



Die Physik der Schwingungen und Wellen

Th. Altmeyer
Sommer 2006

SOMMERSEMESTER 2006

Das von einer Spinne gewobene Netz ist sowohl widerstandsfähig als auch elastisch. Die Elastizitätseigenschaft von Materialien führt oft zu einer sehr wichtigen Bewegungsart: **harmonische Schwingungen**

Inhaltsverzeichnis

0	Vorbemerkung	5
1	Literatur	7
2	Einführungsbemerkungen zum Thema	9
3	Schwingungen	13
3.1	Einführung	13
3.2	Grundlagen der Schwingungslehre und ihre Behandlung in der Schule	13
3.2.1	Fachtermini zur Schwingungslehre	13
3.2.2	Sichtbarmachen von Schwingungen	17
3.2.3	Harmonische Schwingungen	18
3.2.3.1	Kinematik harmonischer Schwingungen	18
3.2.3.2	Kreisbewegung und harmonische Schwingungen	22
3.2.3.3	Dynamik harmonischer Schwingungen: das Kraftgesetz . .	24
3.2.3.4	Schwingungen des mathematischen Pendels ('Fadenpendel')	27
3.2.3.5	Der Energieerhaltungssatz bei harmonischen Schwingungen	29
3.3	Erzwungene Schwingungen und Resonanz	31
3.4	Zusammenspiel mehrerer harmonischer Schwingungen	36
3.4.1	Überlagerung von zwei in gleicher Raumrichtung verlaufenden Schwingungen	37
3.4.1.1	Mathematische Behandlung der Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen	37
3.4.1.2	Ergänzung: Zwei gekoppelte lineare Oszillatoren	42
3.4.1.3	Ergänzung: Der ebene (zweidimensionale) harmonische Oszillator und Lissajou-Figuren	46
3.4.1.3.1	Zwei Schwingungen mit gleicher Frequenz ω . . .	48
3.4.1.3.2	Zwei Schwingungen mit unterschiedlicher Frequenz	48
3.5	Quarzuhren - eine aktuelle und interessante Anwendung der Physik der Schwingungen	51
3.5.1	Die Quartzuhr - eine 'Wundermaschine'	51
3.5.2	Experimentelle Untersuchung der Quarzuhr	54
4	Wellenphysik	57
4.1	Mechanische Wellen	58
4.1.1	Organisierte Schwingungen und Phänomenologie der Wellenlehre . .	58
4.1.1.1	Wichtige Grundformen von mechanischen Wellen	58
4.1.2	Mathematische Beschreibung von Wellen	62
4.1.3	Welleninterferenz	65

4.1.3.1	Überlagerung zweier gleichsinnig laufender Wellen	65
4.1.3.2	Überlagerung zweier entgegengesetzt laufender Wellen . . .	67
4.1.3.3	Reflexion einer Welle am Trägerrand	68
4.1.3.4	Stehende Wellen und Resonanzen	69
4.1.4	Der Doppler-Effekt	71
4.1.5	Interferenz und Huygenssches Prinzip: Grundlagen	76
4.1.6	Anwendung: Brechungs- und Reflexionsgesetz	80
4.1.6.1	Das Brechungsgesetz	80
4.1.6.2	Das Reflexionsgesetz	82

Kapitel 0

Vorbemerkung

Diese Notizen sind parallel zur Veranstaltung **Schwingungen und Wellen** für das Modul 4 (Vertiefungen im Fach Physik) entstanden. Als Problem stellte sich heraus, dass die Teilnehmer an der Veranstaltung aus sehr unterschiedlichen Studiengängen stammten. Die fachliche Tiefe konnte deshalb nicht simultan für alle Teilnehmer passend gewählt werden. Mein ursprüngliches Ziel war es, das Script in verschiedene 'tracks' aufzuteilen - jeder 'track' wäre für eine bestimmte Studienrichtung zugeschnitten. Dieses Vorhaben stellte sich als zu ehrgeizig heraus - letztlich kenne ich auch die verschiedenen Studienabschlüsse nicht so genau, dass ich eine derartige Strukturierung hätte leisten können. In diesem Script finden sich deshalb Passagen, die eher für SII . - Studierende geeignet sind - direkt unter bzw. über allgemeineren Abschnitten, die von allen gelesen werden können.

Manche Teile gehen sogar über den normalen Schulstoff hinaus (elliptische Integrale, Matrixtheorie). Man sollte sich aber dadurch nicht entmutigen lassen - einfach über die entsprechenden Teile hinwegblättern und später wieder einsteigen.

Sicherlich finden sich in dem Text noch einige (vermutlich leider mehr als man denkt!) Fehler - sollte jemand welche bemerken, so wäre ich für eine kurze Benachrichtigung dankbar (email!) Natürlich würde ich mich auch über konstruktive Kritik oder andere Rückmeldungen freuen!

Th.Altmeyer

Kapitel 1

Literatur

Es gibt eine ganze Reihe von Fachbüchern, die sich speziell mit Schwingungen und Wellen auseinandersetzen. Die meisten - so auch die hier aufgeführten - sind allerdings sehr fachwissenschaftlich angelegt.

- ***The physics of vibration and waves***
H.-J. Pain
Wiley
- ***Vibrations and waves***
A.P. French
M.I.T. Introductory physics series (Norton)
- ***Schwingungen und Wellen***
Berkeley Physik Kurs Bd. 3 Vieweg
- ***Schwingungen***
Eine Einführung in die physikalischen Grundlagen und die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen
Kurt Magnus, Karl Popp; Teubner
- ***Classical Mechanics*** John R. Taylor; University Science Books

Als Gegenstück hierzu kann etwa ein Buch zu physikalischen Freihandexperimenten gelten:

- ***Physikalische Freihandexperimente Bd.1 und Bd.2***
H. Hilscher et al.
Aulis Verlag
- ***Physikalische Freihandversuche***
Kleine Experimente
Ernst Zeier
Aulis Verlag Deubner

Die Standardexperimente zum Physikunterricht werden kompakt und brauchbar dargestellt in

Physikalische Schulexperimente Bd.1 bis Bd.3
Hrg. Hans-Joachim Wilke
Volk und Wissen

Ein Klassiker der Experimentalphysik ist seit einiger Zeit wieder in einer Neubearbeitung erhältlich:

Pohls Einführung in die Physik

2 Bände, Hrg. Lüders, Pohl

Springer Verlag

Interessant an den beiden Büchern sind die beigelegten Datenträger, auf denen Videoaufzeichnungen vieler Experimente aus dem pohlschen Programm gespeichert sind.

Kapitel 2

Einführungsbemerkungen zum Thema

Wir sind von Schwingungen umgeben - von Bewegungen, 'die sich ständig wiederholen'. Schwingende Kronleuchter, Schiffe, die an der Ankerkette hängend mit der Dünung auf und ab schwingen. Gitarrensaiten, Trommelmembranen, Membranen in Telefonhörern, unser Trommelfell, Lautsprechermembranen, Quarzkristalle in unseren Armbanduhren sind weitere Beispiele.

Weniger offensichtlich sind die Schwingungen, die Luftmoleküle ausführen, wenn der Schall weitergeleitet wird - oder die Bewegungen, die von Elektronen in Festkörpern ausgeführt werden, wenn Wärmeleitung stattfindet. Genauso entgehen uns im Allgemeinen die elektromagnetischen Feldschwingungen in Antennen, die in Elektronenbewegungen umgesetzt werden. Den historischen Ausgangspunkt der physikalischen Untersuchungen von Schwingungen kann man wohl bei Galileo Galilei suchen.

Letztlich ist sogar die Materie, aus der unsere Körper besteht, auf kleinster Längenskala ebenfalls ein Schwingungsphänomen (Stichwort:Materiewellen oder noch extremer: Stringtheorie) Schwingungen sind nicht an Materie gebunden: Licht, Radiowellen, Röntgenstrahlung sind gleichfalls eng mit Schwingungsvorgängen verknüpft.

Es gibt mittlerweile mehrere Möglichkeiten, mit seinen Freunden und Bekannten in einer anderen Stadt zu kommunizieren. Man kann beispielsweise einen Brief schicken (keine e-mail) oder auch telefonieren. Die erste dieser Varianten (Brief) verwendet sozusagen das Teilchenkonzept: Ein materielles Objekt wird von einem Ort zum anderen geschickt, wobei Information und Energie transportiert wird. Die zweite Variante (Telephon) beinhaltet das Konzept einer Welle. Hierbei bewegt sich Energie und Information, ohne dass ein materielles Objekt mittransportiert wird. Der gesamte Vorgang des Telephonierens läßt sich zergliedern in mehrere Subprozesse: Zunächst wird die Nachricht gedacht - d.h. im Gehirn laufen höchstkomplexe (zumindest bei einigen Menschen) elektrische Kollektivphänomene ab, die dann in Form eines elektrischen Nervenreizes als Spannungsimpuls an die Muskeln gesendet werden, die dann die passenden Kehlkopf-, Rachen- und Atemvorgänge ablaufen lassen. Es resultiert eine von den schwingenden Stimmbändern abgestrahlte Schallwelle. Diese Schallwelle dringt in den Telephonhörer ein und regt die Mikrofonmembran zu Schwingungen an, die dann elektromechanisch (Induktion!) in eine elektromagnetische Welle umgewandelt wird. Diese Welle läuft durch Kupferkabel oder auch Glasfaserkabel bzw. über eine Satellitenstrecke zum Empfänger, wo sie im Lautsprecher in Schallwellen zurückverwandelt wird. Im menschlichen Ohr werden diese Wellen wieder zu elektrischen Impulsen, die als elektromagnetische Wellen auf den Nervenleitern in das Gehirn des Empfängers gelangen und schließlich in dem genialen Antwortsatz 'Bo

KASTEN 1 Galileo Galilei

Galileo Galilei immatrikulierte sich am 5. September 1581 als Student in Pisa. Im Dom zu Pisa machte er 1583 erste Beobachtungen zur Pendelbewegung im Alter von 19 Jahren. Viviani, der erste Biograph von Galilei, der seit 1639 im Haushalt von Galilei lebte, schreibt dazu sinngemäß folgendes nach mündlichen Überlieferungen von Galilei: Galileo weilte im Dom zu Pisa und sein Blick fiel auf den sich pendelnd bewegenden Kronleuchter.



ABBILDUNG 2.1 Galileo Galilei studiert die Pendelbewegungen eines Leuchters im Dom zu Pisa. Gemälde von Luigi Sabatellio Museo di Fisica e Storia Naturale, Florenz

Diese Beobachtung machten sicher vor ihm Tausende besucher, aber Galilei versuchte, zu ergründen, warum der Leuchter schwang. Er bemerkte, dass die Pendelbewegungen, die Schwingungsausschläge, nach und nach geringer wurden. Aber die Zeit (gemessen an seinem eigenen Herzschlag) während es Hin- und Herpendelns die gleiche blieb. Es wurde ihm klar, dass man mit einem einfachen Pendel die Zeit messen könnte. Damit hat Viviani über die Geburtsstunde der modernen Dynamik berichtet.

In seiner letzten Lebenszeit hat Galileo dieses Phänomen wieder aufgearbeitet. 1641 war Galileo schon blind. Er bezahlte Evangelista Rorricelli ein Gehalt von 7 Scudi monatlich und konzipiert mit ihm - als sein letztes Werk - 1641 die Anwendung des Uhrpendels im Alter von 77 Jahren. Am

8. Januar 1642 starb Galileo Galilei. (Quelle: Im wesentlichen einer Internet Website entnommen, mit kleinen Ergänzungen versehen.)

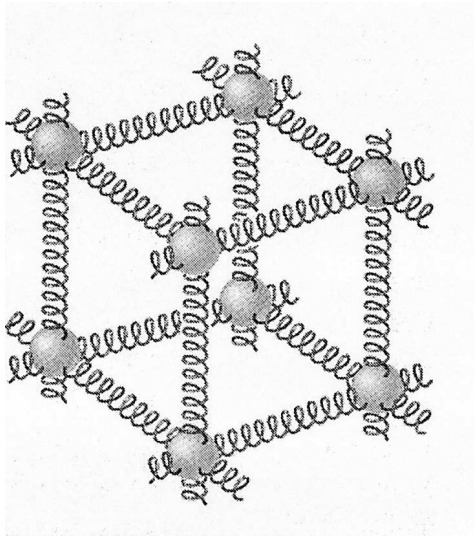


Abbildung 2.2: Die zwischenatomaren Kräfte kann man sich in gewisser Näherung als kleine Federn vorstellen. In der Abbildung sind die Atome durch kleine Kugeln repräsentiert. Einige der Federn wurden zur besseren 'Lesbarkeit' der Abbildung weggelassen. Siehst Du, welche man wohl ausgelassen hat?

ey' gipfeln.

In diese Veranstaltung werden wir uns mit den Grundlagen und Ausprägungen von verschiedensten Vorgängen beschäftigen, deren Gemeinsamkeit darin besteht, dass irgendwas schwingt oder dass sich eine Welle ausbreitet.

Nebenbei werden Hinweise zur Umsetzung in der Schule eingestreut. (Werden grün hervorgehoben)

Wir beginnen mit den Schwingungen.

Kapitel 3

Schwingungen

3.1 Einführung

Das Phänomen der Schwingungen sollte in der Schule in einen Kontext eingebunden werden.

Unter Kontextbindung versteht man ein methodisches Vorgehen, das zur Zeit (seit etwa dem Jahr 2000), in den Richtlinien des Gymnasiums vorgeschrieben wird. Hierbei wird der Stoff nicht mehr fachmethodisch strukturiert dargeboten, sondern in einen größeren alltäglichen Zusammenhang gestellt.

Beispiel: Schwingungslehre könnte unter dem Aspekt der Zeitmessung eingeführt werden. Hier sind viele Anknüpfungspunkte zur Lebenswelt der Schüler. Die Geschichte der Zeitmessung - also dem Bau von Uhren - ist eng verbunden mit dem Studium von regelmäßigen Vorgängen - den Schwingungen.

Man sollte allerdings die Kontextbindung nicht übertreiben - das ständige 'Herumreiten' auf ein und demselben sachlichen Hintergrund ist ermüdend. Hier sollte man für Abwechslung!

3.2 Grundlagen der Schwingungslehre und ihre Behandlung in der Schule

3.2.1 Fachtermini zur Schwingungslehre

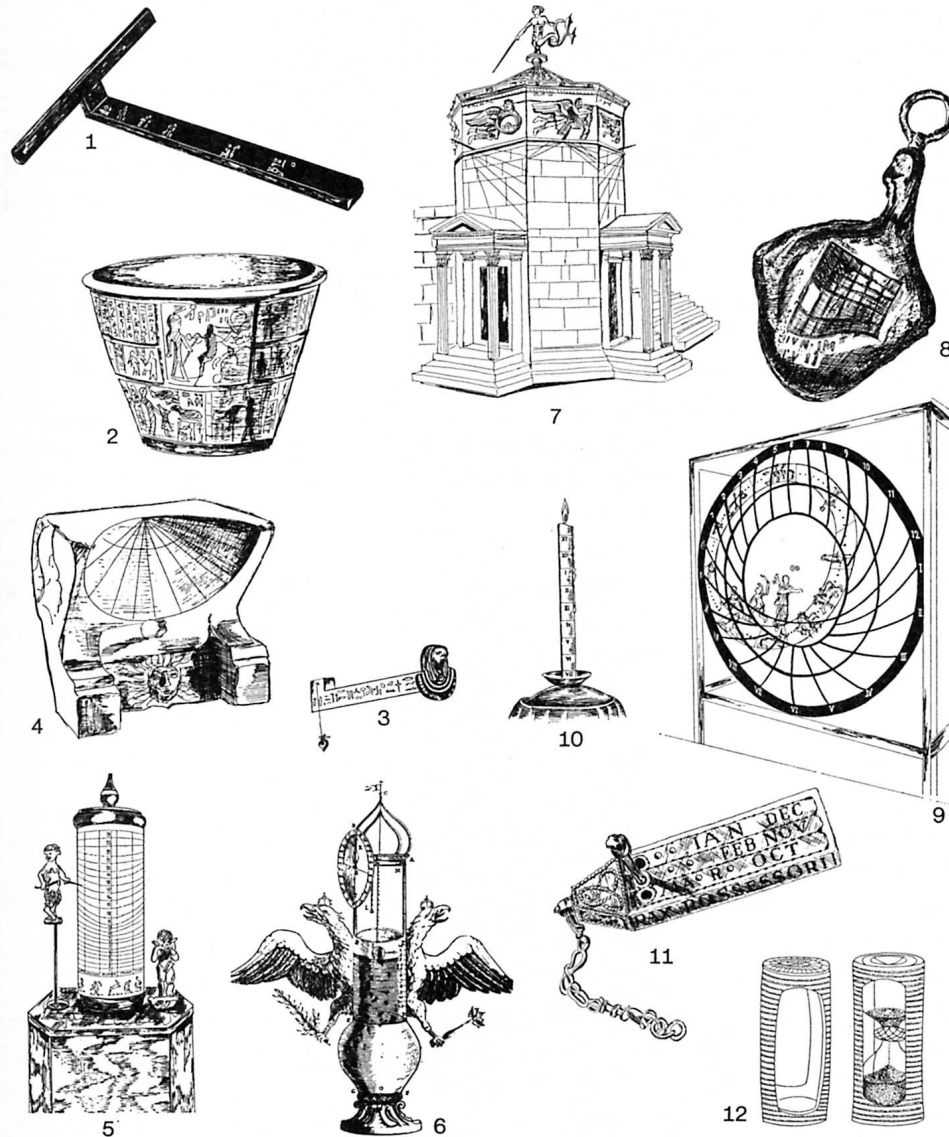
Schwingung (Definition)

Unter einer mechanischen Schwingung versteht man eine zeitlich periodisch sich wiederholende Bewegung, die auftritt, wenn ein Gleichgewichtszustand gestört wird und dabei Kräfte wirksam werden, die in Richtung auf die Gleichgewichtslage wirken.

Als Prototyp eines schwingenden Systems betrachten wir eine Schraubenfeder, an der ein Massenstück hängt. Zieht man das Gewicht etwas nach unten (oder hebt es etwas an) und läßt es dann los, so beginnt das Massenstück . auf - und ab zu schwingen.

In regelmäßigen Zeitabständen kehrt das System in den Anfangszustand zurück, um dann mit der Bewegung von neuem zu beginnen. In der Anfangsstellung besteht ein Gleichgewicht zwischen der auf den Massenpunkt nach 'unten' gerichteten Erdanziehungskraft und der nach 'oben' gerichteten Federkraft. Sobald der Körper die Gleichgewichtslage verläßt (hier durch die Hand des Experimentators verursacht), wirkt die Federkraft der

Elementaruhren



① Ägyptische Sonnenuhr, deren Seitenansicht die Hieroglyphe für Stunde darstellte, 3. Jh. v. Chr. ② Auslaufwasseruhr, Ägypten, 14. Jh. v. Chr. (Ägyptisches Museum Kairo). ③ Älteste erhaltene tragbare Sonnenuhr, um 600 v. Chr. (British Museum London). ④ Halbschalen-Sonnenuhr (»Skaphe«) von Berossos, um 270 v. Chr. ⑤ Einlauf-Wasseruhr des Ktesibios um 250 v. Chr. (Rekonstruktion nach einer Beschreibung des Vitruv im Wuppertaler Uhrenmuseum). ⑥ Wasseruhr des Archimedes, 230 v. Chr., nach einem Kupferstich von Athanasius Kircher. ⑦ »Turm der Winde« mit acht Sonnenuhren und einer Wasseruhr, erbaut 158 v. Chr. in Athen. ⑧ Römische Reisesonnenuhr (»Schinken von Portici«), 27 v. Chr.–79 n. Chr. ⑨ Die »Salzburger Wasseruhr« um 200 n. Chr. (Rekonstruktion im Wuppertaler Uhrenmuseum). ⑩ Kerzenuhr, wie sie von Kirchenvater Beda (673–735 n. Chr.) eingeführt wurde. ⑪ Reisesonnenuhr des Bischofs Alphege, um 1000 n. Chr. ⑫ Reisesanduhr, 16. Jh.

Abbildung 3.1: Einige sogenannte Elementaruhren - diese wurden vor der Erfindung des Pendels verwendet

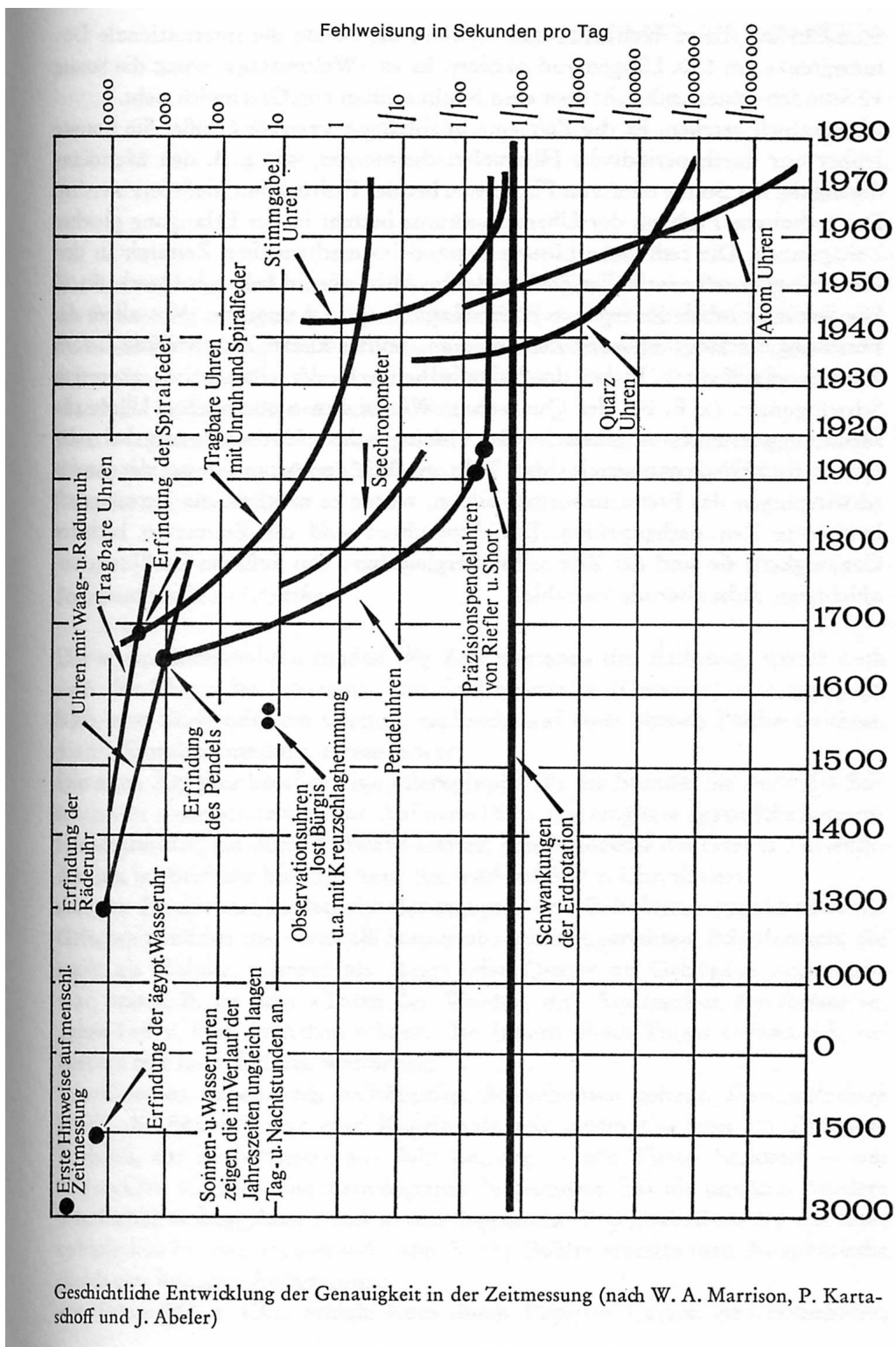


Abbildung 3.2: Die geschichtliche Entwicklung der Genauigkeit der Uhren

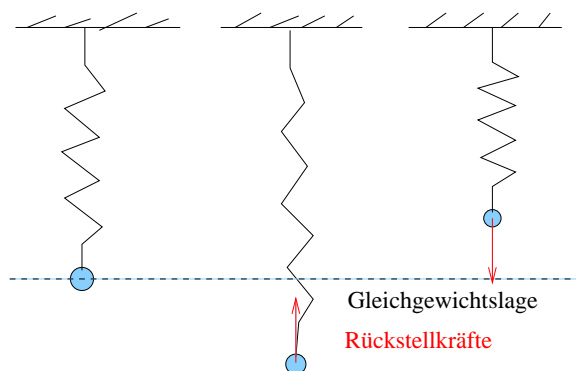


Abbildung 3.3: Ein Federschwerependel

Auslenkung entgegen. Diese 'Rückstellkraft' bewirkt eine Beschleunigung des Körpers in Richtung der Gleichgewichtslage. Beim Durchschwingen durch die Gleichgewichtslage wirkt sich allerdings die Trägheit der Masse aus und der Körper schwingt über die Gleichgewichtslage hinaus. Frage: Würde ein solches Federpendel auch im schwerefreien Raum schwingen¹?

Mechanische Schwingung eines Körpers (Definition)

Unter einer mechanischen Schwingung eines Körpers versteht man eine unter einer Einwirkung einer Rückstellkraft um eine Gleichgewichtslage des Körpers verlaufende Bewegung, bei der sich die Auslenkung des Körpers aus der Gleichgewichtslage periodisch wiederholt. (Abb. 3.3)

Die Bewegung wird durch die Trägheit des Körpers aufrecht erhalten.

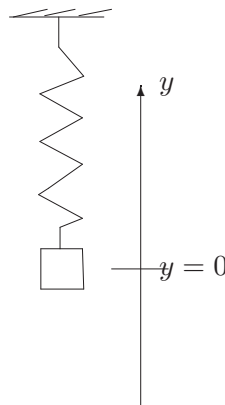
Beobachtet man die Bewegung des schwingenden Körpers etwas länger, so erkennt man unschwer, dass mit jeder Hin- und Herbewegung die Weite der Schwingung abnimmt. Die Schwingung ist **gedämpft**. Leider ist dies der Normalfall. Eine vollständige Vermeidung von Reibungseffekten ist in einem realen mechanischen System nicht möglich.

Eine idealisierte freie Schwingung, die stets den identischen Bewegungsablauf wiederholt, nennt man **ungedämpfte Schwingung**.

Eine ungedämpfte Schwingung ist ein räumlich und zeitlich periodischer Vorgang.

Auch hier wollen wir die Bewegung beschreiben. Die Auslenkung des Massenstücks aus der Ruhelage hängt von der Zeit ab. Nach Einführung eines Koordinatensystems (s. Skizze) kann man also für die zum Zeitpunkt t vorliegende Auslenkung schreiben $y = y(t)$. Man nennt die jeweils aktuell vorliegende Auslenkung y die **Elongation** des Schwingers. Den Absolutbetrag der größten vorkommenden Auslenkung nennt man **Amplitude**. Man schreibt dafür y_{max} .

¹Ja, die Rückstellkraft der Feder wirkt sowohl als Druck- als auch als Zugspannung!

**Def. Schwingungsdauer**

Die Schwingungsdauer T ist die Zeitdauer, die zwischen dem in gleicher Richtung erfolgenden Durchgang durch einen bestimmten y -Wert verstreicht.

Der Zusatz 'gleiche Richtung' ist wichtig, ohne diesen würde man nur eine halbe Schwingungsperiode erfassen (s. Kurve).

