



Bachelorarbeit

Konvergenz von Gradientenfluss-Modellen

(Convergence of gradient flow models)

Maximilian Baumeister

Matrikelnummer: 460559

Münster, 28. Juni 2023

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Lehrstuhl für Mathematik & Informatik

Betreuer: Prof. Benedikt Wirth

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Aufbau	1
1.2	Gradientenfluss	1
1.3	Gradientensysteme	2
1.3.1	Beispiel 1: Das Van-Roosbroeck-System als Semikonduktormodell	4
1.3.2	Beispiel 2: Simples Feder-Dämpfer System	5
1.4	Energie-Dissipations-Prinzip	7
1.5	Beispiel 3: Oszillierende Dissipation	8
1.6	Der Tilt	9
1.7	Effektive kinetische Relationen und die Kontaktmenge	10
1.8	Beispiel 4: Oszillierende Energie	11
2	Gradientensysteme und deren Konvergenz	12
2.1	Definitionen	12
2.2	Gradientenflussgleichung definiert durch Gradientensystem	14
2.3	Γ -Konvergenz	16
2.4	Simple EDP-Konvergenz	17
2.5	Tilt der Gradientensysteme	18
2.6	Primale und Duale Abbildungen	21
2.7	(Kontakt-)EDP-Konvergenz mit Tilt	23
2.8	Eigenschaften von Tilt-EDP und Kontakt-EDP Konvergenz	24
3	Anwendung	26
3.1	Kontakt-Konvergenz für Beispiel 3: Oszillierende Dissipation	26
3.2	Das Beispiel oszillierender Energie aus [2]	31
3.3	Anwendung von EDP-Konvergenz für partielle Differentialgleichungen	32
3.4	Tilt für Markov-Prozesse	35
3.4.1	Große Abweichungen in Markov-Prozessen und Gradientenflüsse	35
3.4.2	Nicht-dynamischer Kontext	36
3.4.3	Dynamischer Kontext	36
4	Zusammenfassung	39

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Aufbau

Wir werden zunächst einleitend zur Beleuchtung der Problemstellung kurz den historischen Kontext betrachten und informell einige Definitionen sowie Beispiele anführen.

Grundlage dieser Arbeit bildet dabei die Arbeit von Mielke, Montefusco und Peletier ([24]), wir werden also die Modellierung von Gradientenflüssen mithilfe von Gradientensystemen $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R}_\epsilon)$ sowie deren Konvergenz betrachtet. Es werden die 'EDP-Konvergenz' sowie die beiden neuen Konvergenzkonzepte 'Tilt-EDP-Konvergenz' und 'Kontakt-EDP-Konvergenz' vorgestellt welche uns im Limitübergang erlauben sollen die Struktur des Gradientenflusses zu erhalten. Die beiden neuen Konzepte lassen sich bereits in früheren Arbeiten wie beispielsweise [2]&[10] finden, die für die Kontakt-EDP relevante Idee die Kontaktmenge zu betrachten tritt sogar bereits in [5] auf.

Wir werden die drei Konzepte in Kapitel 2 in einem formellen Kontext einbetten und abschließend in Kapitel 3 in der Anwendung an einigen Beispielen betrachten.

1.2 Gradientenfluss

Partielle Differentialgleichungen(PDEs) lassen sich in vielen Feldern, insbesondere der Physik und Ingenieurwissenschaften, finden um eine Vielzahl von Vorgängen zu modellieren. Das Konzept PDEs in der Variationsrechnung mithilfe von Gradienten zu lösen findet sich dabei bereits in [13]. Aufgrund der damals eingeschränkten Rechenleistung fand diese Methode, sowie ihre Diskretisierung im Gradientenverfahren jedoch keine weite Anwendung. Bei dem Verfahren über einen Gradientenfluss versteht man den Fluss der von einem Funktional \mathcal{E} über die Gleichung :

$$\dot{q} = -\nabla\mathcal{E}(q)$$

induziert wird zu nutzen um das Funktional zu minimieren.

Entlang einer Lösung, einer Kurve des steilsten Abstiegs, nimmt, da $\frac{d}{dx}\mathcal{E}(q(t)) = \nabla\mathcal{E}\dot{q} = -|\nabla\mathcal{E}|^2 = -|\dot{q}|^2$, der Wert des Funktional ab. Es lassen sich also bei gegebener Anfangsbedingung $q(0) = q_0$ (lokale) Minimierer des Funktional finden.

