Erschienen in: Praxis der Naturwissenschaften- Physik 41/2, 5 (1992).

Geduld oder Physik
Ein einfaches Spielzeug mit physikalischen Aspekten

H. Joachim Schlichting.

Von der Trägheit der Materie, dieser dem Tanze entgegenstrebensten aller Eigenschaften, wissen wir nichts: weil die Kraft, die sie in die Lüfte erhebt, größer ist, als jene, die sie an die Erde fesselt.

Heinrich Kleist

Die Kugelwippe

Die so genannte Kugelwippe (siehe Abb. 1) wird als Geduldspiel bzw. Puzzle vertrieben[1]. Sie läßt sich aber auch leicht selbst herstellen[2]. Die Spielaufgabe besteht darin, die beiden Kugeln, die sich normalerweise im Minimum der Mulde befinden, in die beiden Nischen am rechten und linken oberen Rand der Wippe zu befördern.

Versucht man, das Problem auf die zunächst naheliegend erscheinende Art zu lösen, durch Neigen der Wippe zuerst die eine Kugel und dann auf dieselbe Weise die andere Kugel in die jeweilige

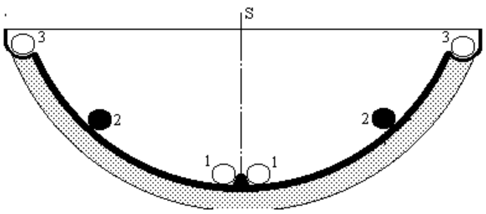

Abb.1: Querschnitt durch die Kugelwippe. Die ursprünglich bei 1 liegenden Kugel nehmen bei eine genügende starke Drehung mittlerer Drehzahl die Position 2 und bei hoher Drehzahl die Zielposition 3 ein.

Nische zu bringen, dann wird man je nach Länge des jeweiligen Geduldsfadens früher oder später feststellen, daß es so nicht geht. Denn gemeinerweise rollt die bereits am Zielpunkt fixierte Kugel unweigerlich wieder aus der kleinen Vertiefung heraus, wenn man anschließend die Wippe zur anderen Seite neigt, um auch die zweite Kugel ins Ziel zu bringen.

Bei einer anderen von Schülern oft angewandten Strategie wird die Wippe überkopf gehalten. Dann wird versucht, die Kugeln vorsichtig direkt über die Zielöffnung zu manövrieren, um anschließend mit einer ebenso plötzlichen wie behutsamen Drehung die Kugeln gleichzeitig in die Ziellöcher fallen zu lassen. Sie funktioniert vermutlich auch nur theoretisch.

Die unweigerlich zum Ziel führende Lösung besteht darin, die beiden Kugeln zunächst in eine symmetrische Position zu bringen (jeweils eine Kugel links und rechts von der kleinen Trennwand W) und dann die Wippe in hoher um die Symmetrieachse S zu versetzen. Dann werden die Kugeln aus der Sicht des mitdrehenden Beobachters durch die nach außen wirkende Zentrifugalkraft bergauf getrieben, bis sie in der Zielposition ankommen und dort aufgrund einer kleinen Vertiefung fixiert werden.

Wenn dieser Trick durch Zufall, Überlegung oder durch Hinweis des Lehrers gefunden und erfolgreich angewandt wird , ist das ursprüngliche Problem nicht nur schlagartig ein für alle Mal gelöst, sondern unter der Hand ein anderes geworden: Von einem Geduld - bzw. Geschicklichkeitsspiel, bei dem es auf Ausdauer, sichere Hand und Konzentration anzukommen scheint, wird eine von jedermann durchzuführende, einfache manuelle Aktion.

Sieht man einmal davon ab, daß der Trick durch Zufall hätte gefunden werden können, so ist festzustellen, daß die Kenntnis physikalischer Prinzipien bei der Lösung bestimmter Aufgaben notwendig sein, zumindest aber eine starke Vereinfachung darstellen kann. So gesehen ist die Kugelwippe ein typisches physikalisches Spielzeug. Der physikalische Aspekt wird ihm nicht aufgepfropft, wie in vielen anderen Fällen, in denen Physik und Spielzeug verknüpft werden, sondern liegt gleichsam der Spielidee zugrunde.

