Gleichgewichtslagen sind nur drei seiner Bewegungsmöglichkeiten maßgeblich:

- Verdrehung der Vorder- gegenüber der Hinterradebene, durch Veränderung des Lenkwinkels ϕ;

ABB. 1 | MODELLFAHRRAD



> ***Einfaches Modellfahrrad, das der Beschränkung auf kleine Winkel genügt.***

- während des seitlichen Kippens erfolgende Drehung um diejenige Linie, die beide Radauflagepunkte auf der Unterlage verbindet. Diese Linie bezeichnen wir im Folgenden als Kippachse;
- horizontale Verschiebung des Fahrrades auf der Unterlage, gebunden an die Rollrichtung der Räder.

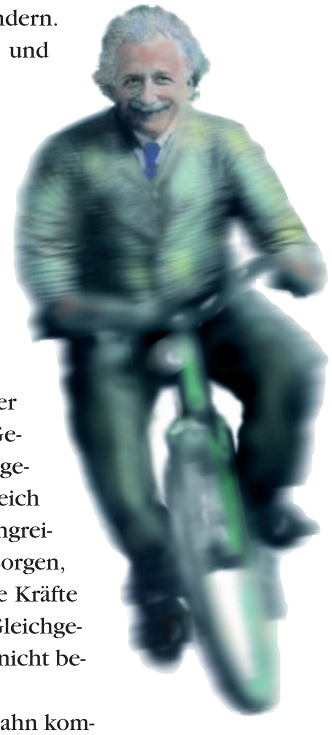
Ein Gleichgewichtszustand wird nur dann erhalten bleiben, wenn dabei ϕ und κ konstant bleiben. Dadurch bedingt wird (mit Ausnahme von der Geradeausfahrt) das Fahrrad dabei um einen Bahnmittelpunkt herum auf einem Kreis fahren. Da wir zusätzlich annehmen, dass die Räder völlig ohne Widerstand rollen, hat diese Kreisfahrt ein konstantes Tempo. Damit kommen nur solche Gleichgewichtslagen in Frage, bei denen sich das Fahrrad stationär auf einer Kreisbahn bewegt. Bleibt noch zu klären, was die Kipp- oder Lenkbewegung ändern kann.

Eine Beschleunigung dieser Drehbewegungen wird durch Drehmomente hervorgerufen, die jeweils in Richtung von Kipp- oder Lenkachse wirken. Die Suche nach einer Gleichgewichtslage entspricht also der Suche nach einer Kombination von ϕ und κ, bei der diese beiden Drehmomente gleichzeitig verschwinden. Da sich beide Drehmomente aber aus unterschiedlichen Beiträgen zusammensetzen, ist dies nur möglich, wenn sich alle jeweils in Richtung von Kipp- oder Lenkachse wirkenden Beiträge gegenseitig aufheben. Zur Bestimmung von möglichen Gleichgewichtslagen werden wir dementsprechend eine Bilanz dieser einzelnen Beiträge zum jeweiligen Gesamtdrehmoment aufstellen. Beabsichtigt ist eine rein qualitative Betrachtung, weshalb bewusst auf Details der Berechnung verzichtet wird. Eine ausführliche Darstellung liefert [1] und ist auf www.phiuz.de unter „Special Features/Zusatzmaterial zu den Heften“ erhältlich.

Beiträge zum Gleichgewicht

Auf das Fahrrad einwirkende Kräfte können in Bezug zur Kipp- oder Lenkachse Drehmomente ausüben. Dabei ist der Abstand zwischen der Drehachse und der Wirkungslinie einer Kraft ein bestimmender Faktor für das erzeugte Drehmoment. Je nach Neigung des Fahrrads oder Einschlag des Lenkers können sich diese Abstände aber ändern. Wir wollen nun darstellen, wie dabei die Kipp- und Lenkmomente von ϕ und κ abhängen.

Maßgeblich für das Gleichgewicht bei einer stationären Kreisfahrt in unserem Modell sind nur drei Kräfte (Abbildung 2): die im Schwerpunkt angreifende Gewichtskraft $\boldsymbol{F}_G$ und die jeweils vom Boden auf das Vorder- und Hinterrad ausgeübten Haltekräfte $\boldsymbol{F}_V$ und $\boldsymbol{F}_H$ (blaue Vektorpfeile). Um die Größe dieser beiden Haltekräfte zu bestimmen, teilen wir sie jeweils in eine lotrechte und eine horizontale Komponente auf. Der Schwerpunkt kann nur dann auf gleicher Höhe bleiben, wenn die lotrecht wirkende Gewichtskraft durch eine gleich große, entgegengesetzte Kraft ausgeglichen wird. Für diesen Ausgleich müssen die an den Auflagepunkten der Räder angreifenden lotrechten Komponenten der Haltekräfte sorgen, so dass $\boldsymbol{F}_{HG} + \boldsymbol{F}_{VG} = -\boldsymbol{F}_G$. Sie werden als statische Kräfte bezeichnet, da sie für ein mögliches statisches Gleichgewicht unerlässlich sind, bei dem sich das Fahrrad nicht bewegt (rote Vektorpfeile).