Wichtige Arbeit in diesem Bereich kam von DeGiorgi [31] der mit dem Konzept der Γ -Konvergenz erlaubte die Konvergenz einer Familie von Energiefunktionalen \mathcal{E}_ϵ gegen ein Limitfunktional F zu betrachten, sodass die Minimierer von \mathcal{E}_ϵ ebenfalls gegen Minimierer von F konvergieren. Wir werden sie in Abschnitt 2.3 definieren. DeGiorgi selbst stellte bereits die Frage ob diese Konvergenz sich auch so einschränken ließe, dass man ebenfalls die Lösungen der Gradientenflüsse von \mathcal{E}_ϵ gegen den von F sicherstellen kann. Diese Frage fand in der wichtigen Arbeit von Sandier&Serfaty ([11]) eine Antwort. Dort betrachten sie die Ginzburg-Landau Funktionale

$$\mathcal{E}_\epsilon(u_\epsilon) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_\epsilon|^2 + \frac{(1 - |u_\epsilon|^2)^2}{2\epsilon^2} dx - n\pi |\log(\epsilon)|$$

für Ordnungsparameter $u_\epsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sowie $R_\epsilon(v) = \frac{\|v\|_2^2}{2|\log \epsilon|}$ und führen einen Konvergenzbegriff ein der ebenfalls die Konvergenz der Gradientenflüsse sichert.

1.3 Gradientensysteme

Unter einem *Gradientensystem* verstehen wir ein Tripel $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}, \mathcal{R})$ bestehend aus einem Zustandsraum \mathcal{Q} zusammen mit dem Funktional \mathcal{E} und einem Dissipationspotential \mathcal{R} . Da sie ein Funktional mit einer Dissipationsstruktur verbinden bieten Gradientensysteme sich beispielsweise für Modellierung um Energie oder Entropie(2. Gesetz der Thermodynamik) an, bei denen wir die physikalischen Eigenschaften in unserem Modell erhalten wollen. Wie wir im Folgenden sehen werden tragen Gradientensysteme nämlich zusätzliche Information. Im Zuge der Arbeit von Jordan, Kinderlehrer und Otto ([15] und weitere) in der sie mithilfe der Wassersteinmetrik gezeigt haben dass sich die Fokker-Planck-Gleichung als Gradientenfluss des Entropiefunktional interpretieren lässt, wurde ein weites Feld an Diffusionsgleichungen auf diese Weise ebenfalls als Gradientenfluss betrachtet ([3]).

Kurz erwähnt sei hier auch das GENERIC(General Equations for Non-Equilibrium Reversible Irreversible Coupling). In diesem Modellierungsansatz werden reversible und dissipative Dynamiken in ein GENERIC-System $(\mathcal{X}, \mathcal{E}, \mathcal{S}, \mathcal{L}, \mathcal{K})$ mit Zustandsraum \mathcal{X} , Energiefunktional \mathcal{E} , Entropiefunktional \mathcal{S} , Poissonstruktur \mathcal{L} und geometrischer Dissipationsstruktur zusammengefasst für die wir die folgende Evolutionsgleichung erhalten:

$$\dot{x} = \mathcal{L}(x)\mathcal{D}\mathcal{E}(x) + \mathcal{K}(x)\mathcal{D}\mathcal{S}(x)$$

Wir kommen nun zurück zu Gradientensystemen und verweisen für weitere Information zur Modellierung mit GENERIC auf [22] und darin enthaltene Referenzen.

Betrachten wir nun also eine Gradientenflussgleichung zusammen mit einem Gradientensystem so sagen wir sie trägt die *Gradientenstruktur* $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}, \mathcal{R})$. Ein Gradientensystem mit quadratischem \mathcal{R} mit $\mathcal{R}(q, v) = \frac{1}{2} \langle \mathbb{G}(q)v, v \rangle$ nennen *klassisch*. Hierbei ist $\mathbb{G} : T_q \mathcal{Q} \rightarrow T_q^* \mathcal{Q}$ vom Zustand abhängig, positiv-semidefinit und symmetrisch.

Betrachten wir \mathbb{G} als Riemann-Metrik, so erhalten wir den Gradienten von \mathcal{E} über das Inverse $\mathbb{K}(q) = \mathbb{G}^{-1}(q)$ durch $v = -\mathbb{K}(q)\mathcal{D}\mathcal{E}(q)$.

\mathbb{K} definiert über $\xi \mapsto \mathbb{K}(q)\xi = v$ *kinetische Relationen* zwischen Kräften ξ und Raten v und wir nennen es den *Onsager-Operator* in Referenz auf seine Arbeit zu reziproken Relationen in thermodynamischen Prozessen.