Trägheit als Antrieb

Jede Bewegung strebt nach ihrer Erhaltung

Leonardo da Vinci

Obwohl diese Erkenntnis nicht automatisch den Wunsch der Schüler nach sich zieht, das angewandte Prinzip auch verstehen zu wollen, kann der spielerische Zugang immerhin eine Motivation dafür abgeben. Die Frage, die es zunächst zu beantworten gilt, lautet: Wieso bewegen sich die Kugeln entgegen der Schwerkraft, gewissermaßen "bergauf" in die Zielpositionen? Die Schüler kommen fast immer selbst auf die Idee, daß diese Frage etwas zu tun hat mit der Frage: Wieso werde ich im Bus bei einer zügig gefahrenen Linkskurve nach rechts außen gedrückt oder: Warum werde ich im Bus stehend veranlaßt, nach vorn zu laufen, wenn der Bus bremst? Die Antwort wird durch das physikalische Trägheitsprinzip gegeben, in dem die Erfahrungen zusammengefaßt sind, die man mit Körpern macht, insbesondere mit seinem eigenen, wenn der Bewegungszustand verändert wird, also (positive oder negative) Beschleunigungen auftreten: Das Trägheitsprinzip besagt, *daß ein Körper im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung verbleibt, wenn er nicht durch eine äußere Kraft daran gehindert wird*.

Auf das Busbeispiel zurückkommend heißt das also: Wenn der Bus bremst, also seine Geschwindigkeit verringert, "möchte" mein Körper (aus der Sicht eines am Straßenrand stehenden Beobachters)seine Geschwindigkeit beibehalten und bewegt sich im Bus nach vorn. Oder: Wenn der Bus eine scharfe Kurve fährt, also durch Änderung der Richtung eine beschleunigte Bewegung (in Richtung auf ein fiktives Drehzentrum) ausführt, "möchte" sich mein geradeaus weiterbewegen und "kollidiert" beispielsweise mit der nach innen beschleunigten Wand.

Ähnlich ergeht es den Kugeln in der Wippe. Durch die Drehung der Wippe um die Symmetrieachse werden die ein wenig von der Achse entfernt liegenden Kugeln ebenfalls in Bewegung gesetzt. Da sich die von den rotierenden Seitenwänden geschobenen Kugeln aufgrund der Trägheit geradlinig und das heißt, in jedem Zeitpunkt tangential zum Kreis, den die schiebenden Wände beschreiben, weiterbewegen "möchten", entfernen sie sich allmählich radial vom Drehzentrum. Dabei treffen sie, wie im Beispiel des fahrenden Busses, auf die nach außen gewölbte Wand der Wippe.

Dreht sich die Wippe genügend schnell, so laufen die Kugeln die Wand hinauf, bis sie die oberen Nischen erreichen und dort in einer kleinen Vertiefung liegenbleiben (Abb. 2). Aus der Sicht der Kugel macht sich die Trägheit als eine radial nach außen wirkende Kraft $\vec{F}_z$ bemerkbar. Sie gerät mit der Schwerkraft $\vec{F}_g$ und der elastischen Kraft $\vec{F}_e$ der Wand in Wettstreit. Das Ergebnis kommt in der Höhe zum Ausdruck, die die Kugel auf der gewölbten Wand einnimmt. Da die Trägheitskraft mit der Rotationsgeschwindigkeit wächst, nimmt auch die erreichte Höhe mit der Geschwindigkeit zu.

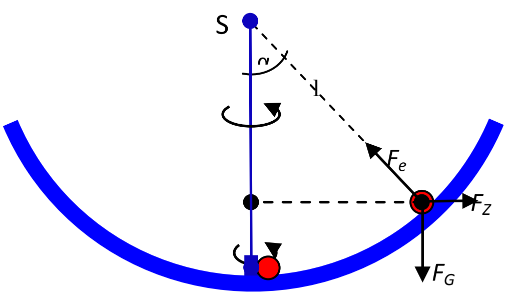

Abb. 1: Schematische Darstellung der Kugel im dynamischen Gleichgewicht (siehe Text).

Symmetriebruch

C'est la dissymétrie qui crée le phénomèn

Pierre Curie

Bei den Versuchen, die Kugel je nach Größe der Drehgeschwindigkeit auf verschiedene Höhen zu bringen, fällt auf, daß die Kugel sich überhaupt erst dann aus dem Tal der Mulde herausbewegt, wenn eine bestimmte kritisch zu nennende Geschwindigkeit ω_c überschritten wird. Wir haben es hier also mit der recht merkwürdigen Verhaltensweise zu tun, daß die Kugel durch langsame Erhöhung der Drehgeschwindigkeit zunächst überhaupt nicht reagiert und dann plötzlich ab einer bestimmten Geschwindigkeit beginnt, die Wand hinaufzulaufen um eine der jeweiligen Geschwindigkeit entsprechenden Position einzunehmen (Abb. 3).