Bei einer Messung der Schwingungsdauer verwendet man zumeist den Durchgang durch einen der beiden Umkehrpunkte oder den Nulldurchgangspunkt. Dies ist aber lediglich durch die evtl. leichtere experimentelle Zugänglichkeit motiviert - im Prinzip sind alle Punkte der Bahnkurve gleichberechtigt.

Bei der (experimentellen) Bestimmung der Schwingungsdauer kann man etwa wie folgt vorgehen: Man mißt die Zeit t , die das System für n vollständige Schwingungen benötigt und berechnet dann T gemäß

$$T = \frac{t}{n}$$

Dies hat außerdem den Vorteil, dass kleinere zufällige Messfehler sich bei der Verwendung eines großen Wertes für n herausmitteln und die mittels der obigen Beziehung erhaltene Schwingungsdauer dann zumeist genauer als das Ergebnis bei einer einzelnen Schwingung ist.

3.2.2 Sichtbarmachen von Schwingungen

In der Schule sollte man dem Beobachtungsvorgang viel Aufmerksamkeit schenken und mit den Schülern diesen Aspekt naturwissenschaftlichen Arbeitens thematisieren. Bei Schwingungen bietet es sich an, gewisse Verfahren anzusprechen und zu demonstrieren.

- **Kaum Sichtbares sichtbar machen** Die heutige Physik hat es geschafft, sowohl das ganz Große als auch das ganz Kleine zu erforschen. Dabei sind viele der Phänomene ja mit dem unbewaffneten Auge gar nicht mehr sichtbar. Die Physiker verwenden dann indirekte Verfahren. Dies kann man auch an 'einfachen' Problemen, wie dem Schwingen einer Stimmgabel veranschaulichen.

Die Schwingung einer Stimmgabel ist mit bloßem Auge kaum erkennbar. Sichtbarmachen: Eintauchen in Wasser (Spritzer!) oder Tischtennisball an Schnur verwenden, der bei Berühren des Stimmgabelarms heftige Bewegungen ausführt (Indikator). Auch kann man eine speziell hierfür gefertigte Stimmgabel mit oben angebrachter

Nadel verwenden. Diese wird auf dem Overheadprojektor über eine vorher eingerußte Glasscheibe gezogen (Schwingungslinie, Dämpfung).

- **Kurven und Diagramme verwenden**

Das Zeichnen von Kurven und anderen Diagrammen ist dem Physiker bereits so in Fleisch und Blut übergegangen, dass er meist gar nicht merkt (und auch nicht mehr merken muss), welche Abstraktionsschritte dabei eigentlich vorgenommen werden. Aus diesem Gewöhnungszustand heraus gehen (Physik)Lehrer auch oft zu schnell über diese Stufe hinaus, was einige Schüler dann ratlos zurücklässt. Wie kommen beispielsweise die 'querliegenden'Kurven zu Schwingungen zustande, obwohl die Feder doch auf- und abschwingt? Das Fadenpendel gar schwingt hin und her (in zwei Dimensionen!) Hier sollte man den Schülern die Entstehung der Kurven mit geeigneten Experimenten veranschaulichen.

Möglichkeiten: *Der schwingende Sandtrichter*. Der aus dem Trichter ausfließenden Sand schreibe auf einer unter dem Pendel durchgezogenen schwarzen Pappe gut erkennbar eine Schwingungskurve. Die gleichförmig durchgezogene Pappe wird später im Diagramm dann durch die Zeitachse repräsentiert. Hier kann auch ein Stift mit Papier verwendet werden, der in einem durch einen Tonnenfuß gestecktes Führungsröhrchen steckt. Der Tonnenfuß schwingt über einem Papier.

Mit höherem apparativen Aufwand kann man auch ein **Oszilloskop** verwenden. (Mikrofon an den Eingangskanal anschließen) Dann kann man auch die Schwingung einer Stimmgabel sichtbar machen. Diese Darstellung ist aber dem Sandtrichter aus Gründen geringerer Anschaulichkeit deutlich unterlegen!

3.2.3 Harmonische Schwingungen

3.2.3.1 Kinematik harmonischer Schwingungen

Wir unterscheiden zwischen zwei Klassen von ungedämpften Schwingungen. Zum einen hat man die sogenannten **harmonischen** Schwingungen. Hierbei handelt es sich um eine Schwingung, deren Elongation-Zeit Verhalten sinus- bzw. kosinusartig ist. Zum anderen hat man alle Schwingungen, die nicht harmonisch sind.

Das Elongations-Zeit Gesetz einer harmonischen Schwingung hat die Gestalt

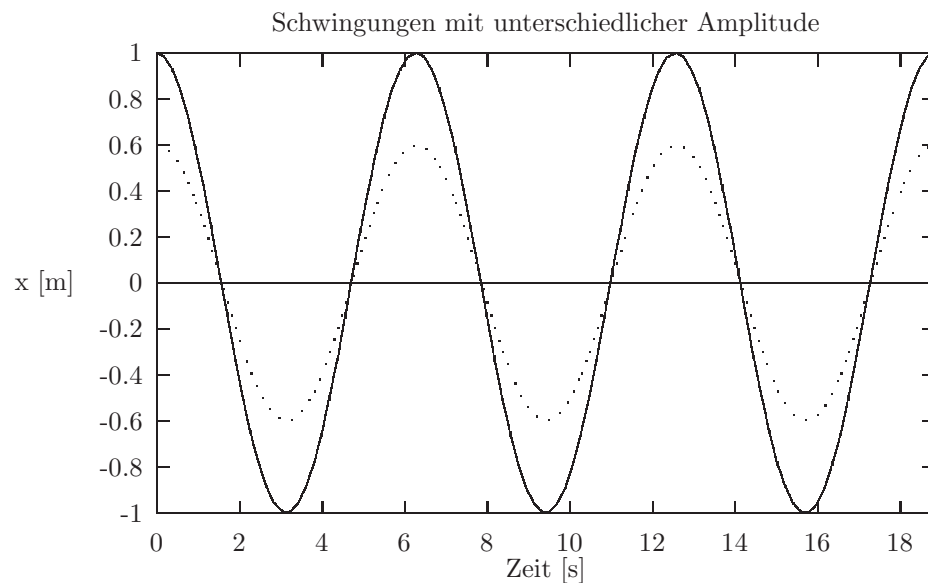
$$x(t) = x_{max} \cos(\omega t + \varphi)$$

Warum sind harmonische Schwingungen so wichtig?

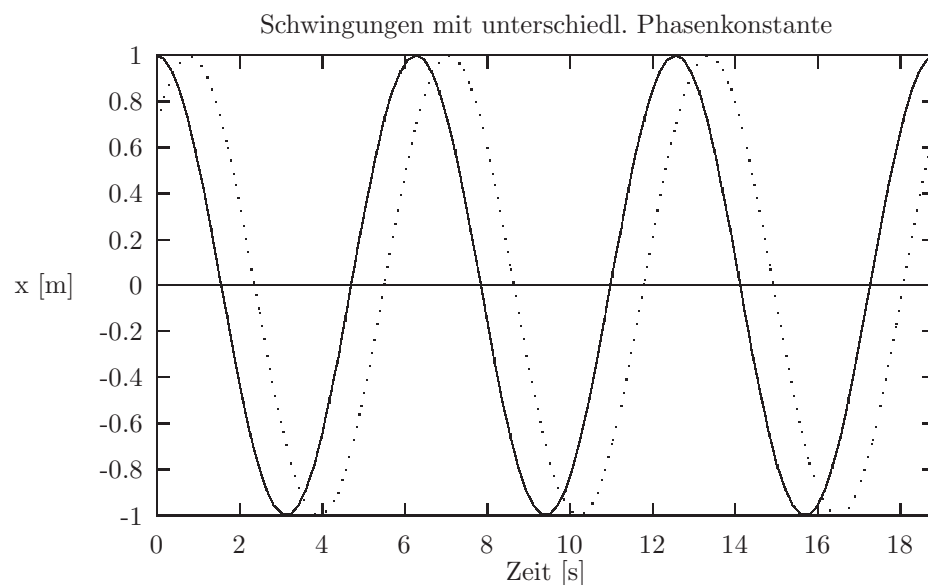
- Fast alle mechanischen schwingungsfähige Systeme führen solche Schwingungen aus, wenn man nur die Anfangsauslenkung aus der Gleichgewichtslage genügend klein macht.
- Beliebige periodische Bewegungen können nach einem Satz von Fourier als Überlagerung von harmonischen Schwingungen aufgefasst werden (Fourierentwicklung)

Hierbei sind x_{max} , ω und φ Konstanten. t ist die Zeit. x_{max} ist die Amplitude der Schwingung. Die Bedeutung der Konstanten ω und φ wird noch geklärt.

Bekanntlich nimmt die Kosinus-Funktion nur Werte im Intervall $[-1; 1]$ an. Multiplikation mit der Amplitude x_{max} streckt bzw. staucht die Kurve. Die Auswirkung verschiedener Amplituden ist im folgenden Bild dargestellt:



Die sich mit der Zeit verändernde Größe $\omega t + \varphi$ im Argument des Kosinus nennt man **Phase** der Schwingung. Die **Phasenkonstante** φ 'verursacht' eine Verschiebung der Kurve in t-Richtung - durch geeignete Wahl dieser Konstanten kann man also den Anfangswert der Elongation zum Zeitpunkt $t = 0$ festlegen.



Es bleibt noch die Bedeutung von ω zu klären: Die Elongation muss nach einer Schwingungsdauer T wieder den gleichen Wert annehmen, also $x(t) = x(t+T)$ für alle t . Um unsere Überlegung etwas zu vereinfachen, setzen wir $\varphi = 0$. Es folgt

$$x_{max} \cos(\omega t) = x_{max} \cos(\omega(t+T))$$

Da sich die Werte der Kosinusfunktion alle 2π wiederholen, folgt

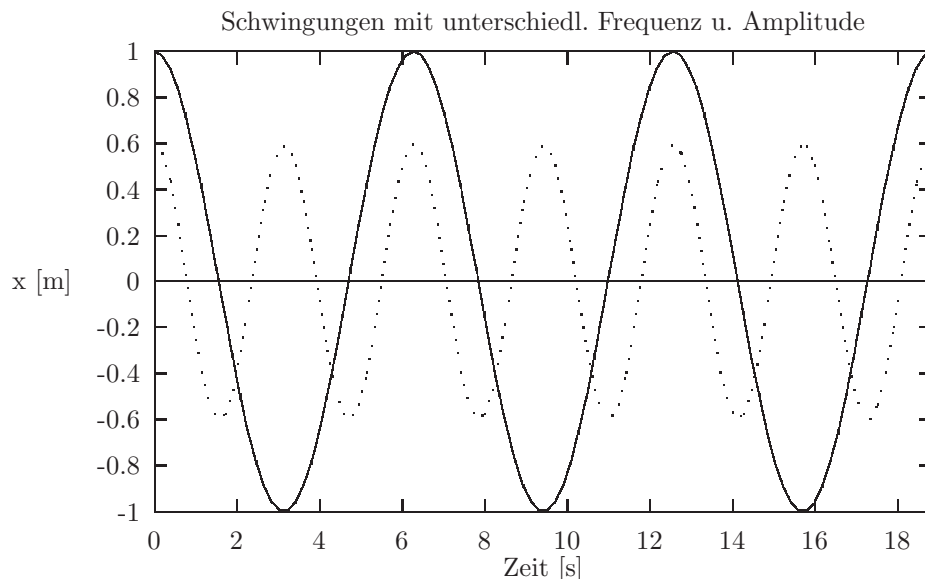
$$\omega(t+T) = \omega t + 2\pi \implies \omega T = 2\pi$$

Dies liefert einen alten Bekannten:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f} \quad (3.1)$$

Wir haben die Kreisfrequenz ω bereits im Zusammenhang mit Kreisbewegungen kennengelernt. Es ist nicht zufällig, dass hier eine Verbindung besteht: in einem Experiment (s. Abbildung 3.6) wird der Zusammenhang von harmonischen Schwingungen mit Kreisbewegungen verdeutlicht werden.

In der Abbildung sind zwei harmonische Schwingungen dargestellt, die sich in ihrer Schwingungsdauer und damit auch in ihrer (Kreis)Frequenz unterscheiden:



Bei der nun folgenden Herleitung der Bewegungsgesetze einer harmonischen Schwingung ist zu beachten, dass meistens zum Zeitpunkt der Behandlung des Stoffes in der Schule (Klasse 11) das Thema Differentialrechnung im Mathematikunterricht erst startet - es fehlen mithin fast alle Grundbegriffe. Der Ableitungsbegriff ist - wenn überhaupt - gerade entwickelt worden. Also Vorsicht!

Auf jeden Fall sollte man die neuen Konzepte der Dynamik bzw. Kinematik der in der 11.1 behandelten Mechanik des Massenpunktes gegenüberstellen und so an Vertrautes erinnern:

Def.: Die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ zum Zeitpunkt t ist der Grenzwert der mittleren Geschwindigkeit für immer kleiner werdende Zeitabstände der Messpunkte, gemessen von t aus. In mathematischer Formelsprache:

$$v(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{x(t) - x(t_1)}{t - t_1}$$

Def.: Die Momentanbeschleunigung $a(t)$ zum Zeitpunkt t ist der Grenzwert der mittleren Beschleunigung für immer kleiner werdende Zeitabstände der Messpunkte, gemessen von t aus. In mathematischer Formelsprache:

$$a(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{v(t) - v(t_1)}{t - t_1}$$

Mit Hilfe der Differentialrechnung kann man nun kürzer sagen: Die Momentangeschwin-

digkeit $v(t)$ ist die zeitliche Ableitung der Orts-Zeit Funktion $x(t)$:

$$v(t) = \dot{x}(t)$$

Zum Beispiel hat man für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 \implies v(t) = \dot{x}(t) = at$$

Genauso kann man vorgehen, um die Geschwindigkeit und die Beschleunigung eines harmonisch schwingenden Körpers zu berechnen: Hierzu benötigt man (Formelsammlung!): Die Ableitung der Sinusfunktion ist die Kosinusfunktion, die Ableitung der Kosinusfunktion ist das Negative der Sinusfunktion. In symbolischer Schreibweise (der \rightsquigarrow Pfeil soll einmaliges Ableiten bedeuten):

$$\sin \rightsquigarrow \cos \rightsquigarrow -\sin \rightsquigarrow -\cos \rightsquigarrow \sin$$

(Hübsch - nicht wahr?) Hiermit liefert die Kettenregel der Differentialrechnung für die Geschwindigkeit v des schwingenden Körpers:

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega x_{max} \sin(\omega t + \varphi)$$

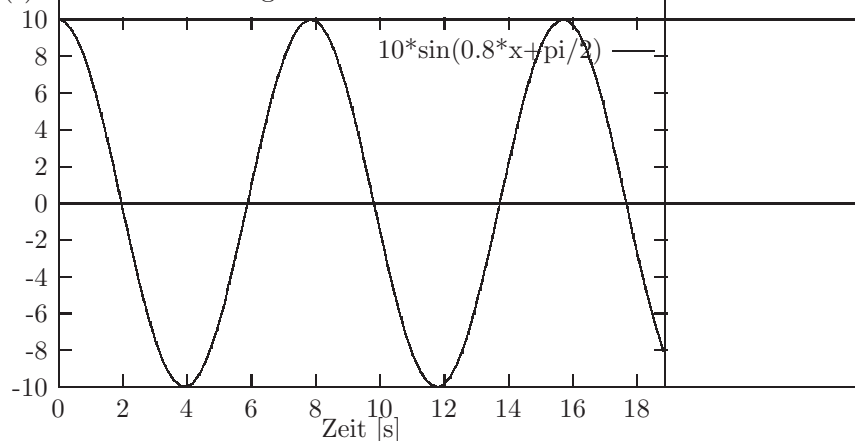
und

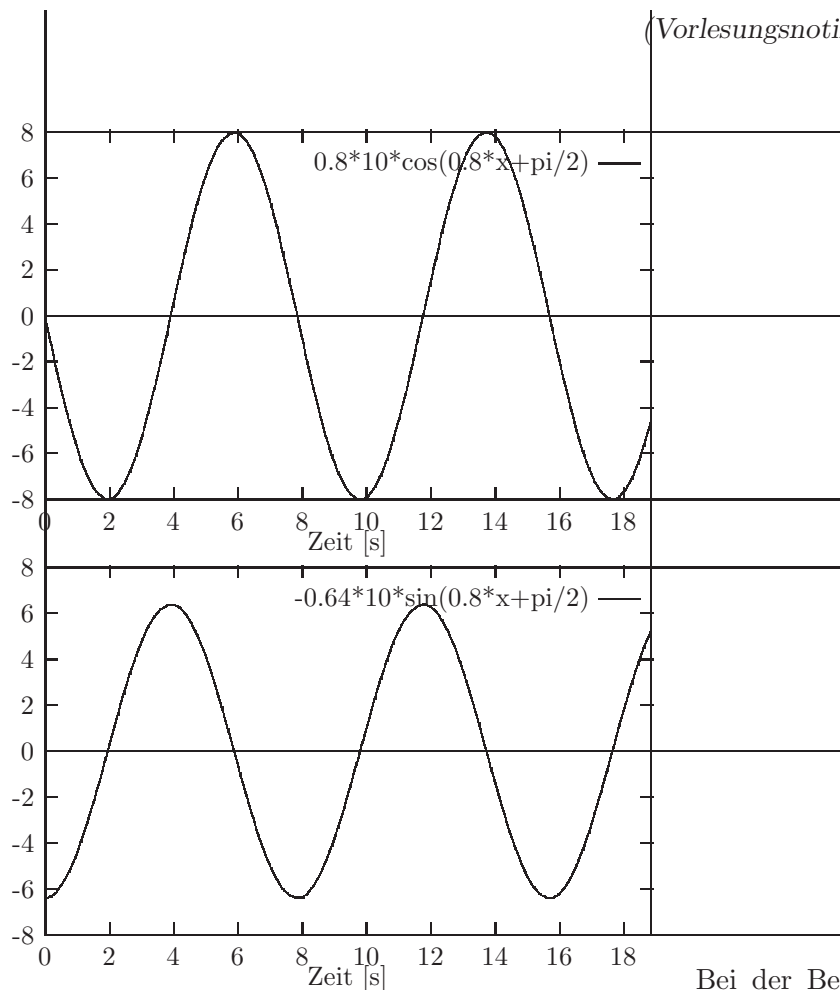
$$a(t) = \ddot{x}(t) = \dot{v}(t) = -\omega^2 x_{max} \cos(\omega t + \varphi)$$

Die letzte Gleichung kann man auch als

$$\boxed{\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)} \quad (HOZ) \quad (3.2)$$

schreiben. Hier wird also ein Zusammenhang zwischen einer Funktion (x) und ihrer zweiten Ableitung (\ddot{x}) hergestellt. Dies nennt man bekanntlich eine **Differentialgleichung**. Die obige Differentialgleichung ist - nebenbei gesagt - vermutlich eine der in der Physik am häufigsten auftretenden Differentialgleichungen schlechthin! Das Kürzel HOZ steht dabei für **Harmonischer Oszillator**. In der englischsprachigen Literatur wird dies oft mit SHO (simple harmonic oscillation) abgekürzt. Man kann sich die oben gefundenen Resultate für v und a am Schaubild klarmachen! Hierzu sind die drei Funktionsschaubilder zu $x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ untereinander angeordnet:





Bei der Betrachtung dieser Diagramme lernt man sehr viel über die Kinematik von harmonischen Schwingungen:

- Die größte Geschwindigkeit erreicht ein harmonisch schwingender Körper in den Nulldurchgängen, also beim Passieren der Gleichgewichtslage.
- Während er die Punkte maximaler Elongation ('Umkehrpunkte') durchläuft, ändert sich die Elongationsveränderung vom 'Zunehmen' hin zum 'Abnehmen' bzw. umgekehrt. Die Elongationsveränderung ist dabei für einen 'kurzen Moment' gleich Null, d.h., dass die Geschwindigkeit in diesen Momenten gleich Null ist.
- Während er die Gleichgewichtslage durchläuft, ändert sich die Geschwindigkeitsveränderung vom 'Zunehmen' hin zum 'Abnehmen' bzw. umgekehrt. Die Geschwindigkeitsänderung ist dabei für einen 'kurzen Moment' gleich Null, d.h., dass die Beschleunigung in diesen Momenten gleich Null ist.

Eine andere Darstellung dieser Abfolge ist in einer weiteren Abbildung zu finden. Dort ist die Bewegung einer Kugel zu verschiedenen Zeitpunkten erkennbar. Als Pfeil ist die jeweilige Geschwindigkeit eingezeichnet.

3.2.3.2 Kreisbewegung und harmonische Schwingungen

Der in der Überschrift angekündigte Zusammenhang zwischen einer gleichförmigen Kreisbewegung und einer harmonischen Schwingung wurde möglicherweise erstmalig von Galilei entdeckt. Galilei hat bekanntlich im Zusammenhang mit seinen naturwissenschaftlichen Forschungen das in Holland von **Hans Lippershey** im Jahr 1608 entdeckte Fernrohr nachgebaut und in Fachkreisen allgemein bekannt gemacht. Die dabei verwendete Linsen-anordnung heißt seitdem **Galilei Fernrohr**. Dieses Gerät mit ca. 30 facher Vergrößerung

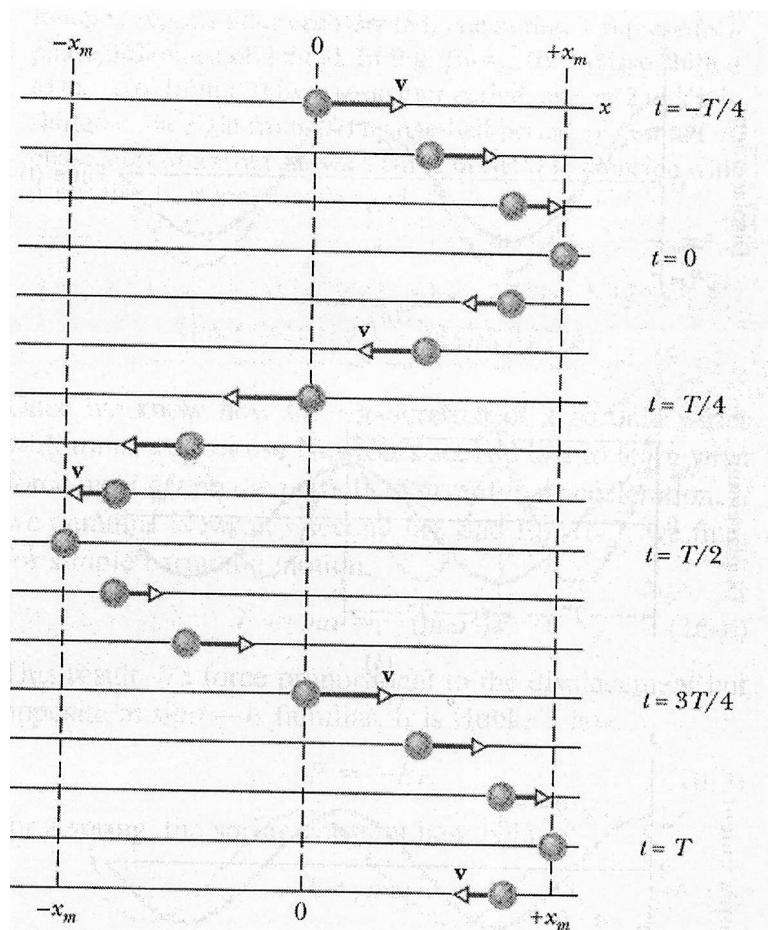


Abbildung 3.4: Schnappschüsse einer Schwingungsbewegung. Das Teilchen bewegt sich periodisch zwischen den x -Werten $-x_m$ und x_m hin und her. Man sieht, dass die Geschwindigkeit (Pfeile) in den Nulldurchgängen maximal ist (längste Pfeile) und in den Umkehrpunkten jeweils gleich Null ist.

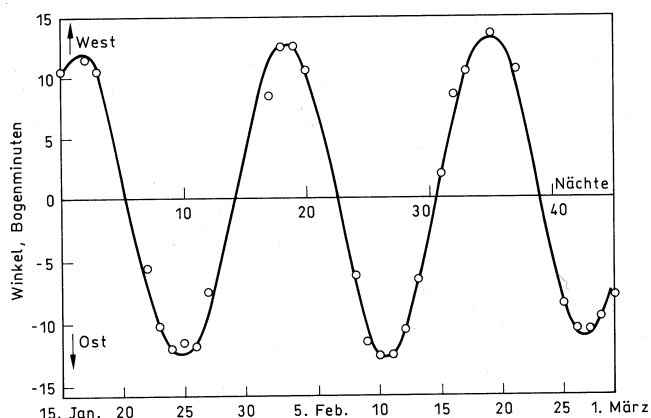
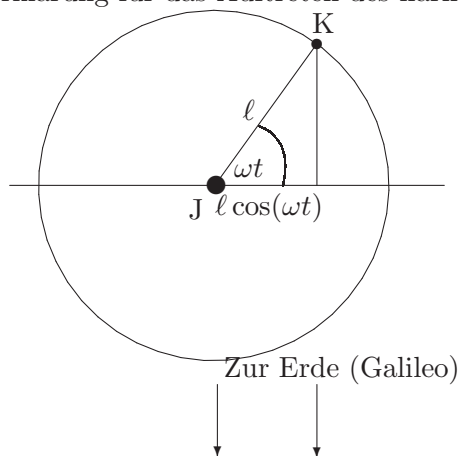


Abbildung 3.5: Beobachtungsdaten Galileis und Kurvenfit

verwendete Galilei zu astronomischen Studien, wobei er speziell den Jupiter beobachtete und dabei dessen Monde entdeckte. Bei der systematischen Dauerbeobachtung der Monde stellte Galilei fest, dass der Abstand zwischen Jupiter und dessen Mond Kallisto regelmäßig kleiner und größer wurde. In der Abbildung sind die von Galileo aufgezeichneten Messdaten (Originalwerte!) zusammen mit einer von einem Computer ausgerechneten Ausgleichskurve (Kurvenfit) dargestellt. Der Abstand von Kallisto und Jupiter ist in Bogenminuten angegeben ($1' = \frac{1}{60}^\circ$).

Das harmonische Zeitgesetz mit einer Periodendauer von $16\frac{3}{4}$ Tagen ist deutlich zu erkennen.

Als Erklärung für das Auftreten des harmonischen Zeitgesetzes soll die Skizze dienen:



Verallgemeinernd kann man also sagen:

Verläuft eine gleichförmige Kreisbewegung in der x-y-Ebene, so vollführt die senkrechte Projektion des rotierenden Radiuszeigers auf den Koordinatenachsen eine harmonischen Bewegung.