Nicht-klassische Systeme nennen wir es *generalisierte* Gradientensysteme. Beispiele für generalisierte Gradientensysteme sind Prozesse die, wie in [19], auf dem Prinzip großer Abweichungen aufbauen oder aber, da ein quadratisches \mathcal{R} keine Unabhängigkeit erlauben würde, von der Rate unabhängige Systeme. Dies wären Prozesse wie Elastoplastizität, Hystereseverhalten in magnetischem Material oder auch Phasenübergänge in Formgedächtnislegierungen, siehe [12] und die darin enthaltenen Referenzen.

Wir erhalten für unser Gradientensystem nun also die Gradientenflussgleichung:

$$\mathcal{D}_v \mathcal{R}(q(t), \dot{q}(t)) + \mathcal{D}\mathcal{E}(q(t)) = 0 \quad (1.1)$$

bzw. für generalisierte Gradientensysteme mithilfe von Fenchel-Legendre Transformation von $\mathcal{R}(q, v)$ die folgenden äquivalenten Formulierungen([16]):

(I) Prinzip maximaler Dissipation:

$$\mathcal{D}\mathcal{E}(q) \in \operatorname{argmax}_{\xi \in T_q \mathcal{Q}^*} (\langle \xi, v \rangle - \mathcal{R}^*(q, \xi))$$

(II) Rayleigh Prinzip:

$$v \in \operatorname{argmin}_{v \in T_q \mathcal{Q}} (\mathcal{R}(q, v) - \langle \mathcal{D}\mathcal{E}(q), v \rangle)$$

(III) Gleichgewicht in \mathbb{R} :

$$\mathcal{R}(q, v) + \mathcal{R}^*(q, -\mathcal{D}\mathcal{E}(q)) = \langle -\mathcal{D}\mathcal{E}(q), v \rangle \quad (1.2)$$

(IV) Gleichgewicht in $T_q^* \mathcal{Q}$:

$$0 \in \partial_v \mathcal{R}(q, v) + \mathcal{D}\mathcal{E}(q) \in T_q^* \mathcal{Q}$$

(V) Ratengleichung in $T_q \mathcal{Q}$:

$$v \in \partial_\xi \mathcal{R}^*(q, -\mathcal{D}\mathcal{E}(q)) \in T_q \mathcal{Q}$$

Wie die Modellierung eines Gradientensystems und dessen Kodierung der Gradientenflussgleichung aussieht wollen wir nun an einem Beispiel demonstrieren.

1.3.1 Beispiel 1: Das Van-Roosbroeck-System als Semikonduktormodell

Wir folgen [20] und betrachten eine simple Version des Van-Roosbroeck-System, ein Reaktions-Diffusions-Modell für Semikonduktoren. Hier haben wir zwei verschiedene Typen von Ladungsträgern, Elektronen mit Dichte n und Löcher mit Dichte p . Da ein Loch-Elektron-Paar nur erzeugt oder ausgelöscht werden kann nennt sich die Reaktion 'Rekombinierung'.

$$X_n + X_p \rightleftharpoons 0$$

Um das Modell so simpel wie möglich zu halten setzen wir die meisten Materialparameter gleich 1. Der Zustand des Systems ist nun durch die Dichten n, p beschrieben und eine Dichte $\eta = (n, p) : \Omega \rightarrow (0, \infty)^2$ erzeugt ein Potential ϕ_η als die einzige Lösung der linearen Potentialgleichung mit gegebenem Dotierungsprofil $\delta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$:

$$-\Delta \phi = \delta - n + p \quad \text{in } \Omega \quad \text{und} \quad \phi = \phi_{Dirichlet} \quad \text{in } \partial\Omega \quad (1.3)$$

Die verschiedenen Vorzeichen von n, p symbolisieren, dass Löcher und Elektronen verschieden geladen sind. Die Entwicklung der Dichten η unterliegt nun Diffusion, Drift durch $\nabla \phi_\eta$ sowie Rekombinierung nach der Erzeugung-Auslöschung-Reaktion.

Mit den Materialparametern (Mobilitäten und Reaktionsrate) welche wir gleich 1 gesetzt haben erhalten wir nun das Drift-Diffusions-System:

$$\begin{aligned} \dot{n} &= \operatorname{div}(\nabla n + n \nabla \phi_\eta) - (np - 1) \\ \dot{p} &= \operatorname{div}(\nabla p + p \nabla \phi_\eta) - (np - 1) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Um nun eine Gradientenstruktur herzustellen definieren wir die die Evolution treibende Gesamtenergie \mathcal{E} sowie die Gesamtladung \mathcal{L} :