Würde man die Geschwindigkeit jeweils konstant halten (z.B. durch einen geeigneten Antrieb mit Hilfe eines Motors), so könnte man sich davon überzeugen, daß die Kugel an der gekrümmten Wand ein stabiles Gleichgewicht einnähme, so als ob die Wand dort eine Mulde besäße. Die Vorstellung einer Mulde, bzw. eines Minimums der potentiellen Energie ist gar nicht so abwegig. Es läßt sich nämlich ein (effektives) Potential für die Kugel angeben (siehe Abb. 4), dessen Minimum für Geschwindigkeiten kleiner als die kritische mit dem Minimum der Kugelwippe zusammenfällt. Für Geschwindigkeiten größer als die kritische geht dieses Minimum in ein (relatives) Maximum über. Gleichzeitig entstehen zu beiden Seiten dieses Maximums neue Minima, die sich mit wachsender Geschwindigkeit zu größeren Auslenkungswinkeln der Kugel verschieben.

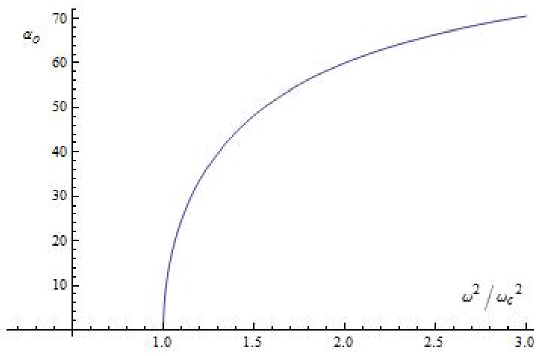

Abb. 3: Der Gleichgewichtswinkel α_0 der Wippe als Funktion des Quadrats der Drehgeschwindigkeit ω^2 in Einheiten von ω_c^2

Dieses abrupte Ändern eines bestimmten Verhaltens aufgrund der kontinuierlichen Variation eines Parameters, hier: der Drehgeschwindigkeit, nennt man *phasenübergangsähnliches* Verhalten in Analogie zu *Phasenübergängen* in Vielteilchensystemen, bei denen qualitativ etwas ganz Ähnliches passiert. Stellt man beispielsweise ein Glas mit Wasser in eine Tiefkühltruhe, so sinkt allmählich die Temperatur des Wassers, zunächst ohne sichtbare äußere Veränderung .Erst wenn eine Temperatur von Null Grad Celsius erreicht ist, entsteht plötzlich Eis, d.h. das Wasser geht vom flüssigen in den festen Zustand über. Dieser Übergang ist mit einem Symmetriebruch verbunden. Während das Wasser im flüssigen Zustand ein hohes Maß an Symmetrie besitzt, derzufolge das System durch zahlreiche Symmetrieoperatio-

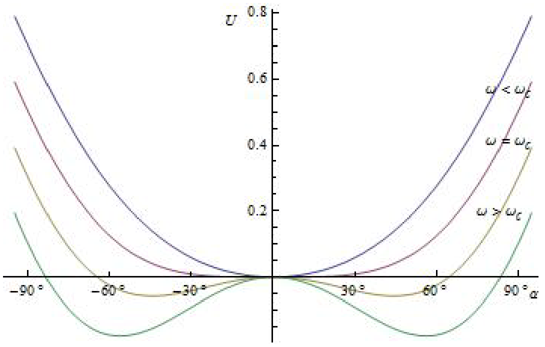

Abb. 4: Effektives Potential der Kugelwippe als Funktion der Auslenkung α für verschieden Drehgeschwindigkeiten. Bei der kritischen Drehgeschwindigkeit ω_c wird die Symmetrie gebrochen. Es entstehen zwei neue Minima.