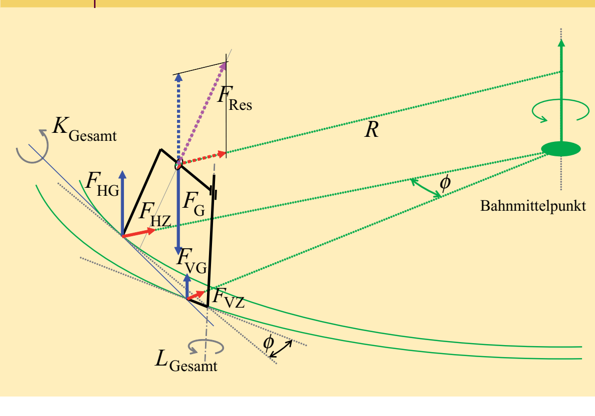
Auf zwei Rädern das Gleichgewicht zu halten, verlangt auch Genies Einiges an Geschicklichkeit ab (Grafik: R. Wengenmayr für Physik in unserer Zeit)

Durch die Bewegung des Fahrrads auf einer Bahn kommen dynamische Kräfte hinzu, die horizontal zum Bahnmittelpunkt gerichtet sind (rote Vektorpfeile). Zusammen ergeben die an beiden Berührungspunkten der Räder angreifenden Kräfte die Zentripetalkraft $\boldsymbol{F}_Z = \boldsymbol{F}_{HZ} + \boldsymbol{F}_{VZ}$, die die Masse des Fahrrades auf eine Kreisbahn mit dem Radius R zwingt. Die statischen und dynamischen Kräfte an beiden Radauflagepunkten können zu einer Gesamtkraft $\boldsymbol{F}_{Res} = \boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{F}_Z$ addiert werden, wie es die gestrichelten Pfeile in Abbildung 2 andeuten. Da die Wirkungslinie von $\boldsymbol{F}_{Res}$ die Kipplinie schneidet, bewirkt sie kein Kippmoment, das die Neigung des Rades ändern könnte.

Zu Beginn der Aufstellung aller wirksamen Drehmomente, betrachten wir zunächst ein Fahrrad im Stand, bei dem also nur die statischen Kräfte wirken. Würde der Fahrer bei geradem Lenker und ohne Neigung genau mittig auf dem Fahrrad sitzen, so dass $\phi = \kappa = w = 0$ ist, dann hätten wir bereits eine Gleichgewichtslage gefunden, bei der weder ein Kipp- noch ein Lenkmoment auftritt (w steht für die Verschiebung des Schwerpunktes, Abbildung 3).

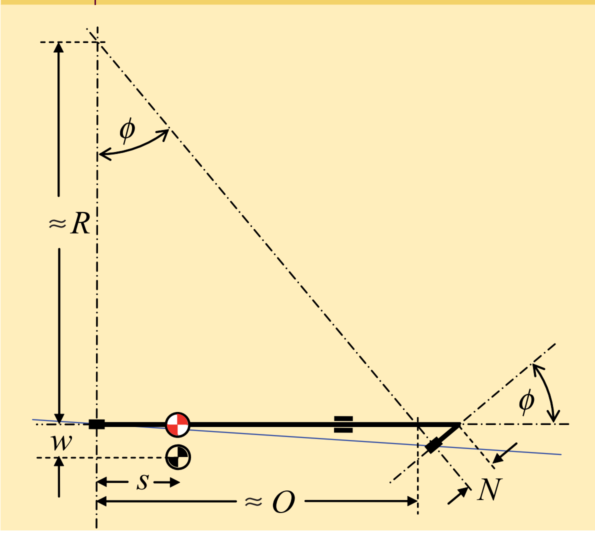
In einem ersten Schritt neigen wir nun das Rad leicht um den Kippwinkel κ, wobei die Gewichtskraft ein Kippmoment $K_1 = C_1\kappa$ und die Haltekraft am Vorderrad das Lenkmoment $L_1 = C_2\kappa$ hervorrufen. Im zweiten Schritt beginnen wir wieder mit der anfänglichen Gleichgewichtslage und schlagen nun den Lenker um einen kleinen Winkel ϕ ein. Dies verschiebt die Kippachse gegenüber der Wirkungslinie der Gewichtskraft, wie Abbildung 3 veranschaulicht. Eine zusätzliche seitliche Verschiebung w des Schwerpunktes kann durch entsprechende Gewichtsverlagerung des Fahrers auftreten. Insgesamt ergibt sich damit ein Kippmoment $K_2 = C_3\phi + C_4 w$. Bei eingeschlagenem Lenker bewirkt die Haltekraft am Vorderrad das Lenkmoment $L_2 = C_5\phi$.