$$\mathcal{E}(\eta) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla \phi_\eta|^2 + n(\log n - 1) + p(\log p - 1) dx \quad \text{mit} \quad \mu = \mathcal{D}\mathcal{E}(\eta) = \begin{pmatrix} \log n - \phi_\eta \\ \log p + \phi_\eta \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}(\eta) = \int_{\Omega} \delta - n + p dx \quad \text{mit} \quad \mathcal{D}\mathcal{L}(\eta) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mithilfe von $l(x, y) : (0, \infty)^2 \rightarrow (0, \infty)$; $l(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{\log x - \log y} & \text{für } x \neq y \\ y & \text{für } x = y \end{cases}$

definieren wir nun das duale Dissipationspotential:

$$\mathcal{R}^*(n, p; \mu_n, \mu_p) = \int_{\Omega} \frac{n}{2} |\nabla \mu_n|^2 + \frac{p}{2} |\nabla \mu_p|^2 + (\mu_n + \mu_p)^2 \frac{l(np, 1)}{2} dx$$

Mit $\mathcal{R}^*(\eta; \mu + \lambda \mathcal{D}\mathcal{L}(\eta)) = \mathcal{R}^*(\eta; \mu)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ und

$$\mathcal{R}^*(\eta; -\mathcal{D}\mathcal{E}(q)) = \begin{pmatrix} -\operatorname{div}(n\nabla(-\log n + \phi_\eta) + l(np, 1)(-\log(np))) \\ -\operatorname{div}(p\nabla(-\log p + \phi_\eta) + l(np, 1)(-\log(np))) \end{pmatrix}$$

sehen wir also, dass wir durch $\dot{\eta} = \mathcal{D}_\xi \mathcal{R}^*(\eta; -\mathcal{D}\mathcal{E}(n))$ also die duale Gradientenstruktur des Van-Roosbroeck-Systems aus Gleichung (1.3), (1.4) gegeben haben.

Wie wir gerade beobachtet haben ist die Gradientenflussgleichung die von einem Gradientensystem erzeugt wird eindeutig. Umgekehrt ist die Anzahl der Gradientensysteme welche eine gegebene Gradientenflussgleichung über (1.2) induzieren wie wir am folgenden Beispiel zeigen unendlich.

1.3.2 Beispiel 2: Simplex Feder-Dämpfer System

Der Zustand des Systems ist die Auslenkung der Feder $q \in \mathbb{R}$, nach Hookeschem Gesetz[17] lässt sich die Energie die sie trägt durch $\mathcal{E}_1(q) := \frac{1}{2}kq^2$ beschreiben wobei es sich bei k um die Federkonstante handelt. Die Feder übt der negativen Ableitung der Energie entsprechende Kraft ξ aus. Der Dämpfer sei durch die Relation $\mu v = \xi$ definiert.

Somit erhalten wir die Evolutionsgleichung

$$\mu \dot{q} = -kq \tag{1.5}$$

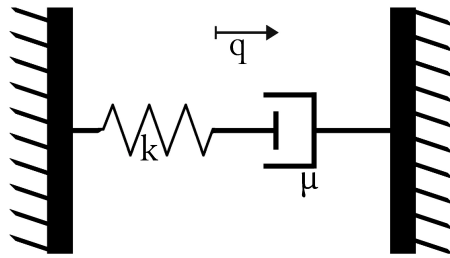


Abbildung 1.1: Feder-Dämpfer-System mit Federkonstante k , Auslenkung q sowie Dämpferkonstante μ

Die Zuordnung von Gleichung (1.5) als Gradientenfluss-Gleichung des Systems $(\mathbb{R}, \mathcal{E}_1, \mathcal{R}_1)$ lässt sich vollziehen indem wir Kapitel 2 von [27] in der Beobachtung folgen, dass die Beziehung $\mu v = \xi$ auch durch das Dissipationspotential $\mathcal{R}_1 := \mu v^2/2$ und dessen Legendre-Dual $\mathcal{R}_1^*(\xi) := \xi^2/2\mu$ dargestellt werden kann.

Eine rigorose Definition erfolgt in Kapitel 2, zur Einführung nutzen wir vorerst folgende Definition der Legendre-Transformation $\mathcal{R}_1^*(\xi) := \sup_v \{\langle \xi, v \rangle - \mathcal{R}(v)\}$ und stellen fest, dass die notwendige Bedingung $\mu v - \xi = 0$ genau die zuvor erwähnte Beziehung des Dämpfers charakterisiert.

Jedoch lassen sich mit folgendem Schema unendlich viele Gradientensysteme $(\mathbb{R}, \mathcal{R}_\lambda, \mathcal{E}_1)$ erzeugen deren Gradientenfluss ebenfalls durch Gleichung (1.5) beschrieben ist.