3.2.3.3 Dynamik harmonischer Schwingungen: das Kraftgesetz

Im Unterricht haben wir im Experiment gezeigt, dass sich das Schattenbild eines rotierenden Zeigers mit der Schwingungsbewegung eines Federschwerependels synchronisieren läßt. Hieraus kann man schließen, dass das Elongation-Zeit Gesetz bei einem solchen Pen-

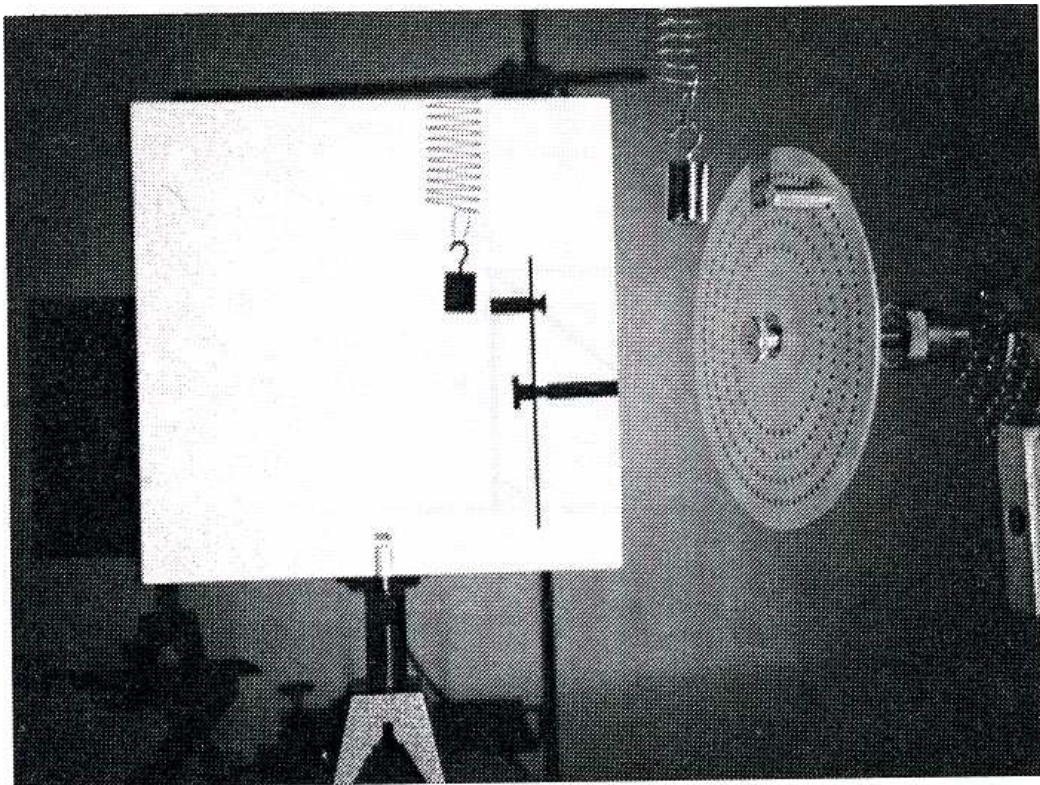
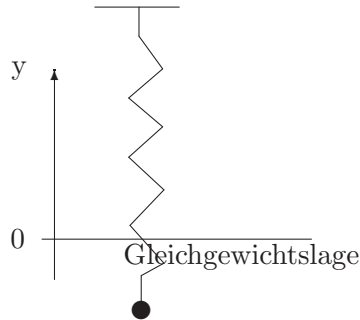


Abbildung 3.6: So etwa kann ein Aufbau aussehen, wie man ihn im Physikunterricht an dieser Stelle zeigen würde. Durch Schattenprojektion einer rotierenden Scheibe wird die Synchronisierbarkeit von Feder-schwingung und einer der beiden Komponenten der Kreisbewegung verdeutlicht.

del harmonisch, also kosinus-bzw. sinusartig ist.

Dieser experimentelle Befund ist allerdings wegen der nur unzulänglichen Präzision (Problem der Phasenkonstanten und der Frequenz) möglicherweise noch nicht ganz überzeugend. Hier deshalb eine weitere Überlegung zum Bewegungsgesetz eines Federschwerependels:



Zwei Fakten sind wichtig:

1. Die Rückstellkraft F ist stets entgegengerichtet zur Elongation y
2. Gemäß dem **Hooke'schen Gesetz** gilt

$$|F| = k|y|,$$

wobei k die Federkonstante der Feder ist.

In Kombination von 1. und 2. erhält man

$$F = -ky.$$

Andererseits gilt nach Newton:

$$F = ma,$$

wobei m die an der Feder angebrachte Masse und a die Beschleunigung ist. Wir haben oben gelernt, dass man die Beschleunigung als zweite Zeitableitung der Elongation y erhält, also $\ddot{y} = a$. Insgesamt liefert dies:

$$m\ddot{y}(t) = -ky(t) \implies \ddot{y}(t) = -\frac{k}{m}y(t),$$

was gerade eine Gleichung vom HOZ-Typ (3.2) ist. Vergleich liefert für die Kreisfrequenz ω :

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \implies \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}.$$

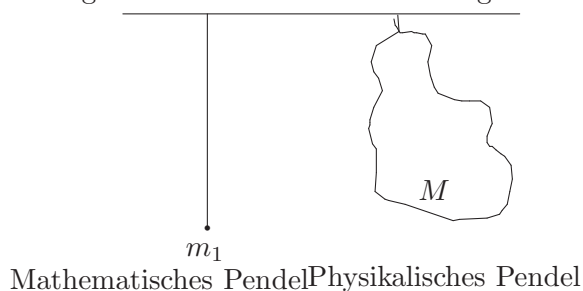
Zusammen mit der allgemein gültigen Beziehung $\omega = \frac{2\pi}{T}$ zwischen Kreisfrequenz ω und Periodendauer T folgt

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} \quad (3.3)$$

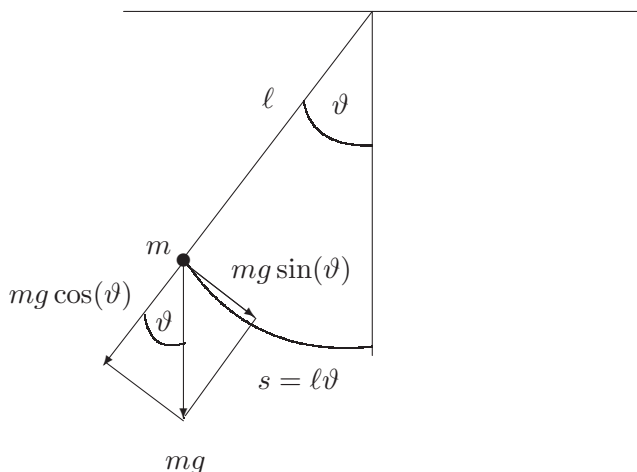
Merke: Je härter die Feder ist, desto kleiner ist die Schwingungsdauer. Je größer die angehängte Masse ist, um so größer ist die Schwingungsdauer. Allerdings ist der Zusammenhang nicht proportional, da ja noch die Wurzel auftritt!

3.2.3.4 Schwingungen des mathematischen Pendels ('Fadenpendel')

Ein Fadenpendel besteht aus einem als punktförmig angenommenen Massenstück m , das an einem Faden hängt, dessen Eigenmasse vernachlässigt werden kann. Wegen dieser Idealisierung wird ein solches Pendel auch als **mathematisches Pendel** bezeichnet. Hiervon zu unterscheiden sind die sogenannten **physikalischen Pendel**, bei denen die räumliche Verteilung der Pendelmasse berücksichtigt werden muss.



Zur Untersuchung des Schwingungsverhaltens eines Fadenpendels zeichnen wir ein Kraftdiagramm: Die nun folgende Analyse ist mit Schülern der Mittelstufe wohl realistischlicherweise nicht durchführbar, da Vektorrechnung nicht paratsteht (Geht erst flüssig in der 12.Klasse, wenn analytische Geometrie behandelt wurde, ansonsten muss der Physiklehrer einen 'Steilkurs' einschieben - nicht empfehlenswert!)



Man zerlegt die in Fadenrichtung wirkende Kraft in zwei orthogonale Anteile - einen zum Faden parallelen Anteil F_{\parallel} , dessen Wirkung durch die Fadenspannung kompensiert wird, und einen zur Fadenrichtung senkrechten Anteil F_{\perp} . Diese zum Faden orthogonale Kraftkomponente ist die für eine Schwingung notwendige Rückstellkraft. Sie wirkt stets in Richtung der Gleichgewichtslage $\vartheta = 0$. Bei der Winkelgröße ϑ ist zu beachten, dass diese

im Bogenmaß angegeben wird. Der Zeichnung entnimmt man

$$\begin{aligned} F_{\parallel} &= mg \cos(\vartheta) \\ F_{\perp} &= mg \sin(\vartheta) \end{aligned}$$

Für die Rückstellkraft F gilt somit (Newton):

$$F = m\ddot{s} = -mg \sin(\vartheta), \quad (3.4)$$

wobei das Minuszeichen berücksichtigt, dass die Kraft rückstellend wirkt. An dieser Stelle der Herleitung wird ein für 'Anfänger' oft verwirrender Schritt gemacht. Für Schüler ist hier eine Klippe: Warum macht man extra Fehler? Die bis hier mühsam hergeleitete Gleichung wird nämlich einer sogenannten **Näherung** unterzogen. Wir nehmen an, der Winkel ϑ sei 'klein'. Da er im Bogenmaß gemessen wird, heißt dies, dass $\vartheta \approx 0$ ist. Derartig kleine Winkel haben die Eigenschaft, dass für sie gilt: $\sin(\vartheta) \approx \vartheta$. Man probiere mit dem Taschenrechner aus: Ein Winkel von 5° im Gradmaß entspricht 0.0873 im Bogenmaß. Es ist $\sin(0.0873) = 0.0872$. Bei der Ersetzung von $\sin(\vartheta)$ durch ϑ begeht man also bei 5° einen Fehler von ca. 0.1%. Bei kleineren Winkeln ist der Fehler noch kleiner. Man nennt die Ersetzung der nichtlinearen Funktion \sin durch das Argument auch **Linearisierung des Problems**. Diese Linearisierung hat einen großen Vorteil für die Bestimmung der Lösung der obigen Differentialgleichung 3.4: Wir ersetzen die Bogenlänge s durch $\ell\vartheta$, benutzen, dass $\ell = \text{const.}$, also $\ddot{s} = \ell\ddot{\vartheta}$ ist und erhalten die linearisierte Differentialgleichung:

$$m\ell\ddot{\vartheta} \approx -mg\vartheta. \quad (3.5)$$

Division mit $m\ell$ liefert (\approx durch $=$ ersetzt):

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{\ell}\vartheta, \quad (3.6)$$

was eine Gleichung vom HOZ-Typ ist! Die Winkelweite ϑ vollführt also - bei kleinen Amplituden ϑ_m - harmonische Schwingungen. Vergleich mit (3.2) liefert für die Kreisfrequenz ω und die Schwingungsdauer T des Fadenpendels

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}} \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}} \quad (3.7)$$

Anmerkungen:

- Merke: Je größer die Fadenlänge ist, desto größer wird die Schwingungsdauer (monotone Abhängigkeit, keine Proportionalität!)
- Merke: Die Schwingungsdauer ist unabhängig von der Masse des Pendelkörpers.
- Merke: Die Schwingungsdauer hängt vom Ortsfaktor ab: das ist anders als beim Federschwerependel!
- Merke: Die Schwingungsdauer ist unabhängig (im Gültigkeitsbereich der obigen Näherungen) von der Amplitude s_m bzw. ϑ_m der Schwingung.
- Auch für den Fall 'großer' Amplituden des Fadenpendels ist die Berechnung der Schwingungsdauer möglich. Diese exakte Rechnung erfordert allerdings mathematische Methoden, die weit über den Schulstoff hinausgehen

Einschub: Die Differentialgleichung, die wir oben erst nach einer Linearisierung lösen konnten, kann auch exakt gelöst werden. Die (exakte) Schwingungsdauer T_x ergibt sich zu

$$T_x = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} K\left(\sin\left(\frac{\vartheta_m}{2}\right)\right).$$

Hierbei ist K ein sogenanntes **elliptisches Integral 1. Art**²:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\alpha)}} d\alpha \approx \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{4}k^2 + \dots \right\}$$

Rechts vom \approx -Zeichen steht eine brauchbare Näherung (Reihenentwicklung) für das exakte Integral. Die Pünktchen bedeuten, dass noch unendlich viele weitere Summanden folgen. Die Schwingungsdauer T_x ist also in diesem Fall von der Amplitude, das heisst von dem Maximalausschlag ϑ_m abhängig. Verwendet man die erste Näherung für $K(k)$ mit $k = \sin(\frac{\vartheta_m}{2})$, so erhält man als 'besseren Wert' statt $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ den Ausdruck

$$T_x = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \left(\sin\left(\frac{\vartheta_m}{2}\right)\right)^2 \right)$$

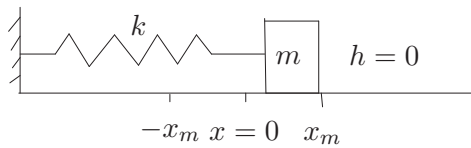
Für genauere Rechnungen muss man weitere Summanden in der Entwicklung von $K(k)$ erarbeiten oder gleich $K(k)$ numerisch mit dem Computer berechnen.

Ende des Einschubs

3.2.3.5 Der Energieerhaltungssatz bei harmonischen Schwingungen

Wir betrachten ein abgeschlossenes System bestehend aus einem auf einer als reibungsfrei angenommenen Unterlage gleitenden, an einer Spiralfeder (mit Konstante k befestigten) Massenstück m . (s. Skizze)

²Der Name 'elliptisches Integral' stammt daher, dass diese Integralart erstmals bei der Berechnung der Bogenlänge eines Ellipsenstücks auftrat.



Die potentielle Energie dieses Systems ist vollständig durch die Auslenkung aus der Ruhelage der (entspannten) Feder bei $x = 0$ festgelegt. Befindet sich das System innerhalb eines Gravitationsfeldes, so verfügt man über die Freiheit der Wahl des Nullpunkts des gravitativen Potentials und setzt $h = 0$ auf dem Niveau des Massenschwerpunkts. Dann kann man den Einfluss der Gravitation vergessen. Für die (elastistische) potentielle Energie E_{pot} gilt

$$E_{pot}(t) = \frac{1}{2} k x^2(t) = \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Hier sind zwei Bemerkungen fällig:

1. Die potentielle Energie ist zeitabhängig, da sich die Federspannung mit der Zeit verändert - also insbesondere ist die potentielle Energie allein nicht konstant!
2. Man unterscheide sorgfältig zwischen $\cos^2(A)$ wie es in der Formel auftritt und $\cos(A^2)$ (kommt in der Formel nicht vor!).

Der zweite Energiebeitrag zur gesamten Energie des Systems ist verknüpft mit der Bewegung selbst (kinetische Energie):

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2} m v^2(t) = \frac{1}{2} \omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Ersetzen von ω^2 durch $\frac{k}{m}$ liefert

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2} \frac{k}{m} x_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Für die Gesamtenergie des Systems E folgt:

$$\begin{aligned} E &= E_{kin}(t) + E_{pot}(t) \\ &= \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} \frac{k}{m} x_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} \frac{k}{m} x_m^2 (\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)) \end{aligned}$$

Da für alle Winkel α die Beziehung

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

gilt (also auch für $\alpha = \omega t + \varphi$) folgt

$$E = E_{kin}(t) + E_{pot}(t) = \frac{1}{2} \frac{k}{m} x_m^2 = \text{const.}$$

Die Energie E hängt lediglich ab von der Federkonstanten k , der Masse m und der Amplitude x_m .

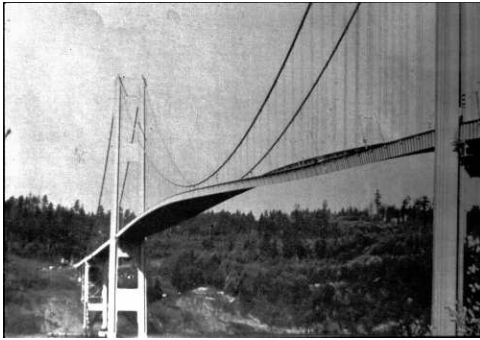


Abbildung 3.7: Die sich windende Brücke)



Abbildung 3.8: Der Einsturz

3.3 Erzwungene Schwingungen und Resonanz

Wir haben bislang die Systemgrenzen so gewählt, dass das jeweilige schwingende Objekt sozusagen sich selbst überlassen war - es führte sogenannte **freie Schwingungen** aus. Es wurde keine Energie von außen zugeführt. Führt man dem System dagegen periodisch Energie zu - treibt es sozusagen an - so lässt sich ein interessanter Effekt beobachten. Jeder hat wohl schon einmal eine Kinderschaukel angetrieben. Den größten 'Effekt' erreicht man dann, wenn man den Moment des Anstoßens richtig wählt. Das Anstoßen muss also mit der 'richtigen' Frequenz und der 'richtigen' Phase erfolgen. Die von der Schaukel ausgeführten Schwingungen nennt man **erzwungene Schwingungen**.

Im Unterschied zur freien Schwingung sind also bei der erzwungenen Schwingung zwei Frequenzen im Spiel: zum einen die sogenannte **Eigenfrequenz** ω_0 des Systems und zum anderen die Anregungsfrequenz ω . Die starke Abhängigkeit der Größe der Amplitude von der verwendeten Anregungsfrequenz nennt man **Resonanzeffekt**. Weitere Beispiele für solche sogenannten **Resonanzerscheinungen** sind:

1. Der Einsturz der Tacoma Bridge im Jahre 1940 (siehe den in der Vorlesung gezeigten Videofilm). Zwei Standbilder aus dem Film sind oben zu sehen.
2. Der an marschierende Soldaten gerichtete Befehl, vor der Überquerung von Brücken den Gleichschritt abzustellen.
3. Der in der Tasse schwappende Kaffee, wenn man mit der Tasse spazierengeht und die falsche Schrittfrequenz vorliegt.
4. Der Trampolinspringer, der durch geeignete Abstimmung einen besonders hohen 'Rückfederungseffekt' erzielt.

Sehr wichtig sind Resonanzerscheinungen im mikroskopischen Bereich. Die Erwärmung von Stoffen im Mikrowellenherd beruht auf einer resonanten Anregung von Schwingungen von Wassermolekülen. Auch findet man Resonanzen in der Schallerzeugung innerhalb von Musikinstrumenten. Abschließend seien noch auf Resonanz abgestimmte elektrische Systeme (Schwingkreise) genannt, wie man sie z.B. in Verstärkern findet. Die mathematische Behandlung von erzwungenen Schwingungen ist etwas komplizierter als der der freien

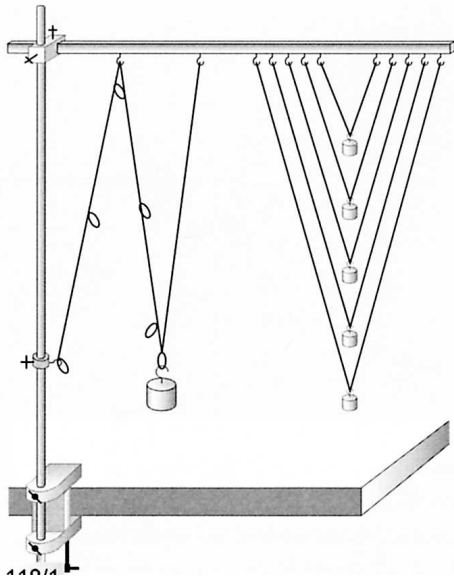


Abbildung 3.9: Ein Aufbau, den man sich selbst mit Material aus dem Baumarkt zusammensetzen kann.

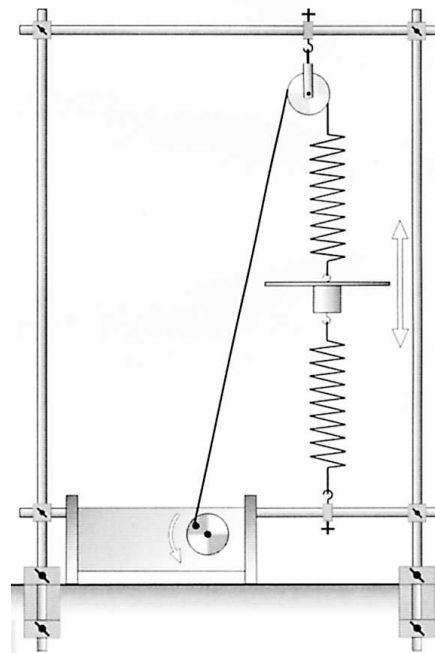


Abbildung 3.10: So kann der Aufbau mit etwas mehr Aufwand mit Mitteln der Sammlung aussehen

Schwingung.

Es ist eine Herausforderung, sie in der Schule zu thematisieren. Der Normalfall - selbst für einen Leistungskurs in der gymnasialen Oberstufe - dürfte darin bestehen, die Ergebnisse an Experimenten zu verdeutlichen. Mögliche Aufbauten sind in den Abbildungen dargestellt. Das wesentliche Lernziel in dieser Thematik besteht darin, die Phänomenologie der Resonanz zu beherrschen (Konzept der Eigenfrequenz, Energiezufuhr, Beschränkung durch Reibungseffekte) Es sollten außerdem einige Alltagsvorgänge als resonant erkannt werden können.

In der Schule bietet es sich an - auch schon im Hinblick auf eine Aktivierung der Schüler bzw. einen handlungsorientierten Unterricht - ein kleines Freihandexperiment ausführen zu lassen. Schüler erhalten ein kurzes Fadenstück und ein Massenstück (kann auch ein Stift, ein Ring o.ä. sein). Sie sollen mit möglichst kleinen Bewegungen das Pendel zu großen Schwingungen anregen. Dabei werden dann schon erste wichtige Erkenntnisse gewonnen.

In diesem Abschnitt sollen einige mathematische Fundierungen für die Behandlung von angeregten Schwingungen präsentiert werden. Die Darstellung folgt hier in etwa dem in dem Buch von French.

Bei der Betrachtung von angeregten Schwingungen eines Systems muss man berücksichtigen, dass es einen sogenannten **Einschwingvorgang** gibt. In dieser Phase verhält sich das System noch nicht so, wie es das später, nach genügend langer Zeit nach Einschalten der Anregung tun wird. Das asymptotische Verhalten wird - da es sich dann nicht mehr ändert, auch **stationäres Verhalten** genannt. Wir werden uns im Folgenden ausschließlich mit dem stationären Zustand befassen.

Es bietet sich an, die Behandlung schrittweise zu entwickeln - vom einfachen zum schwierigen. Beginnen wir mit der Bewegungsgleichung eines Massenpunktes an einer hooke'schen Feder:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (3.8)$$

Die rechte Seite beschreibt die an den Massenpunkt angreifenden Kräfte - hier die hooke'sche Rückstellkraft proportional zur Auslenkung x aus der Ruhelage. Die Lösung dieser Gleichung liefert die bekannte Sinus-bzw. Kosinusartige Funktion mit der Eigenfrequenz $\omega_0 = \frac{k}{m}$.

Eine periodisch auf den Körper einwirkende Anregung wird als Kraft auf den Massenpunkt eingebaut, natürlich auf der rechten Seite der Gleichung.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + F_0 \cos(\omega t) \quad (3.9)$$

Die Stärke der Anregungskraft wird durch die Konstante F_0 beschrieben. Es ist üblich, die Gleichung etwas anders zu ordnen:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = F_0 \cos(\omega t) \quad (3.10)$$

Der bei angeregten Schwingungen auffälligste Effekt ist die überaus heftige Reaktion des Oszillators, wenn die Anregungsfrequenz sich der Eigenfrequenz nähert.

Ist die Anregungsfrequenz aber sehr von ω_0 verschieden, so ist die Situation etwas einfacher.

$$\boxed{\omega \ll \omega_0}$$

Falls die Anregungskraft mit sehr kleiner Frequenz einwirkt, so wird der Massenpunkt kaum beschleunigt - der newtonsche Beschleunigungsterm $m \frac{d^2 x}{dt^2}$ kann dann quasi vernachlässigt werden. Der Körper bewegt sich im Takt mit der äußeren Kraft. Die Auslenkung beträgt dann $\frac{F_0}{k}$ - also dem Wert, den eine konstante Kraft F_0 hervorrufen würde. Die Bewegung wird sozusagen von der Steifheit (also der Federkonstanten) k der Feder kontrolliert.

$$\boxed{\omega \gg \omega_0}$$

Bei großen Anregungsfrequenzen wird der Trägheitsterm wesentlich. Wir erwarten nun eine sehr kleine Amplitude (der Körper hat keine Zeit, sich weit von der Ruhelage zu entfernen). Die Auslenkung des Körpers erfolgt im Gegentakt zur Anregung (Phasenverschiebung π). Die Analyse von Phasenverschiebungen ist traditionsgemäß etwas tricky. Das folgende Bild (Abbildung 3.11) kann etwas Klarheit bringen, da es an eine Erfahrung erinnert, die wir alle beim Experimentieren mit Pendeln gemacht haben.

Zur Lösung der Differentialgleichung machen wir den folgenden Ansatz:

$$x(t) = C \cos(\omega t)$$

Einsetzen liefert (man muss dazu den Kosinus zweimal ableiten und dabei die Kettenregel nicht vergessen!)³

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 C \cos(\omega t)$$

³Wenn sich herausstellen sollte, dass man keinen Wert für die Konstante C finden kann, die für alle Orte und Zeiten die DGL erfüllt, so müsste der Ansatz verworfen werden. Aber keine Sorge, das wird nicht passieren!

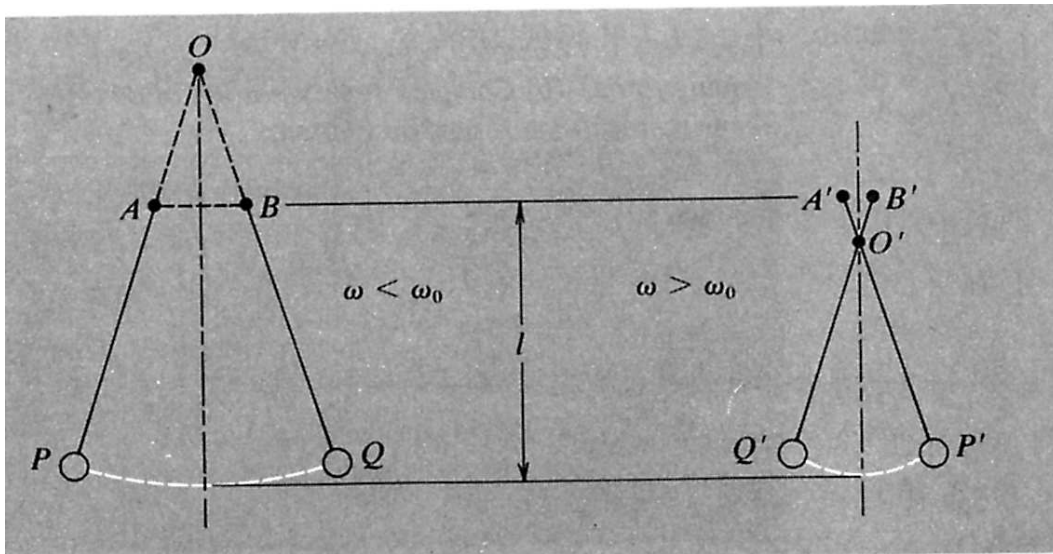


Abbildung 3.11: Die Bewegung eines einfachen Fadenpendels, das im Aufhängepunkt O periodisch nach links und rechts 'geschüttelt' wird. Im linken Bild erfolgt die Anregung mit kleiner Frequenz, rechts mit großer Frequenz. Rechts ist dargestellt, wie der Massenpunkt gegenphasig auf die Anregung reagiert.

Einsetzen der Ableitung in die DGL liefert:

$$-m\omega^2 C \cos(\omega t) + kC \cos(\omega t) = F_0 \cos(\omega t)$$

Auflösen nach C liefert:

$$C = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.11)$$

Mit der so festgelegten (von ω abhängigen) Konstanten C ist die DGL 3.10 erfüllt. Man beachte die Definitionslücke bei ω_0 , die zu einer Singularität der Amplitude an genau dieser Stelle führt.