ABB. 2 | KREISFAHRT



< Das Modellfahrrad bei einer stationären Kreisfahrt.

ABB. 3 | LENKEREINSCHLAG



Aufsicht auf ein lotrecht stehendes Modellfahrrad mit nach links eingeschlagenem Lenker.

Da erfahrungsgemäß das Gleichgewichthalten auf einem stehenden Fahrrad kaum möglich ist, muss die während der Fahrt leicht zu haltende Balance demnach von dynamischen Kräften herrühren, die erst durch die Bewegung des Fahrrades mit der Bahngeschwindigkeit v hinzukommen. Um die im Schwerpunkt konzentrierte Fahrradmasse auf einem Kreis mit dem Radius zu bewegen, muss sie stets mit der Zentripetalkraft $F_Z = mv^2/R$ zum Kreismittelpunkt hin beschleunigt werden. Weil stärkerer Lenkeinschlag zu engeren Kreisbahnen führt, kann für kleine Lenkwinkel die Proportionalität $1/R \sim \phi$ angenommen werden. Überträgt man diese Proportionalität auf die Bestimmungsgleichung für die Zentripetalkraft, so zeigt sich, dass $F_Z \sim v^2\ \phi$. Der Zentripetalkraft entgegengerichtet ist eine gleich große Gegenkraft, die auf Höhe des Schwerpunkts am Rahmen angreift. Ihr Beitrag zum Kippmoment ist $K_3 = C_6 v^2 \phi$. Die das Vorderrad gegen seitliches Verrutschen abstützende Kraft F_{VZ} ist eine Komponente der Zentripetalkraft, die daher ebenfalls zu $v^2\phi$ proportional ist. Sie übt ein Lenkmoment $L_3 = C_7 v^2 \phi$ aus.

Aufgrund der Kreiselwirkung tragen die sich während der Fahrt drehenden Räder zum Kipp- und Lenkmoment bei. Die dadurch bedingten Drehmomente sind ebenfalls proportional zu $v^2\phi$, weshalb sie einen Beitrag zum Kippmoment $K_4 = C_8 v^2 \phi$ und zum Lenkmoment $L_4 = C_9 v^2 \phi$ beisteuern.

Mögliche Gleichgewichtslagen

Zu welchen Gleichgewichtslagen es beim Fahrrad kommen kann, lässt sich nun anhand einer Gesamtbilanz der oben aufgezählten Drehmomente diskutieren. Sie treten nämlich auf, wenn die Summe dieser Kipp- und Lenkmomente gleichzeitig zu Null wird.

$$K_{\text{Gesamt}} = C_1\kappa + C_4 w + [C_3 + (C_6 + C_8)v^2]\ \phi = 0 \qquad (1)$$

$$L_{\text{Gesamt}} = C_2\kappa + [C_5 + (C_7 + C_9)v^2]\ \phi = 0 \qquad (2)$$

Bei einem typischen Cityrad (inklusive Fahrer) sind die in (1) enthaltenen Konstanten C_3 und C_8 im Verhältnis zu C_1 und C_4 sehr klein. Das beim Lenkereinschlag auftretende statische Moment und das durch Kreiselwirkung hervorgerufene Moment liefern also nur einen unbedeutenden Beitrag zum Gesamtkippmoment. Für große Beiträge sorgen dagegen die Neigung des Fahrrades und eine seitliche Gewichtsverlagerung des Fahrers. Im Verhältnis dazu liegt die Größe von C_6 im Mittelfeld. Sie bestimmt, wie stark sich die Zentripetalkraft auf das Kippmoment auswirken kann.