Dazu suchen wir uns eine Funktion $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ welche in 0 mit $\lambda(0) = 0$ minimiert ist und uns erlaubt \mathcal{R}_λ zu definieren:

$$\mathcal{R}_\lambda(q, v) := \frac{-kq}{\lambda\left(\frac{-kq}{\mu}\right)} \lambda(q)$$

Wenden wir nun $v = \mathcal{D}_\xi \mathcal{R}^*(q, \xi)$ mit $\xi = -\mathcal{D}\mathcal{E}(q)$ an erhalten wir Gleichung (1.5) zurück. Dazu betrachten wir zwei Beispiele:

$$\mathcal{R}_2 = \frac{\mu}{\gamma\left(\frac{kq}{\mu}\right)^6 + \alpha\left(\frac{kq}{\mu}\right)^2 + 1} \left(\frac{\gamma v^8}{8} + \frac{\alpha v^4}{4} + \frac{v^2}{2} \right) \quad \text{für} \quad \lambda_2(q) = \frac{\gamma v^8}{8} + \frac{\alpha v^4}{4} + \frac{v^2}{2}$$

$$\mathcal{R}_3 = \frac{kq}{1 - \log(\beta)\beta^{\left(\frac{-kq}{\mu}\right)}} (\beta^v - v - 1) \quad \text{für} \quad \lambda_3(q) = \beta^v - v - 1 \quad \text{wobei } \beta > 1$$

Wenden wir nun die Definition der Legendre-Transformation an, so erhalten wir die kinetischen Relationen:

$$\xi_2 = \frac{\mu(\gamma v^7 + \alpha v^3 + v)}{\gamma\left(\frac{kq}{\mu}\right)^6 + \alpha\left(\frac{kq}{\mu}\right)^2 + 1} \quad \text{für } \mathcal{R}_2^* \quad \text{bzw.} \quad \xi_3 = \frac{kq(\log \beta \beta^v - 1)}{(\log \beta \beta^{\left(\frac{-kq}{\mu}\right)} - 1)} \quad \text{für } \mathcal{R}_3^*$$

Für beide Beispiele $\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ erhalten wir kinetische Relationen die eine Abhängigkeit von der Federkonstante k in der Charakterisierung des Dämpfers enthalten, etwas das unserem physikalischen Verständnis des Modells widerspricht. Zudem potenzieren wir β mit einem (im physikalischen Sinne) nicht dimensionslosen Argument sodass wir bei einer Dimensionsanalyse Probleme finden würden. Wir werden im nächsten Beispiel sehen, dass die simple EDP-Konvergenz im Limitübergang in einigen Fällen ebenfalls ein Limitsystem produziert, dessen Dissipationspotential wir im Falle einer isolierten Betrachtung der Limitgleichung nicht wählen würden, da es ähnliche Probleme wie \mathcal{R}_2 und \mathcal{R}_3 aufweist. Wir sehen hier also, dass das Gradientensystem in der kinetischen Relation weitere Information gegenüber der isoliert betrachteten Gradientenflussgleichung trägt. Von einem Modellierungsstandpunkt kommt also nun die Frage auf wie wir für eine Familie von Gradientensystemen $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}, \mathcal{R})_i$ deren Limitverhalten wir untersuchen wollen einen Konvergenzbegriff finden der auch im Limitsystem eine 'sinnvolle' kinetische Relation definiert. Im klassischen Ansatz eine Evolution zu untersuchen wird hier zunächst die Konvergenz der Gradientenflussgleichung untersucht und ex-post dieser ein Gradientensystem zugeordnet. Sofern wir also im Limit eine sinnvolle Gradientenstruktur erhalten würde der Ansatz mit einer Familie von Gradientensystemen zu beginnen und deren Konvergenz direkt zu betrachten eine Alternative Methode darstellen. Es sei jedoch betont, dass diese Vorgehensweise nicht zwangsläufig einfacher zu modellieren ist.

1.4 Energie-Dissipations-Prinzip

Wir werfen nun einen Blick auf das Grundprinzip auf dem unsere drei Konvergenztypen aufbauen, das Energie-Dissipations-Prinzip von DeGiorgi. Dies sagt aus, dass wir mithilfe des Dissipationsfunktionals:

$$\mathfrak{D}(q) = \int_0^T (\mathcal{R}(q, v) + \mathcal{R}^*(q, -\mathcal{D}\mathcal{E}(q))) dt$$

eine Äquivalenz zu den Gleichungen (1.2) haben, und zwar in:

$$\mathcal{E}(q(T)) + \mathfrak{D}(q) = \mathcal{E}(q(0)) \left[+ \int_0^T \partial_t \mathcal{E}(t, q) dt \right]$$

Diese Balance drückt aus, dass die Energie zu einem Zeitpunkt T zusammen mit der Dissipation bis zu diesem Zeitpunkt gleich der Anfangsenergie ist. [Der Term in Klammern, welchen wir im Hauptteil der Arbeit allerdings ignorieren werden, drückt für direkt zeitabhängige \mathcal{E} die Arbeit externer Kräfte aus welche diese Balance beeinflussen.]