Der Graph der Funktion $C(\omega)$ ist in der folgenden Abbildung 3.12 dargestellt.

Wie in der Abbildung gezeigt, wechselt die Amplitude C an der Stelle $\omega = \omega_0$ abrupt von $+\infty$ nach $-\infty$. Dieses Verhalten signalisiert den Resonanzfall. Unser Verständnis von einer Schwingung ist aber eher verträglich mit einer stets positiven Amplitude. Der Vorzeichenwechsel sollte eher von der zeitabhängigen Winkelfunktion realisiert werden. Um dies gewährleisten zu können, macht man einen anderen Ansatz. Anstatt der Form $C \cos(\omega t)$, lässt man einen zweiten Parameter in Form einer Phasenverschiebung α zu.

Neuer Ansatz:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$$

Um ein neues Durchrechnen zu sparen, kann man kürzer $A = |C|$ setzen, und der Phasenverschiebung passend einen von zwei möglichen Werten zu geben, je nach dem, ob $\omega < \omega_0$ oder $\omega > \omega_0$ gilt. In der Abbildung 3.13 ist das Resultat dargestellt.

Der Wechsel der Phasenbeziehung zwischen Anregung und Antwort des Systems um 180° bzw. π ist auch leicht mit einem einfachen Freihandexperiment zu demonstrieren. Man nehme ein einfaches Fadenpendel und 'wackele' mit der Hand hin und her, wobei das Pendel angeregt wird. Überschreitet man die Eigenfrequenz (diese vorher zeigen, indem

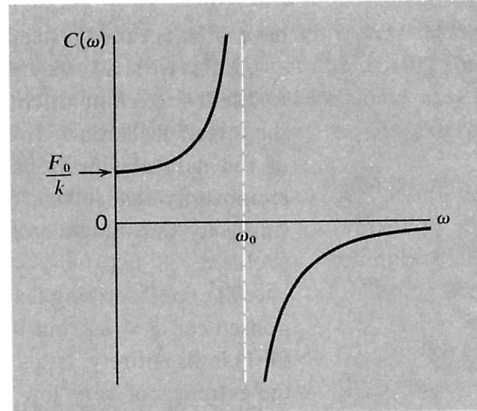


Abbildung 3.12: Die Amplitude der angeregten Schwingung als Funktion der Anregungsfrequenz (Ohne Dämpfung). Das Vorzeichen für $\omega > \omega_0$ entspricht der Phasenverschiebung zwischen Auslenkung und Anregung

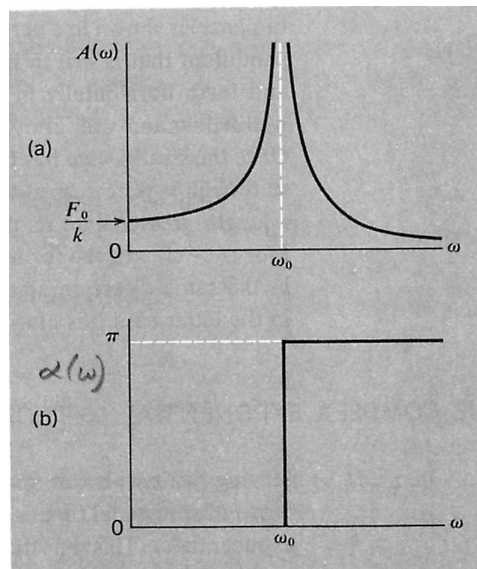


Abbildung 3.13: Die Amplitude der angeregten Schwingung als Funktion der Anregungsfrequenz (Ohne Dämpfung). Im unteren Teil ist die Phasenverschiebung $\alpha(\omega)$ dargestellt.

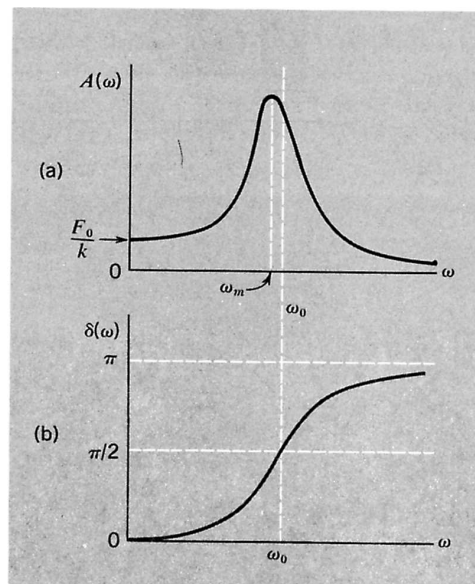


Abbildung 3.14: Die Amplitude der angeregten Schwingung als Funktion der Anregungsfrequenz (Mit Dämpfung). Im unteren Teil ist die Phasenverschiebung $\alpha(\omega)$ dargestellt. Der Wert durchläuft genau bei ω_0 den Wert $\pi/2$

man das Pendel ungestört schwingen lässt), so erkennt man deutlich, dass Anregung und Schwingung 'außer Takt' sind. (s. Abbildung 3.11)

Es sind nun noch ein paar Bemerkungen notwendig. Das in der Abbildung dargestellte Verhalten der Amplitude $A(\omega)$ ist nicht realistisch – kein System wird unendliche Werte annehmen. Ursache: jedes klassische physikalische System zeigt Reibungseffekte. Eine Reibungskraft wirkt entgegen der Richtung der Momentangeschwindigkeit. Wir müssen also unsere newtonsche Bewegungsgleichung erneut erweitern.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \gamma \frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\omega t) \quad (3.12)$$

Ein erneute Rechnung liefert:

$$A(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}$$

Der zusätzliche additive Term im Nenner bewirkt, dass der Funktionswert im Maximum endlich bleibt. Auch ist der Phasensprung nun 'glatt'.

3.4 Zusammenspiel mehrerer harmonischer Schwingungen

In den bisherigen Experimenten war stets nur ein einziger Oszillator, also nur ein schwingungsfähiges System beteiligt. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den faszinierenden Phänomenen, die beim Zusammenspiel von mehreren Schwingungen entstehen können.

Experimentelle Aufbauten sind in den Abbildungen dargestellt.

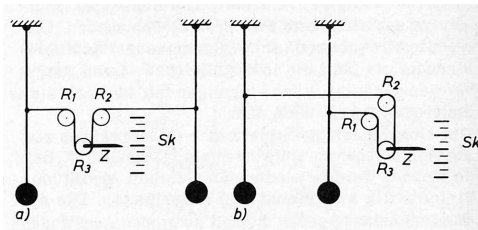


Abbildung 3.15: Zwei Fadenpendel, deren Elongationen durch ein Seilzugverfahren über Rollen addiert werden.

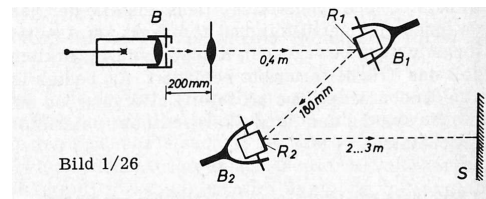
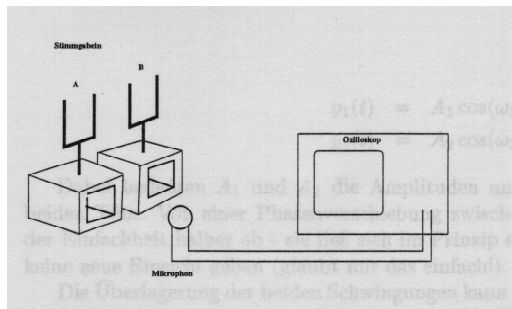


Abbildung 3.16: Ein Lichtzeiger wird verwendet: zwei pendelnde Holzstäbe mit Spiegeln



3.4.1 Überlagerung von zwei in gleicher Raumrichtung verlaufenden Schwingungen

Als Einführungsbeispiel betrachten wir folgendes Experiment (s. obige Abbildung). Der Schall von zwei gleichzeitig angeschlagenen, baugleichen Stimmgabeln wird von einem Mikrophon aufgefangen, in elektrische Signale umgewandelt und auf ein Oszilloskop gegeben. Die von jeder Stimmgabel erzeugten periodischen Luftdruckschwankungen stellen am Ort des Mikrophons jeweils eine einzelne harmonischen Schwingung (Töne). Da diese Schwingungen gleichzeitig auf das Mikrophon einwirken, kann man so die **Addition harmonischer Schwingungen** untersuchen.

Die Luftdruckschwankung erfolgt raumrichtungsmäßig gesehen längs einer Geraden, die das Mikrophon mit den Stimmgabeln verbindet - die Elongationen erfolgen als in die gleiche Raumrichtung (s. Überschrift).

Durch Anbringen eines kleinen Reiters (=anklemmbares Massenstück) kann man die Eigenfrequenz der Stimmgabeln verändern, da durch die zusätzliche Masse der Stimmgabelarm je nach Position des Reiters mehr oder weniger träger wird.

Beobachtungen:

1. Ohne Reiter wird der Ton einer Stimmgabel durch die zweite Stimmgabel lediglich lauter - die Frequenz bleibt unverändert.
2. Nach Anbringen eines Reiters kann man - je nach Einstellung des Reiters - ein Auf- und Abswellen der Lautstärke vernehmen (**Schwebung**)

3.4.1.1 Mathematische Behandlung der Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen

Um die beobachteten Effekte besser verstehen zu können, wenden wir unsere bisherigen Kenntnisse zu harmonischen Schwingungen an.

Die Druckschwankungen im Mikrofon haben zwei Beiträge, der eine stammt von Mikro A, der andere von Mikro B. Beide lassen sich beschreiben durch die bekannten Gleichungen:

$$\begin{aligned}y_1(t) &= A_1 \cos(\omega_1 \cdot t) \\ y_2(t) &= A_2 \cos(\omega_2 \cdot t)\end{aligned}$$

Dabei bedeuten A_1 und A_2 die Amplituden und die ω 's die (Kreis)Frequenzen der beiden Töne. Von einer Phasenverschiebung zwischen den beiden Tönen sehen wir hier der Einfachheit halber ab - sie ließ sich im Prinzip ebenfalls berücksichtigen, würde aber keine neue Einsicht geben (glaubt mir das einfach!).

Die Überlagerung der beiden Schwingungen kann man durch Addition der beiden Elongationen rechnerisch erfassen:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

Die resultierende Elongation muss stets im abgeschlossenen Intervall zwischen der Differenz und der Summe der beiden Amplituden A_1 und A_2 liegen. Die Amplitude der resultierenden Schwingung liegt zwischen 0 und der Summe $A_1 + A_2$

Sofern es nicht eine 'einfache' Beziehung zwischen den ω 's der Einzelschwingungen gibt, wird die resultierende Schwingung eine zumeist sehr komplizierte Abhängigkeit von der Zeit zeigen. Das kann sogar soweit gehen, dass die Resultierende Schwingung nicht einmal mehr periodisch ist. Bedingung für ein periodisches Verhalten der Summenfunktion mit Periodendauer T ist die Existenz von zwei natürlichen Zahlen n_1, n_2 mit

$$t = n_1 \cdot T_1 = n_2 \cdot T_2$$

bzw.

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Der rechts stehende Bruch ist - da n_1, n_2 natürliche Zahlen sind, eine rationale Zahl.

In der Abbildung 3.4.1.1 ist die Überlagerung von zwei Schwingungen dargestellt, deren Schwingungsdauern ein rationales Verhältnis besitzen: Es ist $T_1 = \frac{1}{450}s$ und $T_2 = \frac{1}{100}s$. Dies führt auf $n_1 = 9$ und $n_2 = 2$. Damit folgt $T = 2 \cdot \frac{1}{100}s = 0.02s$. Diese Periodendauer ist auch in der Abbildung gut erkennbar

Man kann ferner gut das Zustandekommen der Elongation der resultierenden Schwingung als Summe der beiden Einzelelongationen erkennen.

Anmerkung: (Kann übersprungen werden!)

Man erkennt, dass die beiden Ergebnisse nicht nur vom Frequenzverhältnis, sondern auch von der Anfangsphase, also der Startelongation ($t=0$) empfindlich abhängt. Interessanterweise kann aber das menschliche Gehör die in (3.4.1.1) a) bzw. b) dargestellten Klänge nicht unterscheiden - wir sind nicht sensitiv auf Phasenunterschiede bei Klängen.

Ende der Anmerkung

Als nächstes soll der Fall der Schwebung näher untersucht werden.

Grundsätzlich kann man sich die resultierende Schwingung als eine Schwingung mit einer Frequenz vorstellen, die der (arithmetische) Mittelwert der beiden einzelnen Frequenzen ist. Die Amplitude der Resultierenden variiert dabei allerdings 'langsam' mit der Zeit, was den an- und abschwellenden Ton bewirkt.

Um dies auch mathematisch herauszupräparieren, ist leider etwas Aufwand notwendig. Zunächst als reine Information aus der Formelsammlung:

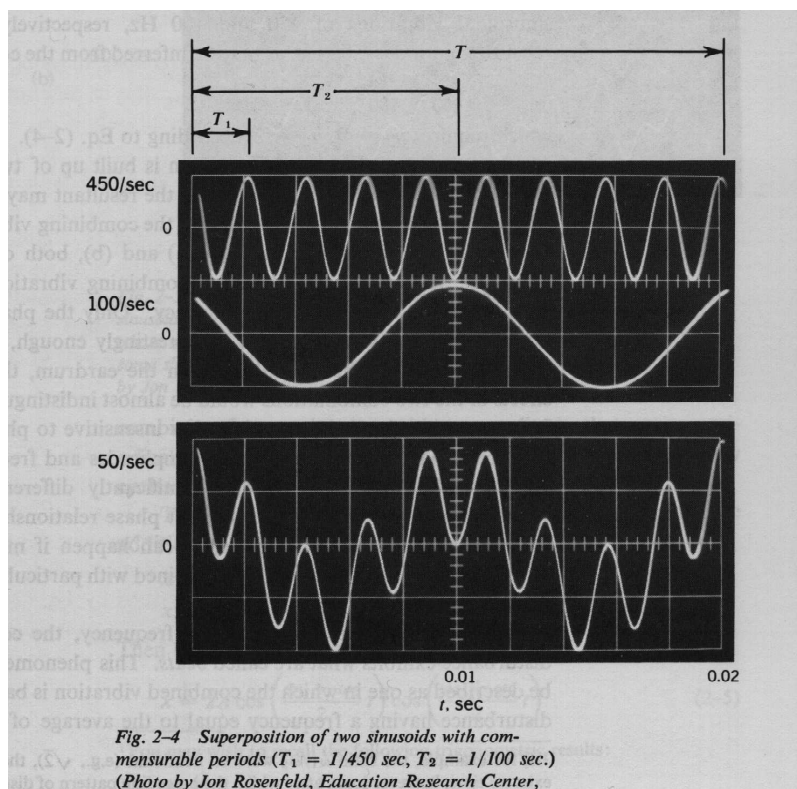


Abbildung 3.17: Überlagerung von zwei Schwingungen mit rationalem Verhältnis $T_1 = \frac{1}{450}$ s und $T_2 = \frac{1}{100}$ s.

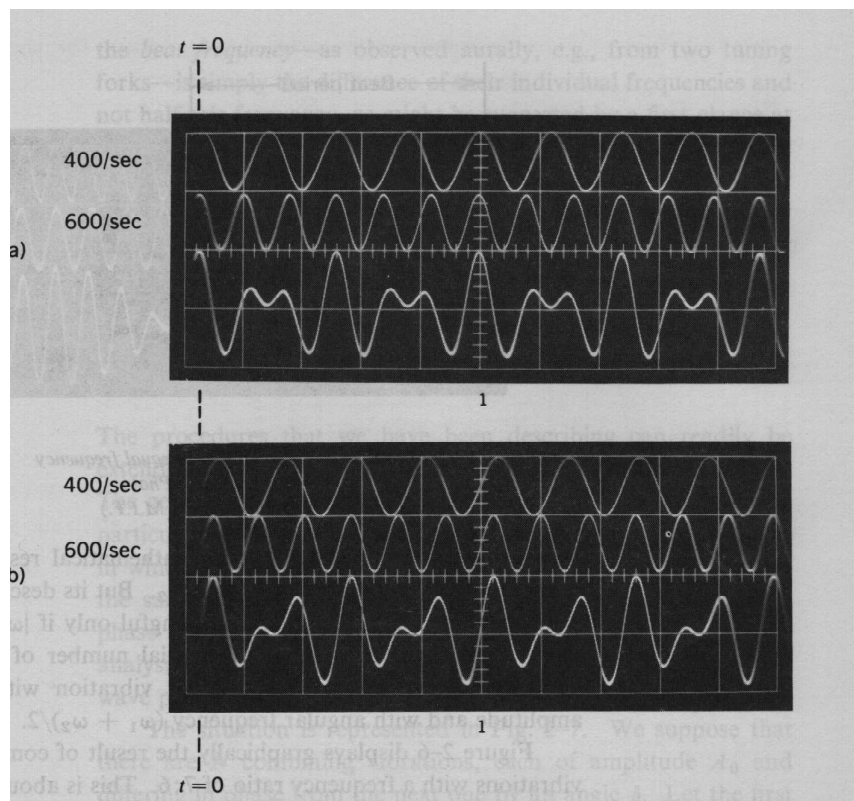


Abbildung 3.18: Überlagerung von zwei Schwingungen mit rationalem Frequenzverhältnis $\omega_1 = 2\pi \frac{400}{s}$; $\omega_2 = 2\pi \frac{600}{s}$. Im oberen Bild treffen ihre Maxima bei $t = 0$ zusammen (kosinusartig), im unteren Bild haben beide bei $t = 0$ eine Nullstelle (sinusartig).

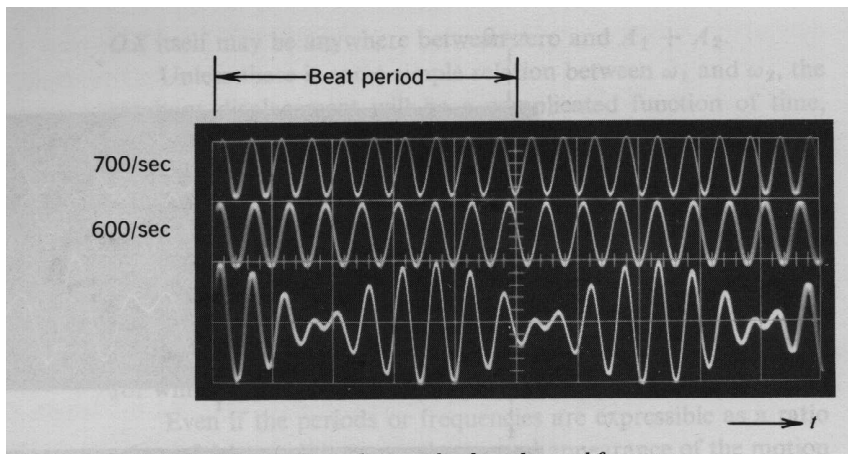


Abbildung 3.19: Überlagerung von zwei Schwingungen mit rationalem Frequenzverhältnis von 7:6. Die Werte sind: $\omega_1 = 2\pi \frac{600}{s}$; $\omega_2 = 2\pi \frac{700}{s}$. Derartig dicht zusammenliegende Frequenzen erzeugen den Schwebungseffekt.

Es gelten die beiden **Additionstheoreme**:

$$\begin{aligned}\cos(\theta + \phi) &= \cos(\theta) \cdot \cos(\phi) - \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \\ \cos(\theta - \phi) &= \cos(\theta) \cdot \cos(\phi) + \sin(\theta) \cdot \sin(\phi)\end{aligned}$$

Durch Addition erhält man

$$\cos(\theta + \phi) + \cos(\theta - \phi) = 2 \cos(\theta) \cdot \cos(\phi).$$

Mit der geschickten Ersetzung $\theta + \phi = \alpha$ und $\theta - \phi = \beta$ folgt

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Jetzt sind wir aber auch schon fast fertig:

Ersetzt man nun gemäß $\alpha = \omega_1 t$ und $\beta = \omega_2 t$, so erhält man bei gleicher Amplitude A

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \underbrace{2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)}_{\text{Langsam veränderliche Amplitude}} \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \quad (3.13)$$

Man muss noch eine Feinheit beachten: Die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen der einhüllenden Funktion liegende Zeit ist lediglich halb so groß wie die Periodendauer der Funktion, die wir oben als langsam zeitveränderliche Amplitude bezeichnet haben. Die Periodendauer, die man 'hören' würde, hat lediglich den Wert

$$\frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}$$

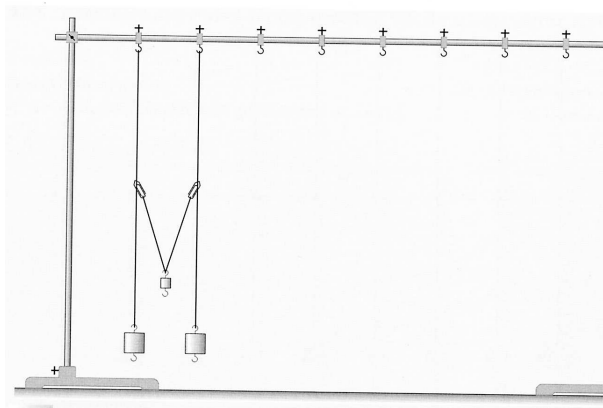


Abbildung 3.20: Ein Aufbau, wie man ihn schon öfter gesehen hat: schwache Kopplung durch ein 'schlappes' Verbindungsseil

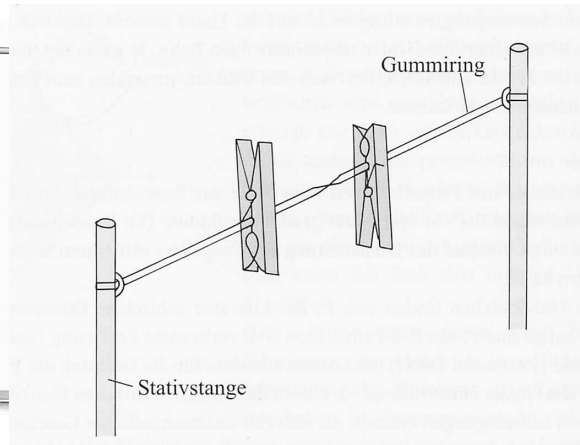


Abbildung 3.21: So kann man den Versuch auch als Freihandexperiment mit Schülern ausführen.

statt

$$\frac{2\pi}{\frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2}}$$

wie man bei flüchtiger Auswertung von Gleichung 3.13 vermuten würde.

Numerisches Beispiel: $T_1 = \frac{1}{255} \text{ s}$ und $T_2 = \frac{1}{257} \text{ s}$. Die Trägerfrequenz (f , nicht ω) ist dann 256 Hz (mittleres C). Die Lautstärke würde zweimal pro Sekunde ein Maximum annehmen.

Aufgaben

A1 Es werden zwei Schwingungen überlagert, deren Elongation-Zeit Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A_1 \cos(10\pi \cdot t) \\ y_2(t) &= A_2 \cos(12\pi \cdot t) \end{aligned}$$

- a) Bestimme die Schwebungsfrequenz und
- b) Skizziere ein Schaubild der resultierenden Schwingung für eine vollständige Periode.

A2 Schreibe die Gleichungen zweier Einzelschwingungen auf, die bei Überlagerung eine Schwebung der Frequenz $\omega = 15\pi \frac{1}{\text{s}}$ liefern.

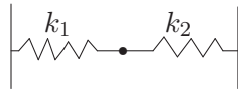
3.4.1.2 Ergänzung: Zwei gekoppelte lineare Oszillatoren

Im Unterschied zur bisherigen Situation haben wir es nun mit zwei Oszillatoren zu tun, die sich gegenseitig beeinflussen.

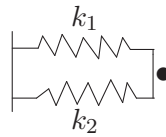
Der triviale Fall besteht darin, dass die Federn unabhängig voneinander schwingen. Das ist langweilig und nicht neu.

Als Vorbereitung betrachten wir zwei zusammengeschaltete Federn. Das Ziel der nachfolgenden Überlegungen besteht darin, eine **Ersatzfederkonstante** zu berechnen (Vergleiche E-Lehre: Parallel- und Reihenschaltung von ohmschen Widerständen).

- **Parallelschaltung**



Typ I



Typ II

In der obigen Abbildung sind die zwei möglichen Typen der Parallelschaltung zweier Federn dargestellt. Lenkt man die an zwei parallelgeschaltete hooke'sche Federn angebrachte Masse aus, so ist die Auslenkung x_1 der Feder 1 aus der Gleichgewichtslage genauso groß wie die Auslenkung x_2 der zweiten Feder: $x_1 = x_2 = x$. Beide Federn üben auf die Masse eine Kraft aus. Für die resultierende Kraft F auf den Massenpunkt gilt

$$F = -k_1x - k_2x = -(k_1 + k_2)x.$$

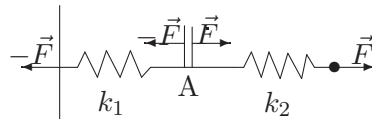
Die effektive Federrückstellkraft ist also durch die Federkonstante

$$k = k_1 + k_2$$

gegeben.

Bei einer Parallelschaltung ist die Ersatzfederkonstante gleich der Summe der Einzelfederkonstanten.

- **Reihenschaltung**



Sind die Federn hintereinandergeschaltet, so ist wirkt bei einer Auslenkung auf beide Federn die gleiche Kraft. In der Zeichnung betrachte man z.B. den Punkt A. Dieser Punkt ist in Ruhe, d.h. es wirkt keine (Netto)Kraft auf ihn ein. Um diesen Zustand zu erreichen, ist es notwendig, dass sich die 'weichere' Feder etwas weiter dehnt als die 'härtere' Feder. Die Auslenkungen x_1 und x_2 aus der alten Gleichgewichtslage sind diesmal also nicht gleich groß. Diesmal sind also nicht die Auslenkungen sondern die Kräfte gleich. Für die resultierende Kraft F auf den um $x_1 + x_2$ ausgelenkten Massenpunkt gilt

$$F = -k_1x_1 = -k_2x_2 = -k(x_1 + x_2).$$

Hieraus ermittelt man durch Elimination der Elongationen x_1, x_2

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Bei einer Reihenschaltung ist die reziproke Ersatzfederkonstante gleich der Summe der reziproken Einzelfederkonstanten. Die Ersatzfederkonstante ist also kleiner oder gleich der kleinsten beteiligten Einzelfederkonstante. Manchmal ist noch folgende umgeformte Darstellung nützlich

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

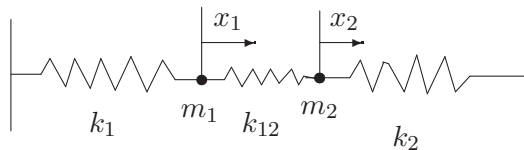
Ist speziell $k_1 = k_2$, so folgt

$$k = \frac{k_1}{2} \quad k_1 = 2k,$$

d.h. bei Verdopplung der Federlänge wird die Federkonstante halbiert, bei Halbierung der Federlänge wird die Federkonstante verdoppelt.

Es folgt nun eine Rechnung, deren Einzelheiten ohne Kenntnis von fortgeschrittener Mathematik (z.B. Leistungskurs Mathematik mit Schwerpunkt Lineare Algebra) nicht verstanden werden kann. Diesen Abschnitt kann man also ruhigen Gewissens zunächst zurückstellen und später nochmal bearbeiten.

Aufstellung der Bewegungsgleichung für zwei gekoppelte lineare Oszillatoren: Die Einzelschwingungen haben die Federkonstanten k_1 und k_2 , die Kopplungsfeder habe k_{12} .