nen (statistisch gesehen) in einen vom ursprünglichen nicht zu unterscheidenenden Zustand überführt wird, sind im festen Zustand nur mehr noch wenige, der jeweils realisierten Kristallstruktur entsprechende Symmetrieoperationen möglich. Die Symmetrie der Kugelwippe ist bereits aufgrund der Konstruktion gebrochen. Dadurch daß im Minimum der Mulde eine kleine Barriere angebracht ist, die beide Kugeln bereits nach der einen oder anderen Seite ausgelenkt hält, ist von vornherein klar, daß mit einsetzender Rotation die linke Kugel die linke Wand und die rechte Kugel die rechte Wand hochrollen wird. Ist eine solche Barriere nicht vorhanden, (es lohnt sich, die Wippe vorsichtig zu öffnen und die Barriere wegzufeilen), muß die Kugel sich bei jedem Drehversuch gewissermaßen "entscheiden", zu welcher Seite sie rollen "möchte", wenn die kritische Drehgeschwindigkeit überschritten wird. Entscheidungshilfe bekommt die Kugel von außen. Kleinste zufällige Störungen sorgen für eine Anfangsauslenkung in die eine oder andere Richtung und legen damit fest, an welcher Wand die Kugel hochrollen wird. Der Zufall wird zum Zünglein an der Waage und bestimmt, in welche der beiden unsymmetrischen Möglichkeiten aus der symmetrischen hervorgehen. In der dann tatsächlich realisierten Struktur wird der Zufall gewissermaßen fixiert.

Hat man die Seiten seiner Wippe z.B. mit verschiedenen Farben markiert, so stellt man fest, daß wie beim Werfen einer Münze die Kugel mal zur einen mal zur anderen Seite hochrollt. Dabei erweist sich die Wahrscheinlichkeit die Kugel auf der einen oder anderen Seite anzutreffen als gleich groß vom Wert 0,5. (Weitere einfache Versuch zum phasenübergangsähnlichen Verhalten findet man z.B. in [3] und [4]).

Quantitative Skizze

Das Ziel der Forschung ist die Entdeckung der Gleichung, die zwischen den Elementen der Phänomene besteht.

Ernst Mach

Auch wenn durch die qualitativen Überlegungen, die wesentlichen physikalischen Aspekte der Kugelwippe bereits hervorgehoben wurden, soll kurz skizziert werden, wie man die Vorgänge quantitativ modellieren kann. Wenn wir davon ausgehen, daß die Kugel der Masse m reibungsfrei in einer kreisförmigen Mulde mit dem Radius l gleitet, dann wird die in tangentialer Richtung wirkende Kraft $\boldsymbol{F}$, die die Kugel an der Muldenwandung hochtreibt, gemäß der oben angestellten qualitativen Überlegungen betragsmäßig beschrieben durch

$F = ml\ddot{\alpha} = F_{gt} + F_{zt}$ mit $F_{gt} = F_g \cdot \sin\alpha$, $F_{zt} = F_z \cos\alpha$ und $F_g = -mg$, $F_z = m\omega^2 x$

(siehe Abb. 2).

Dabei ist g = 9,81 m/s^2 die Erdbeschleunigung, ω die Drehgeschwindigkeit der Mulde und $x = l \cdot \sin\alpha$ der Abstand der Kugel von der Drehachse.

Im dynamischen Gleichgewichtszustand (konstante Drehgeschwindigkeit) verschwindet $\boldsymbol{F}$. Daraus läßt sich der jeweilige Gleichgewichtswinkel der Kugel bestimmen (siehe Abb. 3). Als Lösungen ergeben sich $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$, sowie unter der Voraussetzung, daß $\omega^2 > g/l$ die Winkel $\alpha = \pm\,\alpha_0 = \arccos(g/l\omega^2)$.

Im Falle $\alpha = 0$ befindet sich das System im Minimum. Wie wir uns bereits qualitativ klargemacht haben, kann es dieses nur verlassen, wenn die Kugel zumindest kleines Stückchen aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt wird und die Drehgeschwindigkeit den kritischen Wert $\omega_c^2 = g/l$ überschreitet. Da die Kugel im Prinzip ihren stationären Gleichgewichtszustand an einer der beiden gewölbten Wände annehmen kann, ergeben sich jeweils zwei symmetrische Lösungen, $\pm\alpha$. Der durch $\alpha = \pi$ gegebene Gleichgewichtszustand kann von unserer Kugel nicht eingenommen werden.