Auf dieser Balance bauen unsere Konvergenzkonzepte auf indem sie verschiedene Anforderungen an das Funktional \mathfrak{D} sowie dessen Konvergenz stellen. Diese werden wir in Kapitel 2 vorstellen, erwähnen an dieser Stelle aber noch dass die stärkste Konvergenzform, die Tilt-EDP-Konvergenz, Ähnlichkeit mit dem Ansatz von Sandier&Serfaty ([11]) besitzt welcher einen Spezialfall darstellt.

Dort wird das Dissipationsfunktional \mathfrak{D} in primalen $\mathfrak{D}_\epsilon^{pri}$ und dualen $\mathfrak{D}_\epsilon^{dual}$ Anteil aufgeteilt und es wird neben der Wohlgestelltheit des Problems die separate \liminf -Abschätzung beider gefordert:

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \mathfrak{D}_\epsilon^{pri} \geq \mathfrak{D}_0^{pri} = \int \mathcal{R}_{eff} dt$$

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \mathfrak{D}_\epsilon^{dual} \geq \mathfrak{D}_0^{dual} = \int \mathcal{R}_{eff}^* dt$$

Dies ist wie wir nachher sehen werden eine Forderung welche stärker als alle unsere Konvergenzarten ist, da diese Forderungen nur an die Summe \mathfrak{D} stellen.

1.5 Beispiel 3: Oszillierende Dissipation

In Abschnitt 3.1 werden wir einen genaueren Blick auf Gradientensysteme der Form $(\mathbb{R}, \mathcal{E}, \mathcal{R}_\epsilon)$ mit glattem \mathcal{E} werfen für die mit $\mu \in C^0(\mathbb{R}^2)$ 1-periodisch und positiv das Dissipationspotential \mathcal{R}_ϵ wie folgt definiert ist:

$$\mathcal{R}_\epsilon(q, v) := \frac{\mu(q, q/\epsilon)}{2} v^2$$

Wir erhalten mit Gleichung (1.1) die Gradientenflussgleichung:

$$\mu(q, q/\epsilon) \dot{q} = -\mathcal{D}\mathcal{E}(q)$$

und werden zeigen, dass die Limitgleichung für $\epsilon \rightarrow 0$ folgende Form annimmt:

$$\bar{\mu}(q) \dot{q} = -\mathcal{D}\mathcal{E}(q) \quad \text{mit} \quad \bar{\mu}(q) = \int_0^1 \mu(q, y) dy \quad (1.6)$$

Wir betrachten zur Illustration mit Anfangsbedingung $q(0) = 1$ das relativ simple System:

$$\left(1 + \frac{7}{10} \sin(2\pi q/\epsilon)\right) \dot{q} = -q$$

Durch (1.6): $\bar{\mu}(q) = \int_0^1 (1 + \frac{7}{10} \sin(2\pi y)) dy = 1$ vereinfacht sich die Limitgleichung zu $\dot{q} = -q$ sodass wir mithilfe der Anfangsbedingung $q_0(t) = \exp(-t)$ erhalten.

In unserer Simulation sehen wir nun, dass die Lösungen abhängig von der Größe von $\mu_\epsilon(q) = 1 + \frac{7}{10} \sin(2\pi q/\epsilon) \in [0.3, 1.7]$ um die Lösung der Limitgleichung schneller oder langsamer oszillieren:

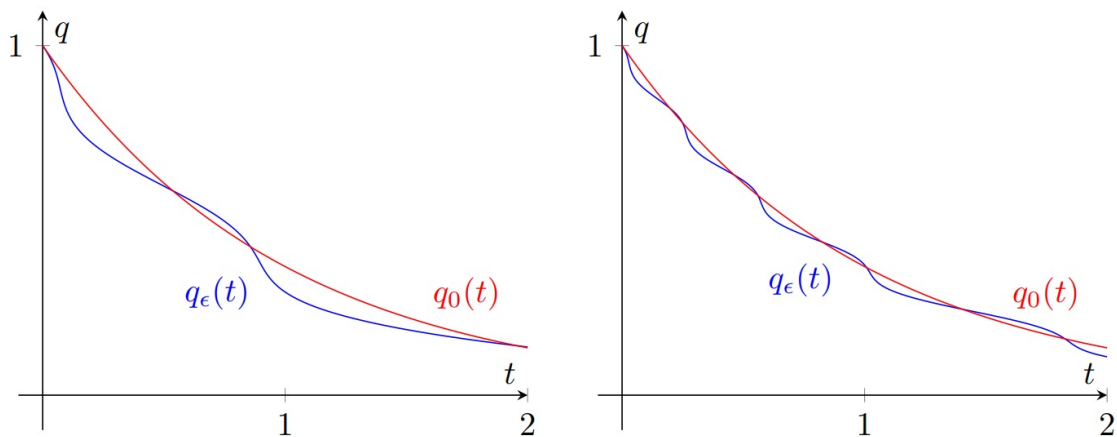


Abbildung 1.2: Simulation der Lösung q_0 der Limitgleichung sowie der Lösung q_ϵ mit $\epsilon = 0.5$ (links) bzw $\epsilon = 0.2$ (rechts)

Betrachten wir nun also die Limitgleichung unabhängig von $(\mathbb{R}, \mathcal{E}, \mathcal{R}_\epsilon)$ so würde sich eine Gradientenstruktur $(\mathbb{R}, \mathcal{E}, \mathcal{R}_{eff})$ anbieten mit $\mathcal{R}_{eff} = \bar{\mu}(q) \frac{v^2}{2}$. In der Tat werden wir sehen, dass wir $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}, \mathcal{R}_\epsilon) \xrightarrow{coEDP} (\mathcal{Q}, \mathcal{E}, \mathcal{R}_{eff})$ haben was die Interpretation deutlich vereinfacht im Gegensatz zum Limit der simplen EDP-Konvergenz $(\mathbb{R}, \mathcal{E}, \tilde{\mathcal{R}}_0)$, gegeben durch:

$$\tilde{\mathcal{R}}_0(q, v) = \mathcal{M}_0(q, v, -\mathcal{D}\mathcal{E}(q)) - \mathcal{M}_0(q, 0, -\mathcal{D}\mathcal{E}(q))$$

Wobei \mathcal{M}_0 mit $z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $z(1) = z(0) + \text{sign}(v)$ definiert ist durch:

$$\mathcal{M}_0(q, v, \xi) = \inf \left\{ \int_{s=0}^1 \left(\frac{\mu(q, z(s)) (v z'(s))^2}{2} + \frac{\xi^2}{2\mu(q, z(s))} \right) ds \right\}$$

1.6 Der Tilt

Für das vorherige Beispiel werden wir zeigen, dass das Gradientensystem sowohl für $\tilde{\mathcal{R}}_0$ als auch für \mathcal{R}_{eff} die Gradientenflussgleichung erzeugt. Da wir für die simple EDP-Konvergenz, wie \mathcal{M}_0 zeigt, eine Abhängigkeit von \mathcal{E} vorliegen haben würde sich das Konvergenzverhalten ändern für eine leicht perturbierte Version von \mathcal{E} und wir würden ein anderes Dissipationspotential erhalten.

Betrachten wir nun also für alle $\mathcal{F} \in C^1(\mathcal{Q})$ die Gradientensysteme $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon + \mathcal{F}, \mathcal{R}_\epsilon)$ und fordern gleichzeitige Konvergenz:

$$(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon + \mathcal{F}, \mathcal{R}_\epsilon) \rightarrow (\mathcal{Q}, \mathcal{E}_0 + \mathcal{F}, \mathcal{R}_0) \quad (1.7)$$

Durch diese Forderung wird die direkte Abhängigkeit von \mathcal{R}_0 von der Energie verhindert und wir sollten in \mathcal{R}_0 ein Dissipationspotential erhalten das eine *effektive kinetische Relation* definiert. In Lemma 2.17 werden wir verifizieren dass sowohl Kontakt-EDP als auch Tilt-EDP-Konvergenz die Eigenschaft aufweisen dass:

$$(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R}_\epsilon) \xrightarrow{tiEDP} (\mathcal{Q}, \mathcal{E}_0, \mathcal{R}_0) \quad \text{bzw.} \quad (\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R}_\epsilon) \xrightarrow{coEDP} (\mathcal{Q}, \mathcal{E}_0, \mathcal{R}_0)$$

die Eigenschaft Gleichung (1.7) implizieren. Hierbei nennen wir \mathcal{F} den *Tilt* des Gradientensystems.