$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 - k_{12}(x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 x_2 - k_{12}(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen stellen ein System aus zwei gekoppelten Differentialgleichungen dar, da die zu bestimmende Auslenkungen x_1 und x_2 in beiden Gleichungen auftreten. Die Bewegung der einen Masse wird durch die Bewegung der anderen Masse beeinflusst.

Zur Lösung des Systems machen wir den Ansatz

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t) \quad x_2(t) = A_2 \cos(\omega t)$$

Hierbei sind die Frequenzen gleich gewählt, da es sich bei dem System um den Fall von erzwungenen Schwingungen handelt: jede Einzelfeder prägt der anderen die Erregungsfrequenz auf.

Berechnung der zweiten Ableitungen, Einsetzen in die Gleichungen und Division mit dem zeitabhängigen Faktor $\cos(\omega t)$ liefert das (hier in Matrixform geschriebene) LGS zur Bestimmung der Eigenfrequenzen:

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_{12} - m_1 \omega^2 & -k_{12} \\ -k_{12} & k_2 + k_{12} - m_2 \omega^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Nullstellen der Determinante der Koeffizientenmatrix liefern die nicht-trivialen Lösungen, also die Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2 des Gesamtsystems. Die Indizes bedeuten hier nicht einen Bezug zu den einzelnen Oszillatoren, sondern numerieren die sogenannten

Schwingungsmoden (s.u.)!

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{k_1 + k_{12}}{m_1} + \frac{k_2 + k_{12}}{m_2} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{k_1 + k_{12}}{m_1} - \frac{k_2 + k_{12}}{m_2} \right)^2 + \frac{k_{12}^2}{m_1 m_2}} \\ \omega_2^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{k_1 + k_{12}}{m_1} + \frac{k_2 + k_{12}}{m_2} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{k_1 + k_{12}}{m_1} - \frac{k_2 + k_{12}}{m_2} \right)^2 + \frac{k_{12}^2}{m_1 m_2}}\end{aligned}$$

Für den Spezialfall verschwindender Kopplung $k_{12} = 0$ liefert diese Gleichung die bekannten Eigenfrequenzen zweier unabhängiger Oszillatoren:

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1} \quad ; \quad \omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2}$$

Bei nicht-verschwindender Kopplung gilt für das Verhältnis der Amplituden

$$A_1 = \frac{1}{k_{12}}(k_1 + k_{12} - m_1 \omega_1^2) A_2$$

bzw.

$$A_1 = \frac{1}{k_{12}}(k_1 + k_{12} - m_1 \omega_2^2) A_2$$

Für die weitere Diskussion sei

$$m_1 = m_2 \quad \text{und} \quad k_1 = k_2$$

Durch diese Wahl wird das System symmetrisiert. Man rechnet leicht nach, dass nun wesentlich übersichtlichere Gleichungen gelten:

$$\begin{array}{ll}\omega_1^2 = \frac{k_1 + 2k_{12}}{m} & \omega_2^2 = \frac{k_1}{m} \\ A_2 = -A_1 & A_2 = A_1\end{array}$$


Im obigen Bild sind die beiden sogenannten Schwingungsmoden dargestellt: In dem links dargestellten Fall schwingen die Massen entgegengesetzt aber mit betragsgleicher Amplitude. Im anderen Fall (rechte Abbildung) schwingen beide Massen in dieselbe Richtung - dabei wird die Kopplungsfeder nicht beansprucht; sie tritt daher in ω_2 nicht auf.

Jede dieser Eigenschwingungen ist Lösung der linearen Bewegungsgleichung, daher ist gemäß Superpositionsprinzip auch jede lineare Überlagerung der Einzellösungen auch eine Lösung. Ansatz:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= A \cos(\omega_1 t) + B \cos(\omega_2 t) \\x_2(t) &= -A \cos(\omega_1 t) + B \cos(\omega_2 t)\end{aligned}$$

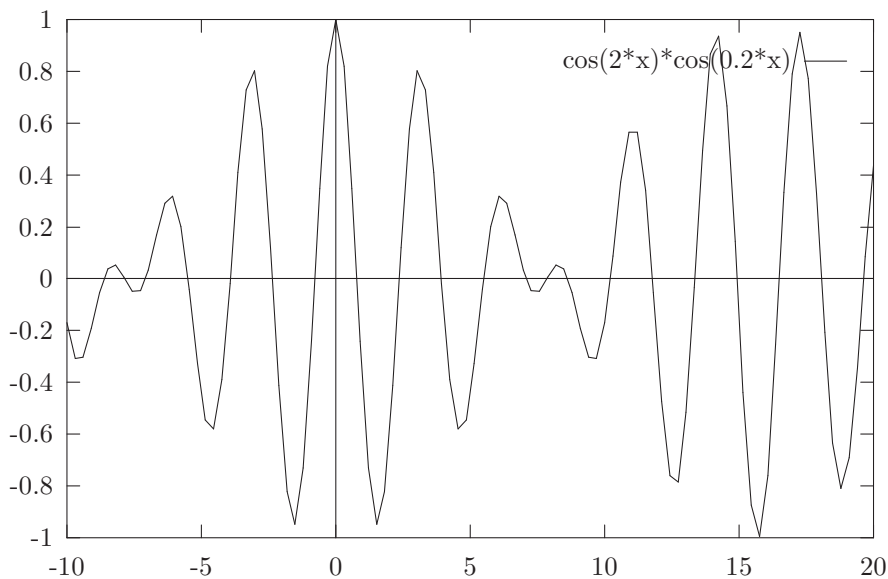
Wir betrachten den Fall kleiner Kopplungsstärke, dh. $k_{12} \ll k$. Dann ist

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \pm \Delta \quad ; \quad \omega_0^2 \approx \frac{k + k_{12}}{m} \quad ; \quad \Delta \approx \frac{k_{12}}{2m\omega_0} \ll \omega_0.$$

Einsetzen in den Ansatz liefert:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= (A + B) \cos(\omega_0 t) \cos(\Delta t) - (A - B) \sin(\omega_0 t) \sin(\Delta t) \\x_2(t) &= -(A - B) \cos(\omega_0 t) \cos(\Delta t) + (A + B) \sin(\omega_0 t) \sin(\Delta t)\end{aligned}$$

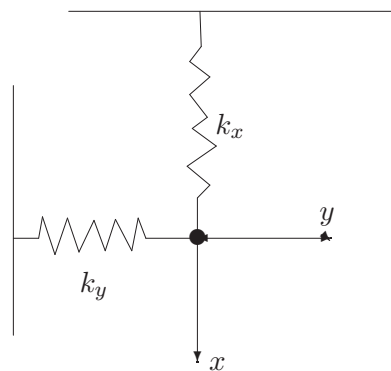
In der folgenden Abbildung ist $x_1(t)$ für $A = B$ aufgetragen. Einer Schwingung mit der kleinen Periode $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ist eine zweite 'langsamere' Schwingung mit der Periode $T_\Delta = \frac{2\pi}{\Delta}$ überlagert, durch die die Grundschiwingung moduliert wird. Man spricht von **Schwebungen** oder auch von **Amplitudenmodulation**.



3.4.1.3 Ergänzung: Der ebene (zweidimensionale) harmonische Oszillator und Lissajou-Figuren

Im vorangegangenen Abschnitt wurde besprochen, wie sich die Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen auswirkt, die beide in 'die gleiche' Richtung verlaufen, also z.B. beide Elongationen in x-Richtung erfolgen.

In diesem Abschnitt untersuchen wir den Fall, in dem die beiden Schwingungen in verschiedene Richtungen verlaufen, also die eine in x-Richtung und die andere in y-Richtung. Die Masse bewegt sich dabei also in der xy-Ebene.



Man darf sich nicht täuschen lassen: In der Abbildung wirkt keine Schwerkraft, die Feder k_x ist also insbesondere kein Federschwerependel!

Für jede der beiden Bewegungskomponenten hat man dann eine Bewegungsgleichung vom HOZ- Typ:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k_x x &= 0 \\ m\ddot{y} + k_y y &= 0 \end{aligned}$$

Hierbei sind die beiden Gleichung also unabhängig voneinander, im Gegensatz zur Situation im vorangegangenen Abschnitt, wo die Schwingungen miteinander gekoppelt waren. Als Lösungen schreibt man direkt auf

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega_x t + \varphi_1) \quad \text{mit } \omega_x^2 = \frac{k_x}{m} \\ y(t) &= B \sin(\omega_y t + \varphi_2) \quad \text{mit } \omega_y^2 = \frac{k_y}{m} \end{aligned}$$

Wenn das Verhältnis $\frac{\omega_x}{\omega_y}$ rational (also eine rationale Zahl) ist, so erreicht die Masse nach einer endlichen Anzahl von Schwingungen wieder genau die Ausgangsposition, und zwar sowohl in x als auch in y-Richtung. Die Bahn stellt damit eine geschlossene Kurve dar. Man nennt derartige Figuren auch **Lissajou-Figuren**.

Beispiele: $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{2}{3}$. In diesem Fall schließt sich die Kurve nach $\text{kgV}(2; 3) = 6(s)$ im Ausgangspunkt. Ist dagegen $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{1.27}{5.32} = \frac{127}{532}$, so dauert es erheblich länger: $\text{kgV}(127; 532) = 67564$. Man muss nun schon fast 19 Stunden auf die Rückkehr zum Ausgangspunkt warten!

Da $|\cos(\omega t)| \leq 1$ für alle t , liegen alle Bahnkurven in einem Rechteck mit den Seitenlängen $2A$ und $2B$.

Wenn das Verhältnis $\frac{\omega_x}{\omega_y}$ dagegen irrational ist, also eine irrationale Zahl ist (Beispiele: $\sqrt{2}, \pi, e$), so schließt sich die Bahnkurve offenbar nie ('offene Bahnen'). Vielmehr überstreicht die Bahnkurve im Laufe der Zeit das ganze Rechteck. Zwar vollführen die Bewegungskomponenten in x- und y-Richtung einzelne jeweils streng periodische Bewegungen, jedoch schließt sich die Kurve nie exakt. Man nennt solche Systeme auch bedingt periodisch. Nahezu alle realen physikalische Systeme sind von dieser 'fast periodischen' Kategorie. Im Bereich der statistischen Physik spricht man auch von **ergodischen Systemen**, um diesen 'Überdeckungseffekt' zu beschreiben.

3.4.1.3.1 Zwei Schwingungen mit gleicher Frequenz ω Für die Elongationen gilt dann

$$\begin{aligned}x &= A \sin(\omega t + \varphi_1) \\ y &= B \sin(\omega t + \varphi_2).\end{aligned}$$

Unter Verwendung von Additionstheoremen für die trigonometrischen Funktionen erhält man

$$\begin{aligned}\frac{x}{A} &= \sin \omega t \cos \varphi_1 + \cos \omega t \sin \varphi_1 \\ \frac{y}{B} &= \sin \omega t \cos \varphi_2 + \cos \omega t \sin \varphi_2\end{aligned}$$

Um die Gleichung der Bahnkurve zu erhalten, eliminiert man die Zeitvariable t , es bleiben dann nur noch x und y übrig:⁴ Die Rechnung ist etwas länger, aber leicht! Hierzu berechne man den Ausdruck

$$\left(\frac{x}{A} \sin \varphi_2 - \frac{y}{B} \sin \varphi_1\right)^2 + \left(\frac{y}{B} \cos \varphi_1 - \frac{x}{A} \cos \varphi_2\right)^2$$

sowohl für die linke als auch für die rechte Seite der obigen Gleichungen. Nachdem man alle Terme 'ausgenudelt' hat, findet man

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{xy}{AB} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, deren eine Hauptachse um einen Winkel β gegen die x -Achse gedreht ist:

Ist z.B. $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, so geht die Gleichung in die bekannte Gleichung

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

einer Ellipse über, deren Hauptachsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen ($\beta = 0$). Falls außerdem $A = B$ vorliegt, handelt es sich um eine Kreisgleichung.

Ein weiterer Spezialfall liegt vor, wenn $\varphi_2 - \varphi_1 = 0, \pi, 2\pi \dots$ ist. In diesem Fall geht die Ellipsengleichung in die 'Geradengleichung'

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{x}{A} - \frac{y}{B} = 0$$

über. In der Abbildung sind die Figuren für verschiedene Phasenunterschiede dargestellt.

3.4.1.3.2 Zwei Schwingungen mit unterschiedlicher Frequenz Die Fälle $\varphi_2 - \varphi_1 = 0, \pi$ mit $\omega_y = 2\omega_x$ liefern Parabeln:

$$\frac{y}{B} = 2 \left(\frac{x}{A}\right)^2 - 1$$

Andere Frequenzverhältnisse und andere Phasenlagen liefern wesentlich kompliziertere Figuren.

Wer sich für die 'Welt' der Lissajou-Figuren interessiert, kann ja mal mit dem Computer-Programm **TurboPlot** derartige Kurven erstellen. Einen Vorgeschmack liefert auch der

⁴Verwende die Additionstheoreme $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ und $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(b)\sin(a)$ (s.z.B. Taschenbuch der Mathematik, S. 56)

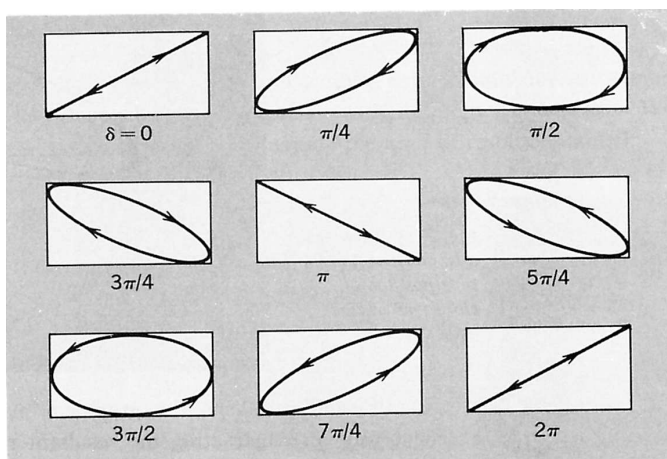
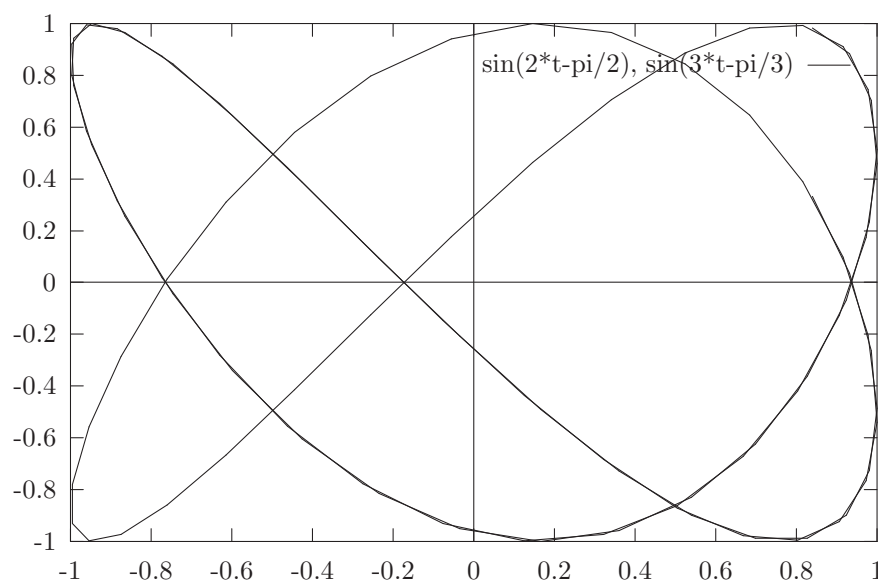


Abbildung 3.22: Lissajou-Figuren für gleiche Amplitude, gleiche Frequenz, aber verschiedene Phasenunterschiede $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$

hinten angefügte Katalog von Figuren (Abb. 3.23). Hierzu muss der Menüpunkt *Parameterkurven* angewählt und für $x(t)$ und $y(t)$ Terme der Form

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y(t) &= B \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned}$$

mit konkreten Werten für die Frequenzen und Phasenkonstanten eingesetzt werden. Beispielsweise ergibt sich für $\omega_1 = 2\frac{1}{s}$, $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ und $\omega_2 = 3\frac{1}{s}$, $\varphi_2 = -\frac{\pi}{3}$ und $A = B = 1$ folgende Lissajou-Figur:



Man zähle die Berührungspunkte der Figur mit den Rechteckseiten. Was fällt auf?

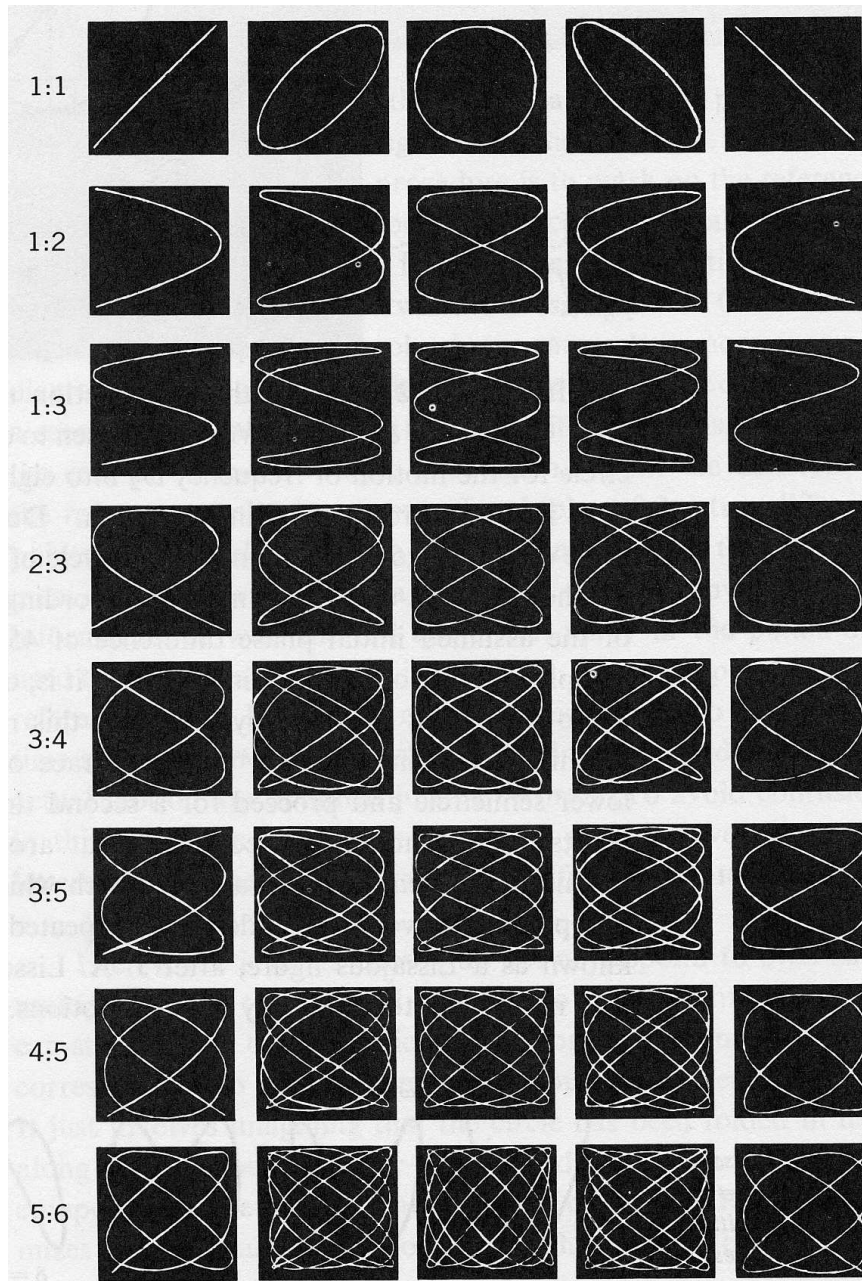


Abbildung 3.23: Katalog von Lissajou-Figuren für gleiche Amplitude, aber verschiedene Frequenzverhältnisse. Die Frequenzverhältnisse verändern sich von oben nach unten, die Phasenunterschiede jeweils von links nach rechts.

3.5 Quarzuhren - eine aktuelle und interessante Anwendung der Physik der Schwingungen

Wie in der Einleitung dargestellt, ist es unterrichtlich oft von Vorteil (Motivation, Interesse etc), aktuelle Inhalte aus der Lebenswelt der Schüler als Aufhänger zu verwenden. Nahezu jeder unserer Schüler verwendet bzw. besitzt eine Quarz Armbanduhr, weiß aber in den seltensten Fällen, wie eine solche funktioniert.

In den beiden folgenden Abschnitten werde ich deshalb auf den Aufbau einer Quartzuhr eingehen und ein einfaches Experiment mit einer Quartzuhr beschreiben, das gut mit Mitteln einer Physiksammlung ausgeführt werden kann.

3.5.1 Die Quartzuhr - eine 'Wundermaschine'

(Quelle: The Physics Teacher Vol. 31, 1993,pp.501-503)

Jede Uhr benötigt einen regelmäßigen und/oder periodischen Vorgang: z.B. Auslaufen von Wasser, Abbrennen einer Kerze, Schattenbewegung, Pendelschwingungen usw. (Vergleiche Abbildung Elementaruhren).

Diese Uhren sind aber mittlerweile nahezu gänzlich aus dem täglichen Leben verschwunden - stattdessen trägt jeder eine Quarzuhr am Handgelenk. Umso wichtiger scheint es mir zu sein, dass man auch eine ungefähre Vorstellung von der Funktionsweise dieses unseres Begleiters hat. Als Quelle dient der oben erwähnte Artikel aus TPT.

Wir unterscheiden zwischen **analogen** und **digitalen** Uhren. Der Unterschied liegt dabei lediglich im Display: analoge Uhren verwenden Zeiger, während ihre digitalen Verwandten Ziffern zur Anzeige der Uhrzeit verwenden.

Quarzuhren sind diejenigen autark laufenden, transportablen Uhren mit der höchsten Ganggenauigkeit. Diese große Genauigkeit beruht auf der Qualität des verwendeten Taktgebers: dem sogenannten Piezokristall.

Ein Piezokristall ist ein Kristall, der sich unter Einwirkung eines äußeren elektrischen Feldes (bzw. dem Anlegen einer Spannung) verkürzt bzw. verlängert.. Wie nahezu jedes schwingungsfähige System hat auch ein solcher Quarz eine Eigenfrequenz. Regt man das System mit Eigenfrequenz an, so wird es zu maximalen Schwingungsamplituden angeregt, wobei es dem äußeren Antrieb maximal Energie entnimmt. Die elektrischen Baugruppen einer Quartzuhr dienen zu 90% der Anregung des Schwingquarzes und der elektronischen Steuerung bzw. Frequenzverkleinerung bis hinunter zur gewünschten 1Hz -Schwingung

In der Abbildung 3.24 ist eine Quartzuhr im geöffneten Zustand dargestellt.

Die Erklärungen sind in drei Abschnitte gegliedert:

1. Beschreibung des Quarzes (Form, und Frequenzfestlegung)
2. Der integrierte Schaltkreis (IC), der den Quartz antreibt, die Frequenz heruntertransformiert und den elektrischen Puls erzeugt, der letztlich die Zeigermechanik antreibt.
3. Der Elektromotor, der die Zeiger über ein Zahnradgetriebe antreibt.

Zu (1) Es ist für Fachleute überraschend, wenn sie hören, dass die Eigenfrequenz des Quarzes nur einige Kilohertz beträgt. Aus anderen Zusammenhängen, z.B. Sender für Modellflugzeuge, ist bekannt, dass Quarze mit mehreren Megahertz schwingen. Der Grund für die kleinere Frequenz ist die besondere Form des Quarzes in Uhren. Schwingt ein Quarz in seiner Grundschiwingung (also seiner kleinsten Eigenfrequenz) so bewegen sich

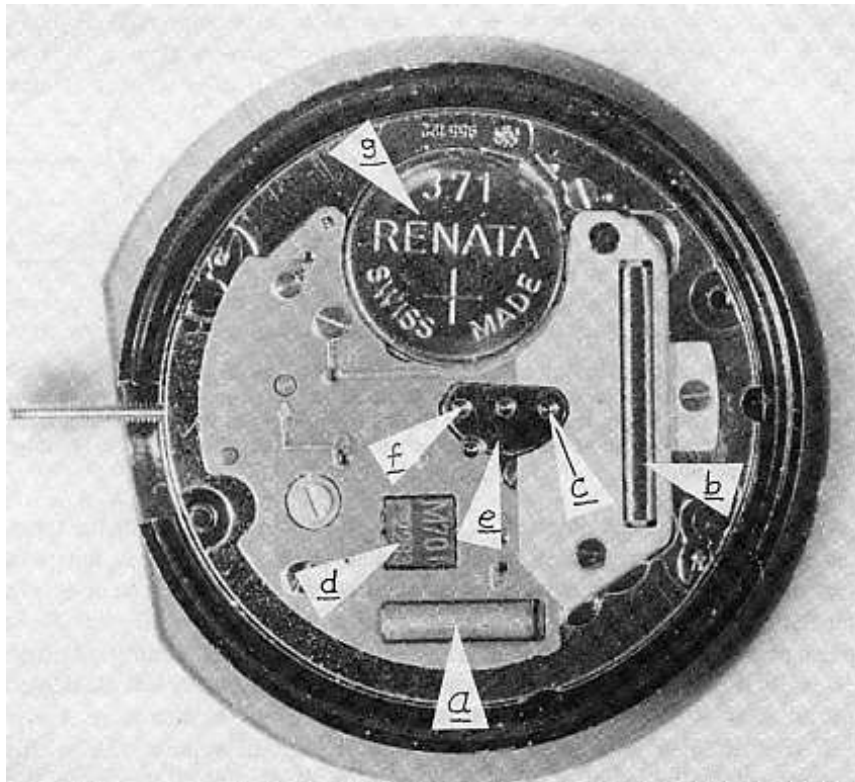


Abbildung 3.24: Eine geöffnete analoge Quarzuhr. Die folgenden Bauteile sind mit Buchstaben gekennzeichnet: (a) gekapselter Quarz; (b) Spule, die den Stator des Schrittmotors magnetisiert; (c) Achse der Motorspule; (d) Integrierter Schaltkreis; (e) Getriebe ; (f) die konzentrischen Achsen der drei Zeiger; (g) Batterie (Knopfzelle)

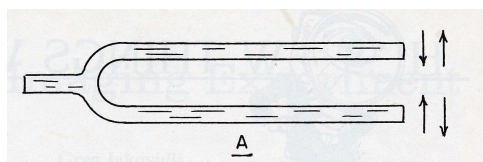


Abbildung 3.25: Schwingungsmoden einer Stimmgabel. Ähnlich dieser Bewegung schwingt auch ein Quarz in einer Uhr

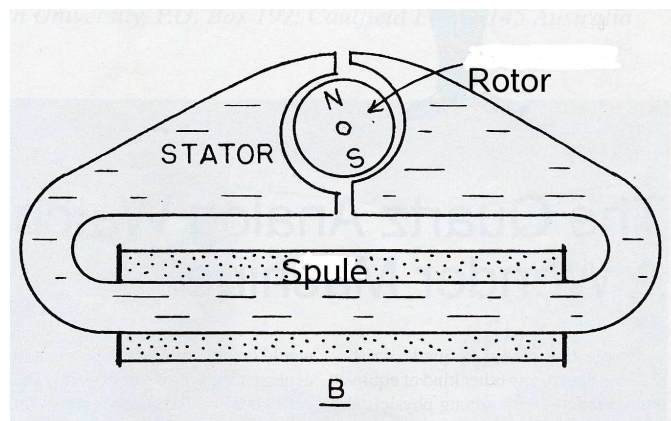


Abbildung 3.26: Der Schrittmotor, bestehend aus Spule, Weicheisenstator und beweglichem Rotor

gegenüberliegende Seitenflächen des Quarzes aufeinander zu oder voneinander weg. Diese Bewegungen erfolgen mit den oben erwähnten Megahertz-Frequenzen.