Das dynamische Verhalten des Systems läßt sich am besten ausdrücken durch das effektive Potential *U*. Man gewinnt *U* durch Multiplikation der Bewegungsgleichung mit $\dot{\alpha}$ und Integration über die Zeit. Um dimensionslose Einheiten zu bekommen, wurde außerdem durch *mgl* dividiert.

$$U = 1 - cos\alpha - \frac{1}{2}\,\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\,sin^2\alpha\,.$$

In Abb. 4. ist der Verlauf des effektiven Potentials *U* als Funktion des Auslenkungswinkels der Kugel α für verschiedene Drehgeschwindigkeiten aufgetragen.

Bei Drehgeschwindigkeiten unterhalb der kritischen $\omega < \omega_c$ fällt die Gleichgewichtsposition α_0 der Kugel mit dem Symmetriezentrum der Wippe zusammen. Der Verlauf des Potentials wird mit zunehmender Drehgeschwindigkeit immer flacher und bildet bei Überschreiten der kritischen Geschwindigkeit ω_c zwei neue Minima links und rechts des Symmetriezentrums aus, während das alte Minimum zu einem relativen Maximum wird. Mit weiter steigenden Drehgeschwindigkeiten werden die Minima immer ausgeprägter und zu höheren Auslenkungswinkeln hin verschoben.

Für quantitative Untersuchungen ist die Kugelwippe natürlich ungeeignet. Seit vielen Jahren wird jedoch von der Lehrmittelindustrie z.B. unter der Bezeichnung *Kugelschwebe* ein Gerät angeboten (Phywe), das der Kugelwippe weitgehend gleicht. Obwohl es nur zum Nachweis der Proportionalität zwischen Zentrifugalkraft und Masse vorgesehen ist, können mit ihm alle genannten Phänomene hervorgebracht und vor allem mit der dazu gehörenden Schwungmaschine quantitativ untermauert werden.

Alternative Systeme

Zum Schluß möchten wir auf zwei weitere einfach zu konstruierende Vorrichtungen verweisen, die trotz ihrer völlig andersartigen Konstruktion ein ähnliches Verhalten wie Kugelwippe bzw. Kugelschwebe zeigen.

Bei der einen Vorrichtung handelt es sich um einen kreisförmig gebogenen Draht, auf dem sich eine leicht bewegliche Perle befindet (Abb. 5). Bringt man die Drahtenden leichtläufig (Kugellager!) in einem Griff unter, so läßt sich der Drahtring durch seitliches Anstoßen in Rotation versetzen. Die Perle zeigt dann mit noch größerer Deutlichkeit dieselben Verhaltensweisen wie die Wippe. Bei der anderen Konstruktion handelt es sich um ein Pendel mit einer starren Pendelstange, die am oberen Ende mittels eines Scharniers die Möglichkeit besitzt, einzuknicken. Bringt man dieses Pendel z.B. durch eine kleine Kurbel in Rotation, so zeigen sich auch hier in der seitlichen Auslenkung des Pendels dieselben phasenübergangsähnlichen Phänomene wie bei den anderen Vorrichtungen.

Kugelwippe als Modell für Vorgänge der Selbstorganisation

Trotz ihrer Einfachheit sind die obigen Kugelsysteme geeignet, auf einige Ideen aufmerksam zu machen, die in der modernen Physik der *Selbstorganisation* bzw. *Synergetik* von Bedeutung sind.

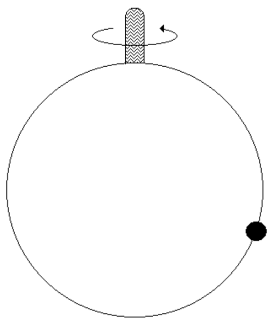

Abb. 5: Ein in einem Griff kugelgelagerter kreisrunder Drahtring mit Perle. Die im Zustand der Ruhe und bei kleinen Drehgeschwindigkeiten an der untersten Stelle des Ringes verharrende Perle nimmt bei größeren Geschwindigkeiten eine "höhere" Gleichgewichtslage an einer der beiden Seiten des Ringes ein.

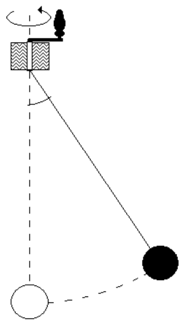

Abb. 6: Das Drehpendel. Bei kleinen Drehgeschwindigkeiten bleibt das Pendel in der Ruhelage. Oberhalb der Drehgeschwindigkeit nimmt es eine "höhere" Gleichgewichtslage ein.