Bei $v > 0$ wächst der daran gekoppelte Einfluss des Lenkeinschlages mit der Fahrgeschwindigkeit quadratisch an. Bereits bei einer Geschwindigkeit von 12,5 km/h lässt sich das bei einem bestimmten Neigungswinkel auftretende Kippmoment durch einen etwa gleich großen Lenkwinkel ausgleichen. Bei noch größeren Geschwindigkeiten nimmt die Empfindlichkeit der Gleichgewichtslage gegenüber Änderungen des Lenkwinkels stark zu. Dies erinnert an die fahrpraktische Erfahrung, dass man eine enge Schlangenlinie besser langsam durchfährt, weil dafür so starke Lenkeinschläge nötig sind, die bei schneller Fahrt zum Sturz führen würden.

Wie die uns vertraute Leichtigkeit des Balancehaltens bei der Geradeausfahrt schon erahnen lässt, erfüllt diese lotrechte Fahrweise mit $w = \kappa = \phi = 0$ die Gleichungen (1) und (2). An den leicht geschlängelten Spuren, die nasse Reifen auf trockenem Fahrbelag bei der Geradeausfahrt hinterlassen, ist aber erkennbar, dass ständig Störungen dieser Gleichgewichtslage auftreten. Sie lassen sich durch leichte Lenk- oder Fahrerbewegungen beheben.

Welche anderen Kombinationen der Variablen w, v, κ und ϕ die Bilanzgleichungen erfüllen, lässt sich ausschnittartig durch die Vorgabe von zwei Variablen als feste Parameter ermitteln. Wir legen zum Beispiel die Neigung nach links mit $\kappa = -1°$ und zusätzlich eine bestimmte Verschiebung w der Fahrradmasse ebenfalls nach links fest, wie es bei einer Linkskurve geschieht. Dann zeigen die Kurvenverläufe in Abbildung 4 Paare der Bahngeschwindigkeit v und des Lenkwinkels ϕ, die eine der beiden Bilanzgleichungen erfüllen. Erfolgt die seitliche Verschiebung w des Schwerpunkts schrittweise zwischen 0 cm und –5 cm, so ergibt dies eine Schar von sechs blauen Kurven für Paare von v und ϕ, bei denen das Gesamtkippmoment zu Null wird. Sie lassen erkennen, dass bei konstanter Geschwindigkeit eine stärkere Gewichtsverlagerung einen größeren Lenkeinschlag nötig macht.

Andererseits ist bei gleichem Lenkeinschlag das Gewicht umso stärker zu verlagern, je schneller man fährt. Die einzelne rote Kurve zeigt Paare von v und ϕ, bei denen das Gesamtlenkmoment zu Null wird. Jeder Schnittpunkt dieser roten Kurve mit einer blauen ist daher ein Wertepaar für v und ϕ, das beide Bilanzgleichungen gleichzeitig erfüllt. Diese Schnittpunkte kennzeichnen also mögliche Gleichgewichtslagen bei konstanter Fahrradneigung.

In der Praxis kommt die vorgegebene geringe Neigung hauptsächlich beim Durchfahren einer lang gestreckten Kurve vor. Geschieht dies, wie beispielsweise bei Radrennfahrern mit hohem Tempo, so werden sie ihr Gewicht dabei kaum seitlich verlagern und den Lenker auch nur sehr gering einschlagen müssen, wie Abbildung 4 zeigt.

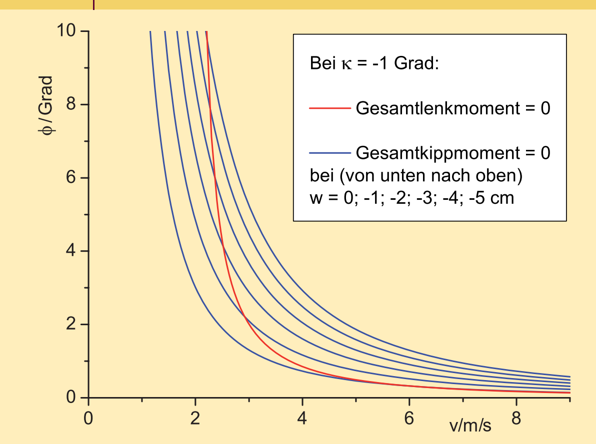
Fahrstabilität

Der soeben geführte Nachweis über das Vorhandensein von Gleichgewichtslagen besagt noch nichts über deren Stabilität. Wird eine stationäre Radfahrt durch eine winzige Störung nur leicht aus dem Gleichgewicht gebracht, so gibt es verschiedenartige Reaktionsweisen, die aus Modellen der Dynamik des Fahrrades vorhergesagt werden können. Beschränkt auf die Geradeausfahrt wurden solche Aussagen bereits 1899 von Whipple [2], 1910 von Klein und Sommerfeld [3] und in jüngster Zeit recht anschaulich von Åström [4] getroffen. Stabilitätsaussagen für beliebige andere stationäre Fahrlagen liefert dagegen ein 1990 vorgestelltes Modell von Franke, Suhr und Rieß [5].