In einer Uhr wird aber ein Quarz nicht in seiner Grundschiwingung betrieben. Stattdessen gibt man ihm in der Fabrik die Form eines Hufeisens, ähnlich einer Stimmgabel. (s. Abb. 3.25)

Die Fabrikation eines Uhrenquarzes ist sehr interessant: Schließlich soll der Quarz mit einer Genauigkeit von 2 zu einer Million schwingen! Zu Beginn schneidet man den Quarz in Form einer Stimmgabel aus. Die Frequenzanpassung erfolgt nun gemäß physikalischer Überlegungen: sowohl die Form der Gabel als auch die Massenverteilung entscheidet über die Eigenfrequenz. Zunächst wird die Form so ausgeschnitten, dass die Frequenz etwas zu hoch ist. Anschließend werden kleine Goldtröpfchen auf die Gabelenden gesprüht. Dies erhöht die Masse, senkt also die Frequenz - diesmal unter den gewünschten Wert. Anschließend wird mit einem Laser wieder Gold abgedampft, bis die Frequenz genau stimmt.

Zu (2) Der Sekundenzeiger bewegt sich un stetig bzw. ruckweise jede Sekunde einmal. Es ist elektronisch einfach zu realisieren, dass eine vorgegebene Frequenz halbiert wird. Für unsere Zwecke ist es deshalb sinnvoll, dass der Quarz mit einer 2-er Potenz schwingt, die dann so oft halbiert wird, bis man bei 1 Hz angelangt ist. In handelsüblichen Uhren beträgt diese Frequenz $2^{15}\text{Hz} = 32768\text{Hz}$. Diese Frequenz muss auf $\pm 0.06\text{Hz}$ genau adjustiert sein, damit pro Jahr eine Gangabweichung von höchstens einer Minute erfolgt. Erstaunlich!

Zu (3) (Motor)

Der Motor ist ein sogenannter Schrittmotor. Der Name ist schon fast selbsterklärend: Der Motor bewegt seinen beweglichen Teil (Rotor) auf Grund eines elektrischen Impulses um genau einen Winkelbetrag weiter und bleibt dann wieder stehen, den nächsten Impuls erwartend. In Abbildung 3.24 ist der Motor mit (b) markiert. Man sieht dort den Weicheisenstator als helle Platte, in die der Rotor (c) eingelassen ist. Etwas besser wird die Sache klar in der Abbildung 3.26.

Der Stator ist normalerweise im nicht-magnetischen Zustand. Durch die Spule wird er kurzzeitig - gemäß der Polung des Spulenstroms - magnetisiert. Dies bewirkt, dass sich der drehbare Rotor (der selbst ein Magnet ist) entsprechend dem Magnetfeld dreht. Auch hier gibt es Interessantes zu lernen:

Wenn man die Abbildung etwas genauer anschaut, so erkennt man, dass der Rotor in einer Öffnung des Stators liegt, die nicht exakt zylindrisch ist! Betrachte Abb. 3.27,

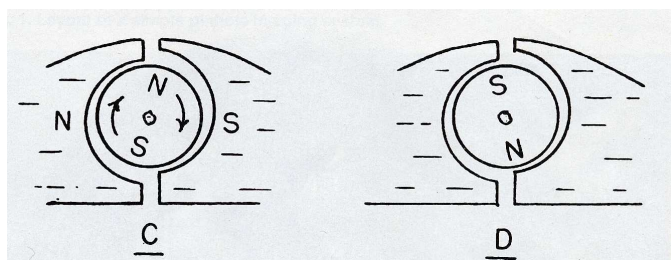


Abbildung 3.27: In C) Spule stromdurchflossen, Stator so magnetisiert wie eingezeichnet, Rotor beginnt mit der Drehbewegung; D) Stator wieder unmagnetisch, Rotor kommt in der eingezeichneten Stellung zur Ruhe, die sich um 180 Grad von der Ausgangslage unterscheidet!

die beiden zylindrischen Halböffnungen sind etwas gegeneinander verschoben, sodass der Gesamthohlraum nicht zylindrisch ist. Warum ist das so 'schief'?

Wenn der Weicheisenstator unmagnetisch ist, so richtet sich der Rotor dergestalt aus, dass die beiden Rotorpole möglichst nahe an den Eisenteilen liegen (s. Abbildungen (B) und (D) in 3.26 bzw. in 3.27). In dieser Konfiguration erhält die Spule einen Impuls vom IC ((d) in Abb. 3.24), dies magnetisiert den Stator mit einer Polarität, die die Rotorpole abstößt. Er dreht sich so, dass der Abstand zwischen Rotorpolen und Statorpolen vergrößert wird (im Uhrzeigersinn). Es dreht sich so weit, bis die Pole wieder nächstgelegen zum jetzt wieder unmagnetischen Stator zur Ruhe kommen. Diese Position ist winkelmäßig um 180° versetzt gegen die Startstellung. Der nächste Spannungsstoß vom IC (die Polung der Spannung muss jetzt genau andersherum als beim ersten Impuls sein) dreht den Rotor wieder weiter. So geht es weiter . jahraus , jahrein tick - tack.

3.5.2 Experimentelle Untersuchung der Quarzuhr

Das Schöne an dem nun folgenden Experiment ist, dass es sehr preiswert zu realisieren ist. Eine einfache Quarzuhr findet man schon ein den Wegwerf-Weckern vom Wühltisch. Ferner benötigt man noch ein Vielfach-Messinstrument, das Frequenzen messen kann und ein Oszilloskop, wie es in jeder Physiksammlung steht. Man sollte ein möglichst großes Quarzwerk aussuchen, da die auszuführenden Lötarbeiten an Armbanduhrenwerken wohl an zu stark zitternden Händen des Experimentators scheitern würden (es sei denn, man hat eine Lehre als Uhrmacher absolviert!)

Auf dem Messinstrument kann man eine Frequenz von 32768 Hz ablesen. Das Oszillogramm zeigt zwei Peaks, die genau um 1s gegeneinander versetzt sind (1Hz- Schwingung am Stator)

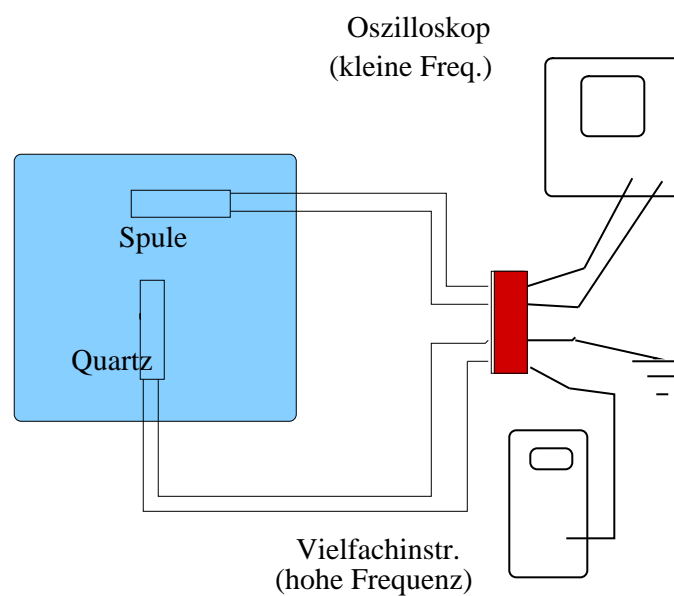


Abbildung 3.28: Es empfiehlt sich, die Anordnung auf ein Brettchen fest zu montieren. Dieses Brettchen holt man dann für das Experiment hervor. Da die Anschlüsse in der Uhr sehr fragil sind, sollte man permanente Litzen anlöten, die dann in einer Lüsterklemme in bequem abgreifbaren, dicken Anschlussdrähten münden. Hier kann man dann die Messinstrumente mit Krokoklemmen in Nullkommanichts andocken.

Kapitel 4

Wellenphysik

Im ersten Kapitel haben wir uns ausgiebig mit mechanischen Schwingungen beschäftigt. Schwingungen sind zumeist ein lokalisiertes Phänomen. Wellen sind - sofern man von der herkömmlichen und vorherrschenden Vorstellung von Wellen ausgeht, etwas, das sich fortbewegt. Im Falle von Wasserwellen können sich diese über den Pazifik bewegen, bevor sie sich an dem Strand einer Tropeninsel brechen (s. Abb. 4.1).

Wellentypen - Übersicht

- **Mechanische Wellen** Diese Wellenart ist uns die vertrauteste: wir begegnen ihr nahezu ständig. Bekannte Beispiele sind **Wasserwellen**, **Schallwellen**, **seismische Wellen**. Alle diese Wellen haben zwei zentrale, gemeinsame features: Sie werden durch Newtons mechanische Axiome bestimmt und sie können nur in (auf) einem Trägermedium existieren (Wasser, Gas(Luft) oder Gestein. Ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit variiert stark.
- **Elektromagnetische Wellen** Diese Wellen sind uns schon weniger vertraut, gleichwohl wir sie permanent verwenden: Bekannte Beispiele sind das sichtbare Licht, UV-Licht (ultraviolettes Licht), Radio- und TV-Wellen, Mikrowellen, Röntgenstrahlung und Radarwellen. Im Gegensatz zu den mechanischen Wellen benötigen sie keine Trägersubstanz (Licht legt den Weg von einem weit entfernten Stern bis zu unserem Auge zum größten Teil durch Vakuum zurück!) Die Ausbreitungsgeschwindigkeit aller elektromagnetischen Wellen beträgt im Vakuum gemäß Festlegung (nicht Messung!)

$$c = 299\,792\,458 \frac{m}{s} \quad (4.1)$$

- **Materiewellen** Obwohl von diesen Wellen in moderner Technologie viel Gebrauch gemacht wird, ist dieser Wellentyp vermutlich der fremdartigste. Wie man in der Quantenphysikvorlesung lernt, ist dieser Typ sogar fremdartig auf eine besonders fundamentale Weise. Elektronen, Protonen und andere sogenannte Elementarteilchen und sogar Atome und Moleküle besitzen in gewissem Zusammenhang Wellencharakter. Da man sich die uns umgebende Materie aufgebaut aus diesen Objekten denkt, bezeichnet man Wellen dieser Art als Materiewellen.
- **Gravitationswellen** Hierunter versteht man wellenartige Störungen in der Raumzeit. An dem experimentellen Nachweis dieser im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie theoretisch vorhergesagten Wellenart wird zur Zeit (2006) noch gearbeitet. Es gibt allerdings bereits indirekte Hinweise, die aus der Beobachtungen von Doppelsternsystemen stammen (s. Physik-Nobelpreis für Taylor und Hulse)



Abbildung 4.1: Hier sollte man Wellenphysik erforschen ...

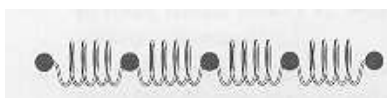
4.1 Mechanische Wellen

4.1.1 Organisierte Schwingungen und Phänomenologie der Wellenlehre

Der sogenannte Massenpunkt und der starre Körper sind Idealisierungen. Beim starren Körper (Eisenstange, Autokarosserie, menschlicher Schädel) geht man davon aus, dass die inneren Kräfte so stark sind, dass sie jede Relativbewegung der Aufbauteilchen gegeneinander verhindern. Wellen können sich nun in einem solchen Medium nur ausbilden, indem diese inneren Bindungskräfte auf äußere, anregende Kräfte reagieren und den dann nicht mehr als ideal starr anzunehmenden Körper verzerren. Zupft man beispielsweise eine Gitarrensaite an, so beginnt sie in regelmäßiger 'organisierter' Weise zu vibrieren. Die Atome, die die Saite aufbauen, sind durch zwischenatomare Bindungskräfte miteinander gekoppelt. Ist die Saite in Ruhestellung, so befinden sich die atomaren Bindungskräfte in einem stabilen Gleichgewicht. Wird die Saite angezupft, so wird eine Gruppe von Atomen aus dieser Gleichgewichtslage ausgelenkt, was zu einem Anwachsen der Kraft auf die danebenliegenden Atome führt. Diese reagieren ihrerseits auf die veränderte Kraft und verlassen die ursprüngliche Gleichgewichtslage. Dieser Prozess setzt sich sinngemäß fort, was zu dazu führt, dass eine Störung durch die Saite läuft. Die Einspannung der Saite prägt der Störung eine gewisse Bewegungsform als Randbedingung auf - es kann zu Wellen kommen.

4.1.1.1 Wichtige Grundformen von mechanischen Wellen

In der obigen Beschreibung wurde die Gitarrensaite mikroskopisch betrachtet. Ein Modell für die atomare Situation wird in dem nebenstehenden Bild dargestellt.



Die einzelnen Atome sind durch Massenpunkte modelliert, während die zwischenatomare Kopp-

Abbildung 4.2: Arbeitsmodell für Wellen

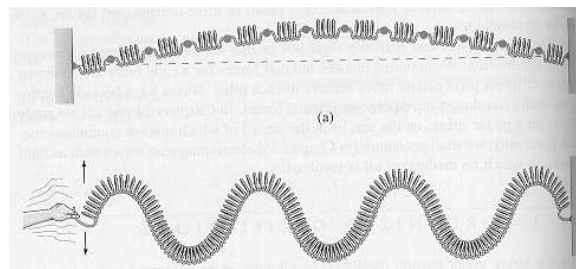


Abbildung 4.3: Transversalwelle auf einer Spiralfeder (unteres Bild)

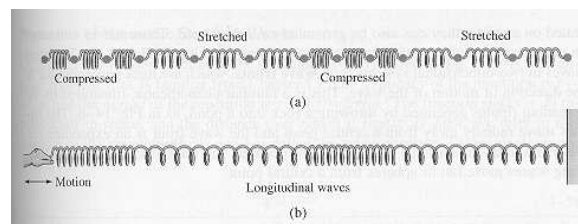


Abbildung 4.4: Longitudinalwelle auf einer Spiralfeder

lung durch kleine Federn dargestellt wird.

Bei der Auslenkung der Massenpunkte aus der Gleichgewichtslage haben wir zwei Möglichkeiten, die natürlich auch gemischt werden können.

Bei den sogenannten **Transversalwellen** erfolgt die Auslenkung der Teilchen orthogonal zur Richtung der Ausbreitung.

Bei den sogenannten **Longitudinalwellen** erfolgt die Auslenkung der Teilchen parallel zur Richtung der Ausbreitung.

Es wurde bereits mehrfach der Begriff 'Welle' verwendet, ohne dass eine saubere Definition bereitgestellt wurde. Dies soll jetzt nachgeholt werden. Zunächst definieren wir einen Hilfsbegriff:

Zwei schwingungsfähige Systeme, die einander beeinflussen und dabei Energie austauschen, bezeichnet man als **gekoppelte Oszillatoren**.

Die Physik der gekoppelten Schwingungen wurde bereits im Abschnitt 'Schwingungen'

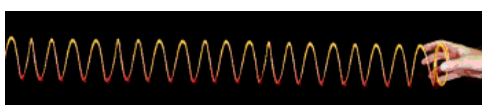


Abbildung 4.5: Longitudinalwellen mit Schraubenfeder (meistens nicht so gut erkennbar wie Longitudinalwellen)



Abbildung 4.6: Transversalwellen mit Schraubenfeder

dargestellt.

Eine Welle entsteht, wenn eine Reihe von gekoppelten Oszillatoren nacheinander gleichartige Schwingungen ausführen. Dies kann z.B. dadurch passieren, dass zu Beginn ein Oszillator regelmäßig (periodisch) angeregt wird - ihm also Energie zugeführt wird. Durch die Kopplung wird die Störung dann weitertransportiert. Durch die Regelmäßigkeit der Anregung ist auch die Abfolge der Störungen regelmäßig.

Hierbei tritt eine doppelte Periodizität auf. Zum einen führt jeder Oszillator an seinem Ort individuell eine **zeitlich periodische Bewegung** aus. Zum anderen beobachtet man zu jedem festen Zeitpunkt (Momentaufnahme der Welle) längs des Trägers eine **räumlich periodische Verteilung** von Oszillatorzuständen.

Diese doppelte Periodizität ist Ursache vieler Verständnisschwierigkeiten seitens der Schüler. Achtung! Viel Zeit an dieser Stelle verwenden!

Für die Entstehung einer Welle ist wichtig, dass benachbarte Oszillatoren in fester Phasenbeziehung stehen. Nur so ist die räumliche Periodizität erst möglich. Die Anregung des 'ersten' Oszillators in der Kette muss dabei nicht unbedingt mit dessen Eigenfrequenz erfolgen, um eine Welle in Gang zu setzen. Es reicht irgendeine Anregungsfrequenz aus, da die Weitergabe der Störung von Oszillator zu Oszillator ja als erzwungene Schwingung erfolgt. Eine resonante Anregung (also mit der passenden Eigenfrequenz) ist dabei nicht erforderlich.

Welle

Unter einer Welle versteht man einen zeitlich und räumlich periodischen Vorgang, bei dem lediglich Energie (Impuls) aber keine Masse transportiert wird.

Man sollte diese recht abstrakte Definition mit einigen Experimenten veranschaulichen: Ein wichtiges experimentelles Hilfsmittel ist die Wellenmaschine (siehe Abb. 4.7)

Die Tatsache, dass bei Wellen (in der Regel) keine Materie transportiert wird, ist so wichtig, dass man sie auf jeden Fall auch durch ein anschauliches Experiment verdeutlichen sollte. Hier kann etwa die Quetsche-Ente in der Badewanne herhalten. An einen Ende wird eine Welle erzeugt, indem man das Wasser bewegt (kinetische Energie hinein). Die Welle transportiert die Energie (kein Wassertransport zur Ente). Die Ente wird von der Welle angehoben (potentielle Energie). Siehe Abbildung 4.8.

Für die Beschreibung von Wellen gibt es einige sinnvolle Begriffe, die der Schwingungslehre entnommen und auf den neuen Kontext übertragen werden. Auf dem Träger schwingen alle Einzeloszillatoren mit gleicher Amplitude und mit gleicher Frequenz (und somit gleicher Schwingungsdauer). Es ist also sinnvoll, eine Begriffsübertragung vorzunehmen:

Hier kann man den Schülern gut klarmachen, dass naturwissenschaftliche Begriffsbildungen unter einem Ökonomieprinzip stehen - möglichst wenige Begriffe!

- Amplitude der Welle = Amplitude der Oszillatorschwingung
- Periodendauer der Welle = Periodendauer der Oszillatorschwingung
- Frequenz der Welle = Frequenz der Oszillatorschwingung



Abbildung 4.7: Ein nicht ganz unbekannter Wissenschaftsjournalist betätigt eine Wellenmaschine

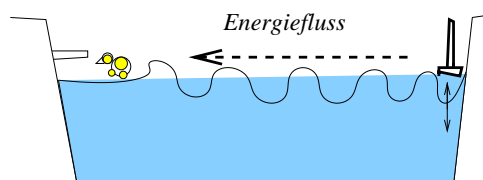


Abbildung 4.8: Das Entenexperiment zum Energietransport

Neu hinzu kommen zwei für eine Welle typische Größen:

Unter der **Wellenlänge** λ versteht man den (räumlichen) Abstand zweier benachbarter Oszillatoren, die sich im gleichen Schwingungszustand befinden (also z.B. den Abstand zwischen zwei benachbarten Wellenbergen)

Unter der **Ausbreitungsgeschwindigkeit** c versteht man diejenige Geschwindigkeit, mit der sich ein Wellenberg in Ausbreitungsrichtung verschiebt. Da hiermit allgemeiner die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schwingungszuständen mit gleicher Phase erfasst wird, spricht man auch von der **Phasengeschwindigkeit** der Welle.

Unter der **Schnelle** versteht man die Geschwindigkeit eines Medium-Teilchens in seiner Schwingungsrichtung. (Diese Geschwindigkeit gut von der Wellengeschwindigkeit trennen!)

Es gelten die wichtigen Beziehungen für die Wellenlänge λ , die Periodendauer T , die Frequenz f und die Phasengeschwindigkeit c :

$$\boxed{\lambda = cT} \quad \boxed{c = \lambda \cdot f} \quad (4.2)$$

Diese Grundgleichungen kann man sich leicht klarmachen. Wenn ein Oszillator in der Kette eine volle Schwingung absolviert hat, ist die Zeit T abgelaufen. In dieser Zeit ist über diesen Oszillator ein Wellenberg und ein Wellental hinweggestrichen, was einer Wellenlänge entspricht. Gemäß der Grundregel 'Geschwindigkeit = Weg / Zeit' liefert dies $c = \lambda/T$ bzw. mit $f = 1/T$ die oben aufgeschriebene Gleichung.

4.1.2 Mathematische Beschreibung von Wellen

Die Beschreibung von Wellen ist für Anfänger naturgemäß schwierig.

Dies liegt in der Natur der Sache. Erstmalig wird er nun konfrontiert mit einer Erscheinung, die simultan von zwei Variablen abhängt: Ort und Zeit. Trennt man nicht in Gedanken scharf zwischen diesen Größen, so ist man hoffnungslos verloren.

Ein gutes Hilfsmittel zur Herabminderung der Schwierigkeiten ist es, mal die eine und dann die andere Variable festzuhalten. Das **Festhalten des Orts** bedeutet, dass man starren Blickes nur auf die Bewegung eines der Oszillatoren achtet, ohne eine Blick nach rechts oder links zu riskieren. Die volle Aufmerksamkeit gilt dann z.B. dem Oszillator, der sich bei der x -Koordinate 137 (Beispielwert) befindet und nichts sonst.

Das **Festhalten der Zeit** bedeutet, dass man einen Schnappschuss von der gesamten Welle zu einem festen Zeitpunkt - z.B. $t = 1.78s$ anfertigt. Auf diesem Photo sieht man alle Oszillatoren - eingefroren in der jeweiligen Elongation. Auf der Momentaufnahme erkennt man dann die zur Zeit $t = 1.78s$ (Beispielwert) vorliegende Form der Welle. Beide Sichtweisen sind in der obigen Abbildung zusammengefasst. Auch ist dort die Wellenlänge λ und die Periodendauer T markiert.

Die im folgenden Abschnitt durchgeführten Betrachtungen setzen voraus, dass die Schüler Grundkenntnisse im Bereich Winkelfunktionen haben - somit entfallen faktisch alle Schüler der SI. Einige Überlegungen lassen sich aber auch ohne direkten Bezug auf Sinus und Co. ausführen! Man arbeitet dann mit Graphen - entweder auf Folie oder eleganter mit Computerprogramm (etwa GeoGebra)

Um zu einer mathematischen Beschreibung der Welle zu gelangen, wählen wir zunächst

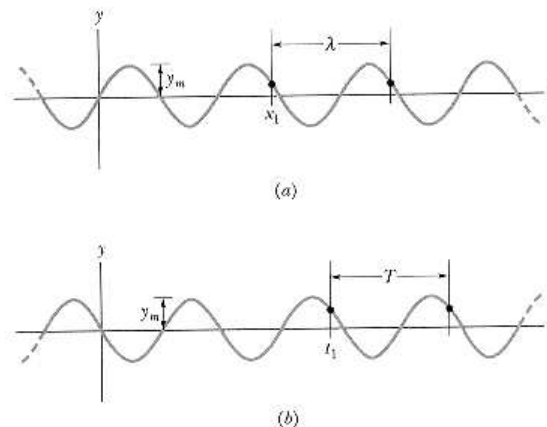


Abbildung 4.9: Schnappschuss (a) und Zeit-Elongations Graph (b)

ein Koordinatensystem. Die Oszillatorkette sei längs der x-Achse aufgebaut, die Elongationen erfolgen in y-Richtung.

Das Ziel der jetzt folgenden Überlegungen besteht darin, einen Term für die Elongation $y(x, t)$ des bei x befindlichen Oszillators zur Zeit t zu ermitteln.

Die typische Form einer Welle ist eine Sinuskurve. Wir fordern, dass die Form der Welle - betrachtet für feste Zeit (Schnappschuss!) - eine Sinuskurve ist ¹. Dies liefert als Ansatz für die Elongation: $y(x, t)$:

$$y(x, t) = y_m \sin(kx + \phi)$$

Damit sich die Welle mit konstanter Geschwindigkeit in x-Richtung bewegt, muss die Phasenkonstante ϕ , die ja die Verschiebung der Kurve parallel zur x-Achse beschreibt, ersetzt werden durch eine Größe, die proportional zur Zeit ist: Ferner muss - für eine Bewegung in positiver x-Richtung - die Addition durch eine Subtraktion ersetzt werden:

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t).$$

Die Bedeutung der Konstanten k und ω wird gleich geklärt werden. Das Argument $kx - \omega t$ nennt man auch die **Phase** der Welle.

Bedeutung der Konstanten k und ω

Die obige Abbildung (4.1.2) zeigt einen Schnappschuss von der Welle. Zur Vereinfachung der folgenden Rechnung nehmen wir an, dass der Schnappschuss zur Zeit $t = 0$ aufgenommen wurde. Die Überlegungen könnte man natürlich auch mit anderen Zeiten durchführen, doch würde dadurch nur die Rechnung etwas komplizierter werden - am Ergebnis würde sich nichts ändern. Zur Zeit $t = 0$ lautet die Gleichung für die Welle:

$$y(x, 0) = y_m \sin(kx) \quad (t = 0).$$

Gemäß Definition der Wellenlänge λ die Elongation für die Stellen x_1 und $x_1 + \lambda$ gleich große Werte. Es folgt

$$y_m \sin(kx_1) = y_m \sin(k(x_1 + \lambda)) = y_m \sin(kx_1 + k\lambda).$$

¹Diese Forderung erscheint zunächst als etwas eigenwillig. Zwar ist die Sinusfunktion eine Funktion mit annähernd Wellenform, doch warum sollte dies auch wirklich (physikalisch) so sein? Die Antwort hat zwei Teile. Zum einen haben Sinusfunktionen die Eigenschaft, dass aus ihnen mathematisch jede periodische Funktion aufgebaut werden kann (Fourierentwicklung). Beherrscht man also eine Sinuswelle, so kann man auch alle anderen berechnen. Zum anderen wird im Schulbuch (Metzler Physik) gezeigt, dass eine Reihe von gekoppelten harmonischen Oszillatoren bei harmonischer Anfangsanregung eine sinusförmige Welle ausbilden.

Da die Sinusfunktion eine Periode von 2π hat, ergibt sich $k\lambda = 2\pi$.

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{Winkelwellenzahl}} \quad (4.3)$$

Die Winkelwellenzahl wird zumeist kürzer als **Wellenzahl** bezeichnet. Beachte, dass man die Wellenzahl nicht mit der Federkonstante aus früheren Kapiteln verwechseln darf!

Im unteren Teil der Abbildung ist die Elongation in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Elongation bei $x = 0$ gemessen wurden.

Für $x = 0$ lautet die Gleichung für die Welle:

$$y(0, t) = y_m \sin(-\omega t) = -y_m \sin(\omega t) \quad (x = 0).$$

Hierbei wurde im zweiten Schritt die Identität $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ verwendet.

Gemäß Definition der Periodendauer T ist die Elongation gleich für die Zeiten t_1 und $t_1 + T$. Es folgt

$$-y_m \sin(\omega t_1) = -y_m \sin(\omega(t_1 + T)) = -y_m \sin(\omega t_1 + \omega T).$$

Wie oben folgt $\omega T = 2\pi$.