Zum einen läßt sich anhand *des phasenübergangsähnlichen* Verhaltens eine Anschauung für Vorgänge gewinnen, bei denen die kontinuierliche Einwirkung auf ein System unter Umständen eine unerwartete, drastische Reaktion, ein Umschlagen in eine qualitativ andere Verhaltensweise zur Folge hat. Eine solche Anschauung kann beispielsweise wichtig sein für das Verständnis und die modellmäßige Erfassung von entsprechenden Phänomenen in der natürlichen Umwelt: Ein Fluß, dem man in kontinuierlich steigendem Maße Schadstoffe zuführt, verändert sein Verhalten, wie es sich etwa in der Populationsdichte der in ihm lebenden Organismen zeigt, zunächst nur unwesentlich. Erreicht die Schadstoffzufuhr jedoch ein kritisch zu nennendes Maß, so tritt plötzlich eine drastische Veränderung ein, auf die man nicht gefaßt ist: Beispielsweise zeigen Unmengen toter Fische an, daß der Fluß "umgekippt" ist. Auch zur physikalischen Erfassung anderer katastrophenartiger Veränderungen können unsere Kugelsysteme als grobes Modell dienen. Zum anderen sind sie geeignet, die Aufmerksamkeit auf einige für sich *selbst organisierende Systeme* typische Merkmale zu lenken: Die Kugelwippe grenzt sich gewissermaßen durch den kreativen Akt des Symmetriebruchs aus dem bedeutungslosen Einerlei des thermischen Gleichgewichts aus. Sie repräsentiert (im Falle einer gleichförmigen Rotation) in Form der stabilen Nichtgleichgewichtslage eine "autonome" Struktur, die - in bestimmten Grenzen- sogar in der Lage ist, die Struktur "bedrohende" äußere Störungen abzubauen.

Obwohl wir in der quantitativen Betrachtung der Einfachheit halber Reibungseffekte vernachlässigt haben, spielen sie faktisch eine wichtige Rolle bei der Einregelung und Stabilisierung der *Bewegungsstruktur*: Ohne Reibung könnte die Kugel die Gleichgewichtslage weder einnehmen, noch könnten die von außen auf das System einwirkenden Störungen wieder zum Abklingen gebracht werden. Da durch den Antrieb stets für eine Ergänzung der dissipierten Energie gesorgt wird, bleibt die Rotationsenergie und mit ihr die Struktur erhalten.

Um die Rolle der Dissipation von Nichtgleichgewichtsstrukturen hervorzuheben, spricht *Prigogine* von dissipativen Strukturen. Auch wenn er dabei an komplexe Vielteilchensysteme mit sehr vielen Verhaltensmöglichkeiten denkt, kann unsere Kugelwippe als einfaches Modell einer dissipativen Struktur angesehen werden.

Die typischen Phänomene der Selbstorganisation beruhen mathematisch gesehen auf der nichtlinearen Dynamik dissipativen Strukturen. Bei der Erschließung und Beherrschung nichtlinearer Zusammenhänge spielen physikalische Entdeckungen unserer Tage und vor allem die Entwicklung des Computers eine große Rolle (vgl. z.B. [5], [6]). Darin muß einer der Gründe gesehen werden, daß man altvertraute Geräte, wie etwa die oben genannte Kugelschwebe heute mit ganz anderen Augen betrachtet.

Literatur

[1] zu beziehen z.B. über Physik- Boutique. Stark Verlag. Postfach 1852. 8050 Freising [2] Wittmann, J.: Trickkiste. München: Bayrischer Schulbuchverlag 1983.

[3] Rodewald, B. : Phasenübergangsähnliche Phänomene in der Mechanik. Praxis der Naturwissenschaft 32/2,35(1983)

[4] Schlichting, H.J.: Zu Phasenübergängen. Physik und Didaktik 16/2, 163 (1988); dort weitere Literaturangaben.

[5] Schlichting H.J: Unsere Welt ist nichtlinear - Strukturen im Chaos. In: K. Wiebel (Hrsg.). Zur Didaktik der Physik und Chemie. Alsbach: Leuchtturm 1991.

[6] Schlichting, H.J., Rodewald, B. : Physikalische Phänomene am Dampfjetboot. Praxis der Naturwissenschaften- Physik 39/8,19(1990)