Die Grundaussage all dieser Modelle ist die Prognose von Eigenstabilität beim gebräuchlichen Fahrradtyp für einen bestimmten Geschwindigkeitsbereich. Für ein Cityrad liegt dieser Bereich etwa zwischen 4,5 m/s und 6 m/s, entsprechend 16 km/h und 22 km/h. Kleine Störungen der stationären Fahrlage werden dabei ohne Eingriffe des Fahrers gewissermaßen weggedämpft. Unterhalb dieses Bereichs führen Störungen zu Schlingerbewegungen, die sich bei sehr geringen Geschwindigkeiten bis zum Sturz aufschaukeln können.

Was für die Entstehung von Gleichgewichtslagen nur von untergeordneter Bedeutung war, ist für deren Eigenstabilität von größter Wichtigkeit. Gemeint ist die Kreiselwirkung der Räder. Ändert sich nämlich nach einer Störung der Kippwinkel, so liefert die Kreiselwirkung des Vorderrades ein etwa in Lenkachsrichtung wirkendes Drehmoment, das den Lenker schnell zu der Seite einschlägt, zu der das Fahrrad kippt. Da dies den Bahnradius verkleinert, nimmt die auf die Fahrradmasse ausgeübte Zentripetalkraft zu. Die auf den Rahmen wirkende Gegenkraft der Zentripetalkraft erzeugt dabei ein aufrichtendes Kippmoment, das so lange anwächst, bis es überwiegt und das Fahrrad wieder aufrichtet. Schwingt dabei das Fahrrad zur anderen Seite über, so wiederholt sich dieser aufrichtende Vorgang mit umgekehrtem Vorzeichen. So gesehen ist das Radfahren ein ständiges Pendeln um eine Gleichgewichtslage (anschaulich beschrieben in [6]). Dabei wird anfängliches Kippen, entweder durch Eingriffe des Fahrers oder durch eigenstabiles Verhalten, mit geeigneten Lenkausschlägen beantwortet.

ABB. 4 | GLEICHGEWICHTSBEDINGUNG



Lenkwinkel und Fahrgeschwindigkeiten, bei denen die Summe der Lenk- und Kippmomente zu Null wird, wobei Kippwinkel und seitliche Gewichtsverlagerung konstant sind.

Zusammenfassung

Dynamische Kräfte ermöglichen Gleichgewichtslagen des Fahrrades, bei denen es stationäre Kreisbahnen durchfährt. Befindet man sich als Radfahrer in solch einer Gleichgewichtslage, so genügen bereits geringfügige Änderungen des Lenkeinschlags oder sehr kleine Gewichtsverlagerungen, um ein leicht gestörtes Gleichgewicht wieder herzustellen. Daher kann unser Balanciergleichgewicht dies in solchen Fahrlagen ganz beiläufig leisten. Welche Gleichgewichtslagen möglich sind, ergibt sich aus einer Bilanz wirksamer Kräfte und Drehmomente.

Stichworte

Fahrradfahren, Gleichgewichtsbedingungen, Lenkwinkel, Kippwinkel, Kippmomente, Kreisfahrt.

Literatur

[1] G. Franke, W. Suhr, F. Rieß, Pro Velo **1990**, *21*, 5.
[2] F. J. W. Whipple, The Quaterly Journal of Pure and Applied Mathematics **1899**, *30*, 312.
[3] F. Klein, A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels, Bd. IV, Teubner, Leipzig 1910.
[4] K. J. Åström et al, IEEE Control Systems Magazine **2005**, *25* (4), 26.
[5] G. Franke, W. Suhr, F. Rieß, Eur. J. Phys. **1990**, *11*, 116.
[6] H. J. Schlichting, technic-didact **1984**, *9* (4), 257.

Die Autoren

Wilfried Suhr, studierte Physik an der Universität Oldenburg, wo er 1992 über ein Thema der Wissenschaftsforschung promovierte. Gegenwärtig ist er als Mitarbeiter am Institut für Didaktik der Physik der Universität Münster im Bereich der Lehrerbildung tätig.

Hans-Joachim Schlichting ist Inhaber des Lehrstuhls für Didaktik der Physik an der Universität Münster und Mitbegründer der Rubrik „Spielwiese“.

Anschrift

Dr. Wilfried Suhr, Prof. Dr. H. Joachim Schlichting, Institut für Didaktik der Physik, Universität Münster, Wilhelm-Klemm-Straße 10, 48149 Münster. wilfried.suhr@uni-muenster.de.