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \text{Winkelgeschwindigkeit}} \quad (4.4)$$

Wie bei der Frequenz eines harmonischen Oszillators ist die Frequenz f gleich der pro Zeit ausgeführten Schwingungen, wobei hier die Schwingungen eines einzelnen Oszillators gemeint sind.

Andere Herleitung der Phasengeschwindigkeit

Betrachtet man eine laufende Welle, so erkennt man, dass ein Punkt mit bestimmter Phase mit konstanter Geschwindigkeit weitertransportiert wird. Die einzelnen Elemente des Trägers bleiben dabei natürlich an ihrer x -Position, es bewegt sich einzig das Wellenprofil. Konstante Phase bedeutet:

$$kx - \omega t = \text{const.}$$

Damit dies gelten kann, muss x mit wachsender Zeit zunehmen, was nochmal zeigt, dass sich die Welle in Richtung positiver x -Werte fortpflanzt. Um einen Ausdruck für die Phasengeschwindigkeit $c = \dot{x}$ zu gewinnen, differenzieren wir die Phase nach der Zeit und erhalten

$$k\dot{x} - \omega = 0.$$

bzw.

$$\boxed{c = \frac{\omega}{k}}.$$

Zusammen mit $k = 2\pi/\lambda$ und $\omega = 2\pi/T$ folgt hieraus die schon oben angegebene Gleichung

$$\boxed{c = \lambda f.}$$

Die Geschwindigkeit jeder Welle beträgt also eine Wellenlänge pro Periodendauer.

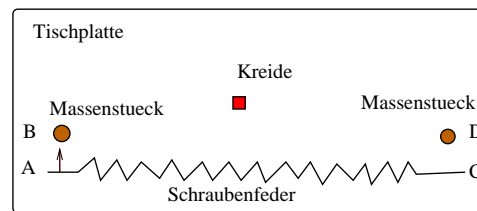


Abbildung 4.10: Ein einfaches Experimente zur 'Wellenaddition': Benötigtes Material: zwei 1kg Massenstücke, eine Schraubenfeder ('Treppenläufer'), ein neues Stück Kreide. Wird durch die Bewegung A nach B (das Massenstück dient als Anschlag) ein Wellenberg erzeugt, so erreicht dieser nicht die Kreide, nur wenn zwei Wellenberge sich bei K begegnen, so reicht deren summierte Amplitude aus, um die Kreide zu stürzen.

4.1.3 Welleninterferenz

Wir haben bislang immer nur eine Welle auf einem Träger betrachtet. Was passiert, wenn man zwei Wellen aufeinander zulaufen lässt?

Statt des hier dargestellten deduktiven Verfahrens mittels mathematischer Betrachtungen bietet sich in der Schule auch ein auf Schüleraktivierung bzw. Handlungsorientierung ausgerichtetes Vorgehen an: Man stellt etwa den Schülern die Aufgabe, mit Hilfe eines selbst entworfenen Experiments das Verhalten von zwei sich überlagernder Wellenberge herauszufinden.

Dies wird aber nicht in einer Schulstunde beendet werden können → Projektarbeit.

Ein Vorschlag zur experimentellen Demonstration der Überlagerung ist in Abbildung 4.10 zu sehen.

Die Elongationen lassen sich mittels Vektoren darstellen, die man addieren kann. Für Wellen gilt also das Superpositionsprinzip. Treffen zwei Wellen auf einem Träger (oder elektromagnetische Wellen) aufeinander, so durchdringen sie sich ungestört. Dieses Verhalten ist in der Abbildung (4.11) dargestellt. Man sieht, dass die die Wellen (hier ist der Deutlichkeit halber nur eine Halbwelle (Berg) dargestellt) nach der Durchdringung wieder in alter Form weiterlaufen. Im Moment der vollständigen Überlagerung addieren sich die Amplituden.

4.1.3.1 Überlagerung zweier gleichsinnig laufender Wellen

Phänomene zur Überlagerung von laufenden Wellen sind sehr gut mit der realen Wellenmaschine ausführbar.

Zur methodischen Variation im Unterricht kann man aber auch den Computer einsetzen. Im Internet gibt es bereits viele frei verfügbare Simulationsprogramme zur Physik- u.a. auch zur Wellenmaschine. Ein Screenshot einer solchen Simulation ist in Abbildung 4.12 zu sehen.

Angenommen, wir schicken zwei sinusförmige Wellen gleicher Amplitude und Wellenlänge in gleicher Richtung auf einen Träger, z.B. ein Seil. Was wird geschehen? Das Ergebnis hängt ab von der Frage, zu welchem MaSS die Wellen in Phase ('gleichschrittig') sind. Das heißt, in wie weit die eine Welle gegenüber der anderen verschoben ist. Sind die Wellen exakt in Phase, d.h. die Berge und Täler sind an gleicher Stelle, so ergibt sich eine Welle mit gleicher Wellenlänge aber doppelter Amplitude. Sind die Wellen vollständig außer Phase, d.h. jeder Berg der einen Welle trifft auf ein Tal der anderen Welle, so löschen sich die beiden Wellen aus - das Seil ist in Ruhe. Man nennt dieses Phänomen der Überlage-

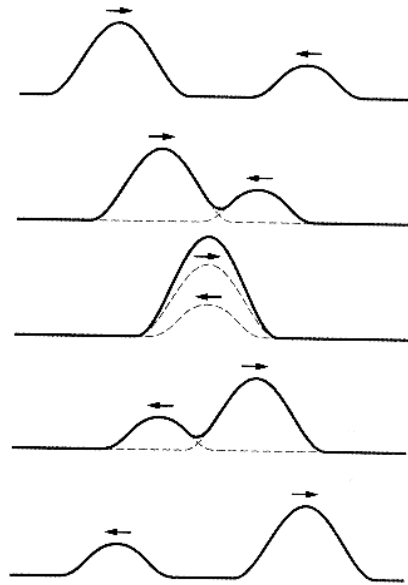


Abbildung 4.11: Zwei gegenläufige Seilstörungen

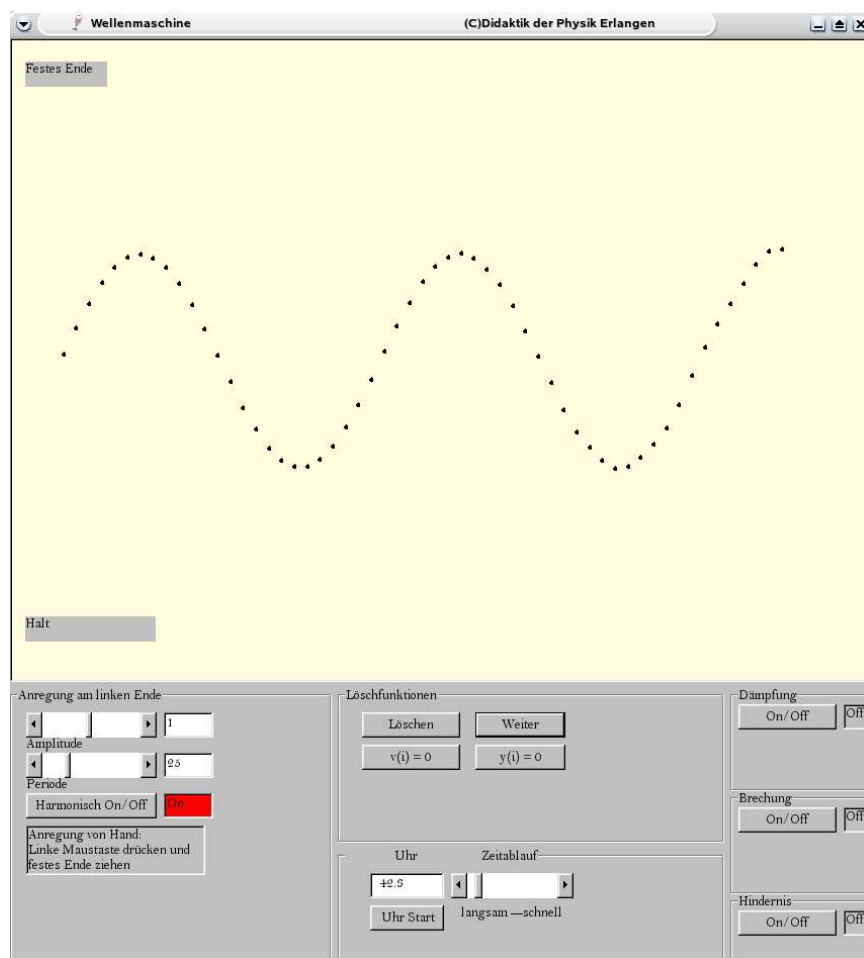


Abbildung 4.12: Screenshot einer Wellenmaschinen - Simulation (Quelle: Didaktik der Physik, Erlangen)

rung in konstruktiver bzw.destruktiver Weise auch **Interferenz** . Man sagt dann auch, die Wellen interferieren konstruktiv (gegenseitige Verstärkung) bzw. destruktiv (gegenseitige Auslöschung).

Dieses Phänomen läßt sich auch leicht mathematisch beschreiben:

Seien die beiden Wellen (gleiche Amplitude, Wellenlänge und Frequenz) durch die Gleichungen

$$y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t)$$

und

$$y_2(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$$

wobei ϕ die Phasenkonstante ist, die beschreibt, um wieviel die beiden Wellen außer Phase sind. Man nennt ϕ deshalb auch **Phasendifferenz** der beiden Wellen. Die resultierende Welle nach der Überlagerung der beiden Wellen ergibt sich gemäß Superpositionsprinzip:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx - \omega t + \phi)$$

Mit Hilfe eines Additionstheorems für Winkelfunktionen ² ergibt sich für die resultierende Welle

$$y(x, t) = 2y_m \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

Die resultierende Welle ist also ebenfalls eine sinusförmige, in x-Richtung fortschreitende Welle. Diese Welle ist diejenige Welle, die man beobachtet, man sieht nicht etwa zwei einzelne Wellen!. Man liest ab, dass die neue Welle eine Phasenkonstante $\phi/2$ aufweist. Außerdem ist die Amplitude der Resultierenden $2y_m \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$. Wichtige Fälle:

1. $\phi = 0$: Konstruktive Interferenz, $\cos(0/2) = 1$, neue Amplitude gleich $2y_m$.
2. $\phi = \pi$: Vollständig destruktive Interferenz, $\cos(\pi/2) = 0$, neue Amplitude gleich 0.

4.1.3.2 Überlagerung zweier entgegengesetzt laufender Wellen

Im vorangegangenen Abschnitt wurden zwei in gleicher Richtung auf dem Träger laufende Wellen überlagert. Auch der Fall der Überlagerung zweier sich entgegenlaufender Wellen ist wichtig. Wie oben betrachten wir zwei Wellen mit gleicher Amplitude, Wellenlänge und Frequenz. Ihre Gleichungen sind

$$y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t)$$

und

$$y_2(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t).$$

Man beachte das Plus-Zeichen in der Phase der zweiten Welle. Eine linkslaufende Welle wird auf diese Weise beschrieben (mit größer werdender Zeit muss - damit die Phase konstant ist - x in negative Richtung 'bewegt' werden.) Überlagerung liefert (mit Additionstheorem):

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = (2y_m \sin(kx)) \cos(\omega t).$$

Dies ist nicht die Gleichung einer laufenden Welle, sondern einer sogenannten **stehenden Welle**. Der Absolutbetrag des in Klammern stehende Ausdrucks ($2y_m \sin(kx)$) kann

² $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

als Amplitude des bei x befindlichen Oszillators aufgefasst werden, die sich gemäß $\cos(\omega t)$ zeitlich verändert.

Die sich nicht bewegenden Punkte auf dem Träger nennt man **Knoten** der Welle. Die Knotenpositionen lassen sich leicht angeben: Die Nullstellen der Amplitude liegen dort, wo $\sin(kx) = 0$ gilt. Dies ist der Fall bei

$$kx = n\pi \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

Ersetzung von k durch $2\pi/\lambda$ liefert als Knotenstellen

$$x = n\frac{\lambda}{2} \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Wellenknoten})$$

Beachte, dass benachbarte Knoten um $\lambda/2$ voneinander entfernt sind.

Die maximal bewegten Bereiche einer Welle nennt man **Bäuche**. Der höchste Wert eines Bauches (also eine Elongation von $2y_m$) findet man überall dort, wo $\sin(kx) = 1$ gilt. Dies ist der Fall bei

$$kx = (n + \frac{1}{2})\pi \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

Ersetzung von k durch $2\pi/\lambda$ liefert als 'Bauchstellen'

$$x = (n + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{2} \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Wellenbäuche})$$

Beachte, dass benachbarte Bäuche um $\lambda/2$ voneinander entfernt sind und jeweils in der Mitte zwischen zwei Knoten 'leben'.

Tabellarischer Vergleich zwischen fortschreitender und stehender Welle			
Stehende Welle	Fortschreitende Welle		
Das räumliche Kurvenbild bleibt am Ort. Es erfährt lediglich periodisch affine Änderungen senkrecht zur x-Achse.	Das räumliche Kurvenbild erfährt eine stetige Verschiebung mit der Geschwindigkeit c		
Die Amplitude ist am größten in den Schnellebäuchen. Die Amplitude nimmt ab, wenn man sich den Knoten nähert, in den Knoten ist sie exakt (und stets) null.	Alle Punkte haben gleiche Amplitude, erreichen diese aber (i.a.) zu unterschiedlichen Zeiten.		
Im Moment größter Elongation ist für einen Zeitpunkt überall längs der Welle Stillstand.	Es gibt keinen Zeitpunkt, an dem sich simultan alle Oszillatoren in Ruhe befinden.		
Alle Oszillatoren gehen gleichzeitig durch die Gleichgewichtslage und haben dabei ihre größte Schnelle.	Es gibt keinen Zeitpunkt, an dem sich alle Oszillatoren in der Gleichgewichtslage befinden.		

4.1.3.3 Reflexion einer Welle am Trägerrand

Bislang betrachteten wir Wellen, die sich auf einem unendlich ausgedehnten Träger bewegen. Alle mechanischen Wellen sind aber durch ihren Träger auf einen endlichen Raumbezug begrenzt (Erdbebenwellen z.B. auf die Erdoberfläche!) Trifft eine Welle auf den Rand des Trägers, so unterscheidet man grundsätzlich zwischen zwei Situationen: Dem sogenannten

offenen Ende und dem **geschlossenen Ende**. Am geschlossenen Ende wird der Träger an jeder Bewegung gehindert - der letzte Oszillator in der Kette bei einer linearen Welle wird also zwangsweise festgehalten. Am offenen Ende dagegen kann der letzte Oszillator mitschwingen - allerdings fehlt ihm auf einer Seite eine rückstellende Kopplung.

Es ist gar nicht offensichtlich, aber auch an einem offenen Ende wird eine Welle reflektiert! In der obigen Abbildung (4.13) sind diese beiden Situationen graphisch dargestellt.

Das geschlossene Ende ist durch eine feste Anbindung des Seils an die Wand realisiert. Das offene Ende kommt dadurch zustande, dass das Seilende mit einem Ring frei an der Stange auf und ab gleiten kann. Wie man sieht, wird am festen Ende ein Wellenberg in ein Wellental verwandelt (Phasensprung um π , bzw. in Wellenlängen ausgedrückt um $\lambda/2$), während am offenen Ende ein Wellenberg als Wellenberg reflektiert wird. Bei einem offenen Ende befindet sich also stets ein Wellenbauch, während bei einem geschlossenen Ende ein Knoten der Welle liegt.

4.1.3.4 Stehende Wellen und Resonanzen

Angenommen, ein Seilende ist fest eingespannt und das andere wird sinusförmig angeregt, so wird eine laufende Sinuswelle auf dem Träger erzeugt. Am festen Ende wird diese Welle reflektiert und interferiert mit der einlaufenden Welle.

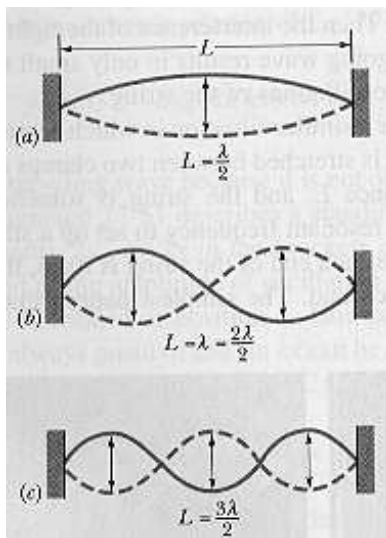


Abbildung 4.14: Die ersten Harmonischen

Für bestimmte Anregungsfrequenzen bildet sich auf dem Träger eine stehende Welle aus, für alle anderen Frequenzen dagegen nicht. Das auf dem Träger bei einer stehenden Welle entstehende Muster nennt man manchmal auch **Schwingungsmodus**. Man sagt, die stehende Welle entsteht durch **Resonanz**, die zugehörigen Erregerfrequenzen heißen **Resonanzfrequenzen**.

Es entsteht die Frage, ob man die Resonanzfrequenzen vorhersagen kann. Wir betrachten eine an beiden Enden fest eingespannte Saite (Gitarre). Die Saitenlänge (also der Abstand der beiden festen Enden), sei L . Durch geeignete Anregung sei auf der Saite eine stehende Welle angeregt worden. Wegen der Randbedingung (feste Enden) befinden sich am Trägerrand jeweils Knoten. Welche Schwingungsmoden sind möglich? In der Abbildung (4.14) sind die einfachsten Moden dargestellt:

Die einfachste Mode zeigt einen Bauch in der Mitte bei $x = \frac{L}{2}$ und zwei Knoten (bei 0 und bei L). Zu dieser Mode gehört eine Wellenlänge von $\lambda = 2L$.

Die nächst einfache Mode zeigt zwei Bäuche und drei Knoten, dies wird bei einer Wellenlänge von $\lambda = L$ passieren. Vier Knoten und drei Bäuche finden sich bei der nächsten Mode bei einer Wellenlänge von $\lambda = \frac{2}{3}L$. Allgemein ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen der Wellenlänge und der Saitenlänge bei einer stehenden Welle auf einer Saite:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad \text{mit } n = 1, 2, \dots$$

Die zugehörigen Resonanzfrequenzen lauten

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n \frac{c}{2L} \quad \text{mit } n = 1, 2, \dots$$

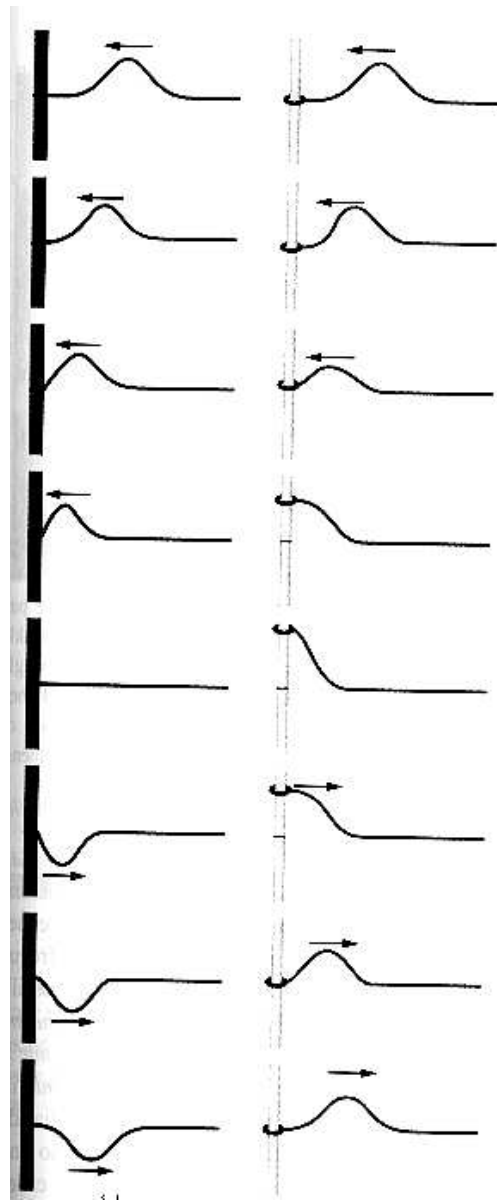


Abbildung 4.13: Reflexion am geschlossenen und am offenen Ende



Abbildung 4.15: Fast meint man schon das Geräusch zu hören.

wobei c die Phasengeschwindigkeit auf der Saite ist. Die letzte Gleichung zeigt, dass die Resonanzfrequenzen ganzzahlige Vielfache der kleinsten Resonanzfrequenz $f_1 = \frac{c}{2L}$ ($n=1$) sind. Die Schwingung mit der kleinsten Frequenz wird auch als Fundamentalmode oder als erste Harmonische bezeichnet. Die zweite Harmonische erhält man mit $n = 2$ usw..

4.1.4 Der Doppler-Effekt

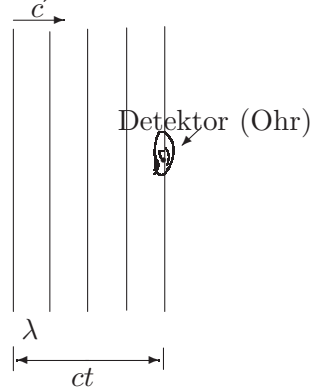
Man stelle sich vor, ein Polizeiauto mit Sirene ($f=1000$ Hz) steht mit heulender Sirene am Straßenrand. Steht der Beobachter ebenfalls, so hört er einen Ton dieser Frequenz. Fährt er an dieser Geräuschquelle vorbei, so bemerkt er einen seltsamen Effekt: Er hört bei Annäherung an die Sirene einen höheren Ton als bei Entfernung von der Schallquelle. Fährt er z.B. mit einer Geschwindigkeit von 120 km/h, so hört er bei Annäherung einen Ton mit $f = 1056$ Hz, bei Entfernung dagegen $f = 904$.

Dieser sogenannte Doppler-Effekt wurde im Jahre 1842 von dem österreichischen Physiker **Christian Doppler** (1803-1853) vorhergesagt und 1845 von **Buys Ballot** in Holland experimentell bestätigt. Ballot verwendete hierzu einen von einer Lokomotive gezogenen offenen Wagon, auf dem sich einige Trompeter befanden. Den Doppler-Effekt findet man nicht nur bei Schallwellen, sondern auch bei elektromagnetischen Wellen (Mikrowellen, sichtbares Licht). Beispielsweise wurde der Doppler-Effekt für die sogenannten Radarfallen verwendet. Heutzutage wird hierzu ein LASER verwendet. Wichtig ist der Effekt auch für astrophysikalische Messungen und Auswertungen von Sternenlicht. Zur weiteren Betrachtungen werden allerdings nur Schallwellen betrachtet. Als Bezugssystem für die folgenden Betrachtungen wählen wir die somit als ruhend angenommene Luft. Gegenüber der Luft gebe v_Q die Geschwindigkeit der Schallquelle und v_D die Geschwindigkeit des Detektors (Ohr bzw. Mikrophon) an. Ferner nehmen wir an, dass sich Quelle bzw. Detektor entweder

direkt aufeinander zu oder voneinander weg bewegen. Die auftretenden Geschwindigkeiten v_D und v_Q seien alle kleiner als die Schallgeschwindigkeit in Luft.

Ruhende Quelle und bewegter Detektor

Wir betrachten eine ruhende Schallquelle, also etwa das am Straßenrand parkende Polizeiauto aus dem Einführungstext. Die Sirene sendet sphärische Wellenfronten mit Wellenlänge λ und Frequenz f aus. Diese Wellenfronten - (regelmäßige Muster aus äquidistanten Druckschwankungen in der Luft) - bewegen sich mit Schallgeschwindigkeit c durch die Luft. In der Zeichnung sind die Wellenfronten jeweils eine Wellenlänge voneinander entfernt gezeichnet. Der Detektor wird durch das Ohr symbolisiert.



Die vom Detektor wahrgenommene Frequenz ist die Rate (also Anzahl der Wellenfronten pro Zeitintervall), mit der die Wellenfronten das Ohr passieren. Falls D in Ruhe ist, so ist diese Frequenz gleich der Frequenz f . Da sich aber D auf die Schallquelle zubewegt, ist die Rate gegenüber f erhöht. Die von D registrierte Frequenz f' ist in diesem Fall also größer als f . Sei zunächst $v_D = 0$. In der Zeit t bewegen sich die Wellenfronten um ct nach rechts. Die Anzahl der Wellenlängen in dieser Strecke ist gleich der Anzahl der Wellenlängen, die von D in der Zeit t durchquert wird. Diese Zahl ist gleich $\frac{ct}{\lambda}$. Die von D registrierte Frequenz ist demnach gegeben durch

$$f' = \frac{\frac{ct}{\lambda}}{t} = \frac{c}{\lambda}$$

Bei ruhendem Detektor und ruhender Quelle verschwindet also der Doppler-Effekt.

Jetzt bewege sich D mit $v_D \neq 0$ auf die Quelle zu, also den Wellenfronten entgegen. Die Wellenfronten bewegen sich wie eben in der Zeit t um ct vorwärts (in der Zeichnung nach rechts), nun allerdings bewegt sich D in der selben Zeit um $v_D t$ nach links. Relativ zu D haben sich also die Wellenfronten in der Zeit t um die Strecke $(c + v_D)t$ bewegt. In dieser Strecke haben $\frac{ct + v_D t}{\lambda}$ Wellenlängen Platz. Diese Wellenfrontenanzahl wird von D in der Zeit t registriert. Die Rate, mit der diese Fronten registriert werden, ist nun

$$f' = \frac{\frac{ct + v_D t}{\lambda}}{t} = \frac{c + v_D}{\lambda}.$$

Wegen $\lambda = v/f$ ergibt sich

$$f' = \frac{c + v_D}{\lambda} = f \frac{c + v_D}{c} \quad (D \rightarrow Q).$$

Man erkennt, dass für alle $v_D \neq 0$ f' größer als f ist.

Bewegt sich D von der Quelle weg, so bewegen sich in der betrachteten Zeit t die Wellenfronten um $ct - v_D t$ relativ zu D . Analog zu oben ergibt sich als Frequenz:

$$f' = \frac{c - v_D}{\lambda} = f \frac{c - v_D}{c}. \quad (QD \rightarrow)$$

In dieser Gleichung ist $f > f'$ solange $v_d \neq 0$.

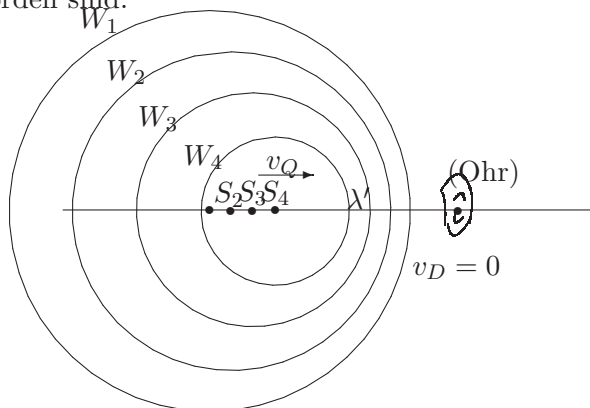
Die beiden Fälle (D auf Q zu bzw. D von Q fort) lassen sich kompakt wie folgt zusammenfassen:

$$f' = f \frac{c \pm v_D}{c} \quad (Q \text{ fest, } D \text{ bewegt}) \quad (4.5)$$

Das jeweils gültige Rechenzeichen ermittelt man durch physikalische Überlegung: Wenn D sich auf Q zubewegt, so ist f' größer als f , was auf ein Pluszeichen im Zähler hinausläuft.

Bewegte Quelle und ruhender Detektor

Sei nun D relativ zur Luft in Ruhe. Die Quelle Q bewege sich mit v_Q auf D zu. In diesem Fall wird durch die Bewegung von Q **die Wellenlänge verändert**. In der Abbildung sind die Wellenfronten W_i dargestellt, die von der Quelle in den Positionen S_i abgesendet worden sind.



Somit ändert sich auch die von D festgestellte Frequenz f' gegenüber f . Um die Wellenlängenveränderung zu verstehen, betrachten wir diejenige Zeit $T (= \frac{1}{f})$, die zwischen dem Aussenden von zwei beliebigen, aufeinanderfolgenden Wellenfronten W_1 und W_2 verstreicht. Während T bewegt sich W_1 um vT und die Quelle um $v_Q T$ vorwärts. Nach Ablauf von T wird die Front W_2 von Q ausgesendet. In Richtung der Bewegung von Q beträgt die Entfernung zwischen W_1 und W_2 : $cT - v_Q T$. Dies ist aber gerade die in diese Richtung gemessene Wellenlänge λ' . Befindet sich D gerade in dieser Richtung (was der Fall ist, wenn sich Q auf D zu bewegt!), so registriert Q eine Frequenz

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{c}{cT - v_Q T} = \frac{c}{\frac{c}{f} - \frac{v_Q}{f}} = f \frac{c}{c - v_Q}$$

Bewegt sich Q von D fort, so ergibt sich analog

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = f \frac{c}{c + v_Q}$$

Die beiden Fälle (Q auf D zu bzw. Q von D fort) lassen sich kompakt wie folgt zusammenfassen:

$$f' = f \frac{c}{c \mp v_Q} \quad (D \text{ fest, } Q \text{ bewegt}) \quad (4.6)$$

Das jeweils gültige Rechenzeichen ermittelt man durch physikalische Überlegung: Wenn Q sich auf D zubewegt, so ist f' größer als f , was auf ein Minuszeichen im Nenner hinausläuft.

Allgemeine Regel zu Gleichungen (4.5 und 4.6) auch hier: *'Heran heißt größer'*

Bewegte Quelle und bewegter Detektor

Im Allgemeinen bewegen sich sowohl Quelle als auch Detektor relativ zur Luft. Die in diesem Fall vom Detektor registrierte Frequenz lässt sich leicht berechnen. Man ersetzt hierzu die Frequenz f der Quelle in Gleichung (4.6) durch den Term der Frequenz f' in Gleichung (4.5) (entspricht einer Hintereinanderschaltung zweier Dopplerverschiebungen). Man erhält:

$$f' = f \frac{c \pm v_D}{c \mp v_Q} \quad (\text{Allgemeine Dopplergleichung}) \quad (4.7)$$

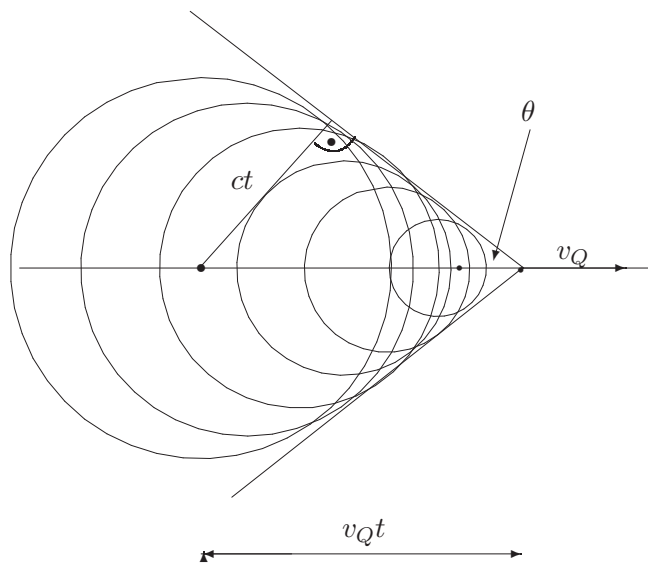
Setzt man $v_D = 0$ bzw. $v_Q = 0$ so erhält man die jeweilige Spezialformel zurück. Auch hier lässt sich das Vorzeichen durch die Regel *'Heran heißt größer'* ermitteln.

Allgemeine Bemerkung: Es erscheint merkwürdig, dass die Gleichungen für bewegte Quelle bzw. bewegten Detektor verschiedene Gestalt haben. Die Ursache hiervon liegt darin, dass durch die ruhende Luft ein spezielles Bezugssystem vorgegeben (bzw. ausgezeichnet) wird. Da die Schallwellengeschwindigkeit auf diesen Träger bezogen wird, ist mit einer Bewegung relativ zum Träger eine Änderung der Schallgeschwindigkeit verknüpft, was zu einer Unsymmetrie der Gleichungen führt. Diese Unsymmetrie entfällt bei Lichtwellen im Vakuum, so dass dort die Dopplergleichungen vollkommen symmetrisch gegenüber Vertauschung von v_Q und v_D sind. Dies ist u.a. eine Erkenntnis aus der speziellen Relativitätstheorie, in der Bezugssysteme, die sich gleichförmig gegeneinander bewegen, als gleichberechtigt behandelt werden.

Überschallgeschwindigkeit und Schockwelle

Bei den oben durchgeführten Betrachtungen wurde stets vorausgesetzt, dass die Bewegung der Quelle bzw. die Geschwindigkeit des Detektors kleiner als die Schallgeschwindigkeit c in dem Medium ist.

Lässt man z.B. in Gleichung (4.6) v_Q gegen c gehen, so nähert sich f' dem Wert Unendlich. Dies bedeutet, dass die Quelle sich so schnell bewegt, dass sie mit den von ihr produzierten Wellenfronten Schritt halten kann. Was passiert, wenn die Quellengeschwindigkeit die Schallgeschwindigkeit sogar übertrifft (heute kein Problem mit Düsenflugzeugen)? Zumindest kann man die obigen Gleichungen nicht mehr anwenden!



Die Situation ist in der Abbildung dargestellt. Jede der dargestellten Wellenfronten hat einen Radius von ct , wobei c die Schallgeschwindigkeit und t die Zeit ist, die seit der Emission des Signals verstrichen ist. Die Wellenfronten häufen sich an einer in der Zeichnung V-förmigen Grenze. Im dreidimensionalen Raum muss man sich dies zu einem Kegel vervollständigt denken, dessen Spitze von der bewegten Schallquelle gebildet wird (z.b. Jet-Flugzeug). Diesen Kegel nennt man **Mach-Kegel**. In der Oberfläche dieses Kegels häufen sich die von Q ausgesendeten Wellenfronten - es kommt zu einer drastischen Verstärkung (konstruktiven Interferenz) der Wellenfronten, bei der sich die einzelnen Druckanstiege in der Luft addieren zu einer sogenannten **Schockwelle**. Streicht dieser Kegelmantel über einen Beobachter hinweg, so nimmt dieser das als Knall wahr. (Überschallknall) Der halbe Öffnungswinkel θ des Machschen Kegels ist aus den relevanten Geschwindigkeiten berechenbar:

$$\sin \theta = \frac{ct}{v_Q t} = \frac{c}{v_Q} \quad (\text{Halber Winkel des Machkegels}) \quad (4.8)$$

Den Quotienten $\frac{v_Q}{c}$ nennt man auch die **Mach-Zahl**. Die Geschwindigkeitsangabe 'mach 2.4' bedeutet also, dass sich das Flugzeug mit 2.4 facher Schallgeschwindigkeit bewegt.

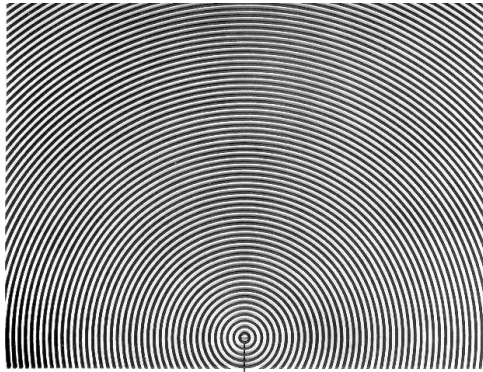


Abbildung 4.16: Eine Kreiswelle

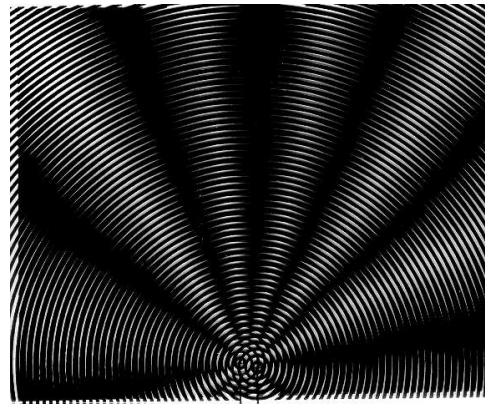


Abbildung 4.17: Zwei interferierende Kreiswellen

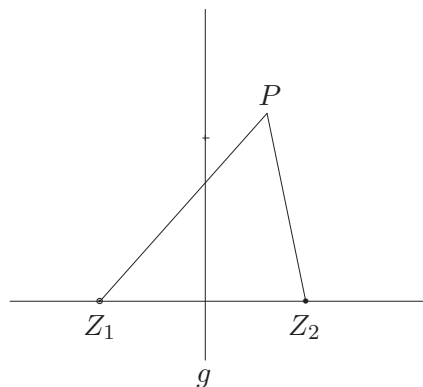
4.1.5 Interferenz und Huygenssches Prinzip: Grundlagen

Bislang haben wir uns auf die Untersuchung von Wellen beschränkt, die sich längs einer Raumrichtung ausbreiten (Seilwellen, Oszillatorkette usw.). Diese Einschränkung ist aber schon bei den bekannten Wasserwellen nicht mehr gegeben - wir müssen auch Ausbreitungen in der Ebene bzw. allgemeiner im Raum zulassen.

Die zwei einfachsten Formen von solchen Wellen sind die sogenannten Kreiswellen (auch sphärische Wellen genannt) und ebene Wellen. Bei einer **Kreiswelle** läuft die Welle von einem punktförmigen Zentrum in alle Richtungen mit gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit. Paradebeispiel: Ein Stein wird bei Windstille in einen Teich geworfen - es breitet sich eine Kreiswelle aus (genauer: es breitet sich eine Störung aus, da die für eine Welle notwendige Periodizität fehlt). Man sagt auch, dass eine sphärische Welle eine **Radialsymmetrie** aufweist, da keine Richtungsabhängigkeit (Winkel) vorkommt - eine solche Welle kann bereits eindeutig in Abhängigkeit vom Abstand vom Zentrum berechnet werden.

Bei einer **ebenen Welle** sind die Wellenfronten parallel: bei ebenen Wellen sind die Wellenfronten Geraden, bei räumlichen ebenen Wellen dagegen Ebenen.

Wir betrachten eine Anordnung, bei der von zwei verschiedenen Punkten Z_1 und Z_2 zwei Kreiswellen ausgehen. Dabei sei angenommen, dass die Erreger in Z_1 und Z_2 phasengleich und frequenzgleich arbeiten. Einen Eindruck hiervon vermittelt die Abbildung (4.17). Wenn also von Z_1 ein Wellenberg ausgeht, so soll gleichzeitig auch von Z_2 ein Wellenberg ausgehen. Beide Kreiswellen haben wegen der vorausgesetzten Frequenzgleichheit auch gleiche Wellenlänge. Die Situation ist in der Abbildung graphisch dargestellt.



Kann man vorhersagen, wie die Superposition der beiden Wellen in einem beliebig vorgegebenen Raumpunkt P erfolgen wird? Die Situation erscheint zunächst hoffnungslos kompliziert zu sein. Um ein Gefühl für das Problem zu gewinnen, betrachtet man in der Physik häufig erst einfachere Fälle. Was heißt in der Physik einfach? Meistens sind darunter Situationen zu verstehen, bei der nur wenige Teilchen auftreten (z.B. 1 Teilchen oder sogar nur 0 Teilchen!) oder wo eine hohe Symmetrie auftritt. In unserem Fall finden wir eine in diesem Sinne einfache Situation auf der Mittelsenkrechten g der Strecke Z_1Z_2 . Trifft in einem beliebig herausgegriffenen Punkt G auf g ein Wellenberg von Z_1 ein, so trifft zeitgleich ein Wellenberg von Z_2 in G ein, da ja die beiden Berge von ihren Ausgangspunkten gleiche Laufzeit bis G benötigen. Durch Addition der Elongationen in G (Superposition) erhält man in G konstruktive Interferenz der Wellen. Da G beliebig gewählt ist, gilt dies auf ganz g . Trifft aber wirklich in allen Punkten von G irgendwann auch ein Wellenberg ein? Antwort: ja!. Begründung: Selber denken!

Kann man die obige Überlegung auf Punkte übertragen, die nicht auf g liegen? Wichtig für die Art der Interferenz in einem Punkt P ist die Frage, wie die von den Erregerzentren ausgehenden Berge und Täler in P zusammentreffen. Für Punkte auf g lag die Antwort in der Tatsache, dass die Wellen gleiche Wegstrecken von Z_1 bzw. von Z_2 zum betrachteten Punkt zurücklegen müssen. Dies ist bei P nicht mehr der Fall. Wir können aber die Wegstreckendifferenz - den sogenannte **Gangunterschied** berechnen: Von Z_1 bis P : $\overline{Z_1P}$. Von Z_2 bis P : $\overline{Z_2P}$. Für den Gangunterschied δ folgt:

$$\delta = |\overline{Z_1P} - \overline{Z_2P}| \quad (4.9)$$

Bedingung für maximale konstruktive Interferenz in P :

$$\delta = k\lambda \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

Bedingung für maximale destruktive Interferenz in P :

$$\delta = \frac{2k+1}{2}\lambda \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

Die experimentelle Untersuchung von Wellen erfolgt günstig in einer sogenannten Wellenwanne. Hierbei wird die Wasseroberfläche in einer flachen Wanne periodisch durch Eintauchen eines Gegenstands gestört. Arbeitet man mit einem Stift als Gegenstand, so wird eine **Kreiswelle** ausgesandt - bei einem länglichen Stab dagegen eine **ebene Welle**. Bei einer ebenen Welle befinden sich die Orte gleicher Phase auf parallelen Ebenen bzw. Geraden. Bei Kugelwellen sind diese Orte dagegen auf Kugelschalen angeordnet.



Abbildung 4.18: Christiaan Huygens

Der holländische Physiker und Mathematiker Christiaan Huygens untersuchte im 17. Jahrhundert - also zur Lebenszeit Newtons - systematisch Wellen. Hierbei versuchte er, die Erscheinungen auf ein theoretisches Konzept zurückzuführen, mit dessen Hilfe die verschiedenen Effekte zu erklären waren. Möglicherweise haben ihn die Beobachtungen einer durch eine schmale Öffnung hindurchlaufenden ebenen Welle inspiriert.

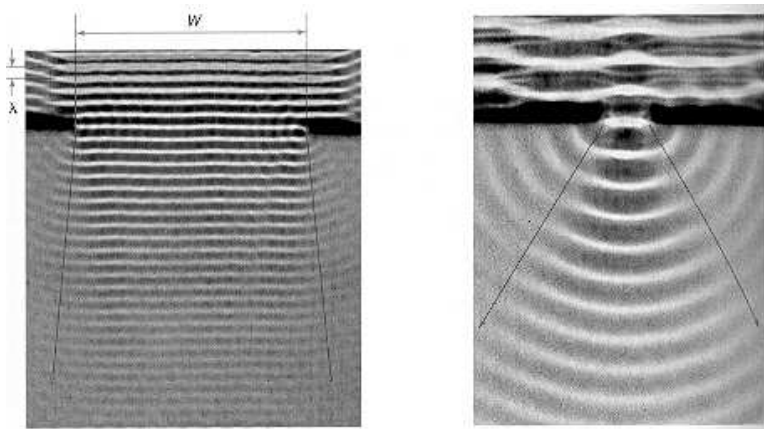


Abbildung 4.19: Badetag in der Wellenwanne: Breiter Spalt links, schmaler Spalt rechts

In obiger Abbildung sind die Bilder von zwei klassischen Experimenten mit einer Wellenwanne dargestellt.

Auffällig ist der starke Einfluss, den die Breite des Spaltes auf das Aussehen der Welle hinter dem Hindernis ausübt. Bei großem Spalt geht die ebene Welle nahezu ungestört hindurch, während ein kleiner Spalt die Welle 'krümmt', sie sogar in den Bereich eindringen lässt, der eigentlich durch das Hindernis abgeschattet wird.³

Huygens formulierte nun zwei Grundsätze, mit deren Hilfe es ihm anschließend gelang, verschiedene Wellenphänomene zu 'begründen'.

Das Huygenssche Prinzip wird zumeist in zwei Teilen formuliert:

Huygenssches Prinzip Teil 1:

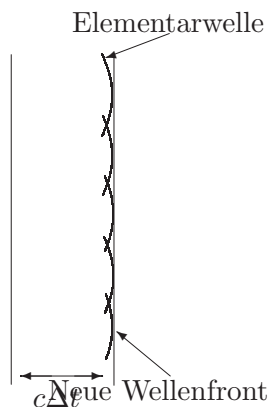
Jeder Punkt einer Wellenfront kann als Ausgangspunkt einer Elementarwelle aufgefasst werden.

Huygenssches Prinzip Teil 2:

Jede Wellenfront kann man sich als Einhüllende von Elementarwellen entstanden denken.

Dieses Konzept ist in der folgenden Abbildung veranschaulicht:

³Es ist sinnvoll, sich klarzumachen, dass die Begriffe 'klein' und 'groß' nur relativ, also im Vergleich mit einer Bezugsgröße sinnvoll sind. Als geeignete Referenzgröße bietet sich hier die Wellenlänge λ an. Wenn man im Zusammenhang mit Wellen von einem großen Objekt spricht, so ist dabei gemeint, dass das Objekt groß im Vergleich mit der Wellenlänge ist.



4.1.6 Anwendung: Brechungs- und Reflexionsgesetz

Das Huygenssche Prinzip kann verwendet werden, um zwei auch in der Optik bekannte Phänomene zu erklären: Die Brechung und die Reflexion von Wellen. An dieser Stelle betrachten wir aber Wasserwellen in der Wellenwanne. Den Übergang zwischen zwei Medien realisieren wir, indem wir die Wassertiefe in einem Teil der Wanne durch eine Glasplatte verringern. Man beobachtet, dass die Wellenlänge im seichten Wasser geringer als im tiefen Wasser ist. Hieraus lässt sich bereits ein Rückschluss auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit in unterschiedlich tiefem Wasser durchführen. Es gilt allgemein der folgende Zusammenhang zwischen Wellenlänge λ , Frequenz f und Ausbreitungsgeschwindigkeit $c \stackrel{!}{=} \lambda f$. Für die beiden Bereiche unterschiedlicher Wassertiefe gilt demnach $c_1 = \lambda_1 f_1$ bzw. $c_2 = \lambda_2 f_2$. Ohne Einschränkung sei der tiefe Bereich mit dem Index 1 versehen. Da beim Übergang die Frequenz unverändert bleibt (sonst käme es zu einem unstetigen Verhalten der Welle am Medienrand) folgt:

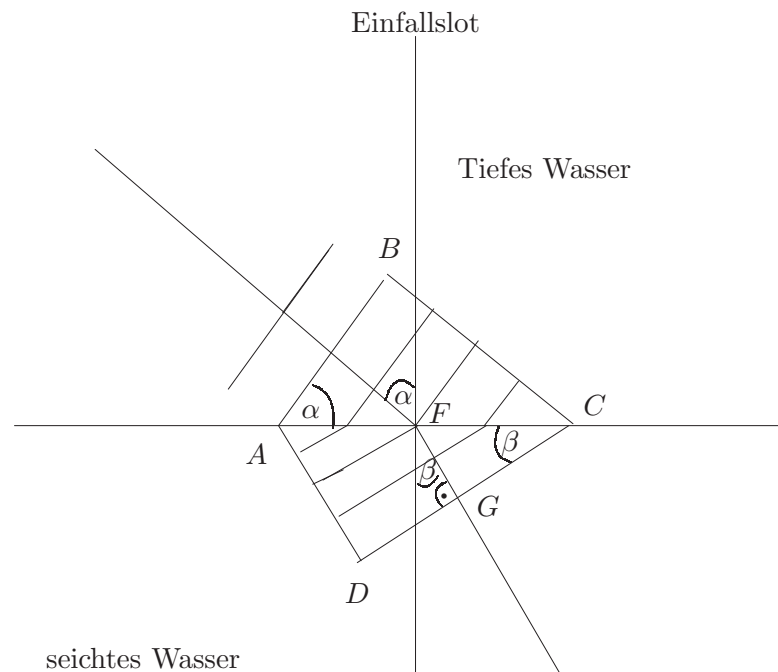
$$f_1 = f_2 \implies \frac{c_1}{\lambda_1} = \frac{c_2}{\lambda_2} \implies \frac{c_1}{c_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (4.12)$$

Man liest ab, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit im 2. Medium kleiner als die Geschwindigkeit im 1. Medium ist, wenn die Wellenlängen das oben angeführte, beobachtete Verhalten zeigen. *Wasserwellen breiten sich in seichtem Wasser langsamer als in tieferem Wasser aus.*

4.1.6.1 Das Brechungsgesetz

Das Brechungsgesetz geht auf **Willebrod Snell** (1591-1625) zurück und wurde von **Ren'e Descartes** auf seine heutige Form gebracht. Man nennt es manchmal auch **Snellius'sches Brechungsgesetz**. Aus der Mittelstufe (Klasse 8) ist das Brechungsgesetz bekannt. Dort wurde es im Rahmen der geometrischen (Strahlen-)Optik formuliert und angewendet. Das Brechungsgesetz tritt zumeist dann in Kraft, wenn eine Welle eine Grenze zwischen zwei verschiedenen Bereichen des Ausbreitungsmediums überquert. In unserem Fall ist eine solche Grenze durch eine (abrupte) Tiefenänderung des Wassers definiert.

Wird in einer Wellenwanne der Boden teilweise erhöht (z.B. mit einer Glasplatte), so erkennt man, dass das Lot der Wellenfronten an der Grenze zwischen flachem und tiefem Wasser abgelenkt ist.



Man stelle sich gemäß dem Huygesschen Prinzip die in der Zeichnung dargestellten Wellenfronten als Superposition von Elementarwellen vor. Im Punkt A werden Elementarwellen direkt in das seichtere Wasser ausgesendet und überlagern sich mit den von den Nachbarpunkten ausgesendeten Wellen zu der neuen Wellenfront im neuen Medium. Die Wellenfront benötigt zum Erreichen des Punkts D die Zeit $t = \frac{\overline{AD}}{c_2}$, wobei mit c_2 die Ausbreitungsgeschwindigkeit im seichten Wasser bezeichnet sei. In derselben Zeit legen die Wellen im tiefen Wasser die Streckenlänge \overline{BC} zurück: $t = \frac{\overline{BC}}{c_1}$. Die neue Ausbreitungsrichtung bildet mit dem Einfallslot den Winkel β . Dieser Winkel tritt nochmals im Dreieck $\triangle ACD$ auf.

Im Dreieck $\triangle ACD$ gilt:

$$\sin \beta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{c_2 t}{\overline{AC}}$$

Analog hierzu gilt für den Winkel α im Dreieck $\triangle ABC$ im Zusammenhang mit dem Einfallslot:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{c_1 t}{\overline{AC}}$$

Hieraus ergibt sich

$$\boxed{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}} \quad (4.13)$$

Gerade im Hinblick auf die Optik wird dieses Gesetz oft auch in einer etwas anderen Fassung präsentiert. Hierzu definiert man eine weitere Größe, die **Brechzahl** n (manchmal auch **Brechungsindex** genannt). Sei c_0 die Ausbreitungsgeschwindigkeit in einem Referenzmedium, z.B. unendlich tiefes Wasser; so definiert man als Brechzahl eines Mediums, in dem eine Ausbreitungsgeschwindigkeit c vorliegt, den Quotienten

$$n = \frac{c_0}{c} \quad (\text{Defintionsgleichung des Brechungsindex}) \quad (4.14)$$

Man kann damit den beiden Medien jeweils eine Brechzahl n_1, n_2 zuordnen und das Brechungsgesetz folgendermaßen aufschreiben:

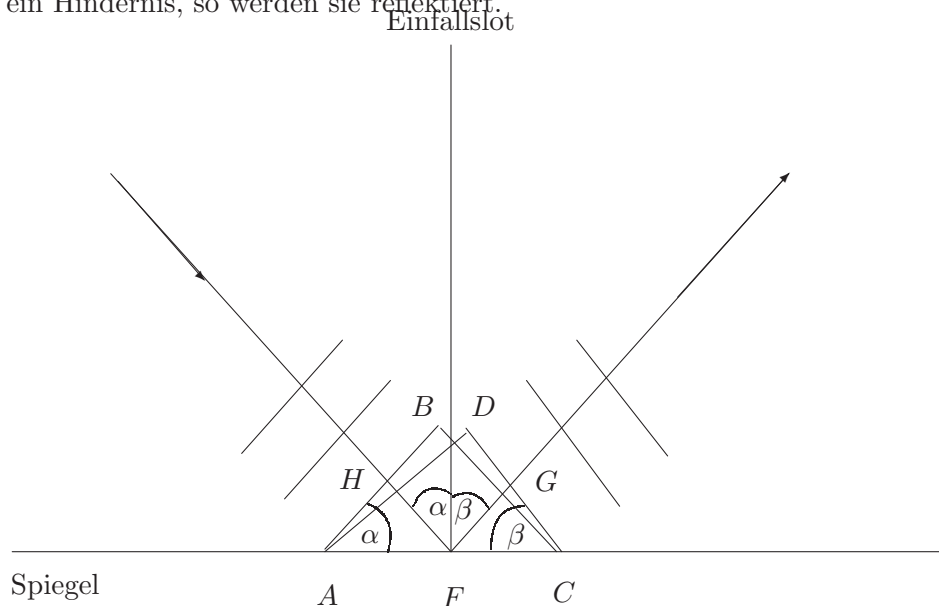
$$\boxed{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}} \quad (\text{Snellius-Brechungsgesetz}) \quad (4.15)$$

Anmerkung: Es ist üblich, Medien mit größerem Brechungsindex als dichtere Medien zu bezeichnen: Ein Medium heisst dichter als ein anderes Medium, wenn

- der Brechungsindex größer ist
- wenn die Ausbreitungsgeschwindigkeit kleiner ist
- wenn die Ausbreitungsrichtung beim Übergang zum Lot hingebrochen wird.

4.1.6.2 Das Reflexionsgesetz

Treffen Wellen auf ein Hindernis, so werden sie reflektiert.



Die Wellenfront AB trifft bei A auf den Spiegel. Es treffen dabei nicht alle Punkte der Front gleichzeitig auf das Hindernis: Bei A wird bereits eine Elementarwelle 'abgeschickt', wenn andere Punkte den Spiegel noch gar nicht erreicht haben. Die nacheinander folgenden Elementarwellen besitzen eine Einhüllende, nämlich die Gerade (DC) . Senkrecht auf dieser steht die neue Ausbreitungsrichtung. Mit Hilfe des Kongruenzsatzes SSW (es ist ja $\overline{AD} = \overline{BC}$!) findet man, dass die Dreiecke $\triangle BAC$ und $\triangle DAC$ kongruent sind. Daraus folgt: $\alpha = \beta$. In Worten: Der Einfallswinkel ist gleich groß wie der Ausfallswinkel.