1.7 Effektive kinetische Relationen und die Kontaktmenge

Wir haben kinetische Relationen bereits eingeführt als Abhängigkeit zwischen der Kraft ξ und der Änderungsrate v . Diese Relationen lassen sich in der Physik an vielen Stellen beobachten, bspw in Stokes Gesetz, dem Fick'schen Gesetz oder dem Fourier'schen Gesetz. Wir wollen nun die *Kontaktmenge* \mathcal{C} definieren durch:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathcal{R} \oplus \mathcal{R}^*}(q) = \{(v, \xi) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}^* \mid \mathcal{R}(q, v) + \mathcal{R}(q, \xi) = \langle \xi, v \rangle\} = \text{graph } \mathcal{D}_v \mathcal{R}(q, \cdot)$$

Damit enthält \mathcal{C} also alle Paare (v, ξ) die die Bedingung (III) aus Gleichung (1.4) erfüllen und definiert so die kinetische Relation des Systems. Hierbei ist es nicht axiomatisch, dass kinetische Relationen die Form eines (Sub)Differentials eines Dissipationspotentials tragen müssen, hier schränken wir uns jedoch auf genau diese ein, da sie uns wie wir in Abschnitt 2.2 sehen werden eine Charakterisierung für Gradientenflüsse liefern. Wir werfen nun einen Blick auf *effektive* kinetische Relationen. Diese bilden, wie beispielsweise in [22]&[27], die Grundlage dissipative Systeme effektiv zu modellieren. Hierbei verstehen wir unter effektiver Relation für eine Familie kinetischer Relationen die durch ϵ parametrisiert sind, dass diese auf mikroskopischer Skala ein Verhalten aufweisen das aggregiert auf der makroskopischen Skala die kinetische Relation des ganzen Systems beschreibt indem die mikroskopische Skala geglättet wird. Die drei oben genannten Beispiele sind von dieser Form. Man betrachtet beispielsweise die Partikel eines Systems und glättet ihr mikroskopisches Verhalten um auf der makroskopischen Ebene das Gesamtsystem zu beschreiben. Hier erlaubt der Übergang $\epsilon \rightarrow 0$ dann eine Charakterisierung des Limit-Systems.

Im Licht des vorherigen Beispiels wollen wir uns die Kontaktmenge noch ansehen für ein $\tilde{\mathcal{R}}_0 = \overline{\mathcal{R}}_{-\mathcal{D}\mathcal{E}(q)}(q, v)$ das Abhängigkeit von \mathcal{E} aufweist. Die Kontaktmenge liefert uns dann:

$$(\dot{q}, -\mathcal{D}\mathcal{E}(q)) \in \mathcal{C}_{\overline{\mathcal{R}}_{-\mathcal{D}\mathcal{E}(q)} \oplus \overline{\mathcal{R}}_{-\mathcal{D}\mathcal{E}(q)}^*}$$

Hier sehen wir, dass die Abhängigkeit auf die Kontaktmenge übergeht welche uns dann nur Informationen über Paare bei denen $\xi = -\mathcal{D}\mathcal{E}(q)$ gilt liefert. Für alle anderen Fälle müssten wir dann jeweils einen Tilt auf die Energie anwenden sodass wir zu dem Schluss kommen, dass auf diese Weise keine sinnvolle kinetische Relation gegeben ist. Wie wir für das vorangegangene Beispiel aus Abschnitt 1.5 sehen werden ist die Kontakt-EDP-Konvergenz darauf ausgelegt dies zu beachten und wir erhalten mit

$$\mathcal{C}_{\mathcal{M}_0}(q) = \{(v, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathcal{M}_0(q, v, \xi) = \xi v\} = \{(v, \bar{\mu}(q)v) \mid v \in \mathbb{R}\}$$

Eine einzige Menge die alle Paare (ξ, v) charakterisiert und somit eine kinetische Relation vernünftig definiert.

1.8 Beispiel 4: Oszillierende Energie

Betrachten hier ein klassisches Beispiel einer oszillierenden Energie. Dieses geht auf Arbeit von Prandtl([28]) und Tomlinson([32]) zurück und beschreibt ein Modell für die Entstehung von Hysterese-Effekten. Spätere Arbeit wurde von James([14]) angestoßen.

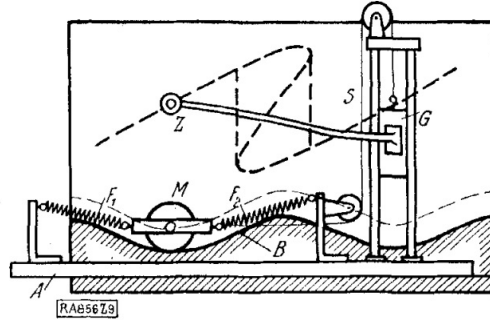


Abbildung 1.3: Prandtl's Gedankenmodell in [28]. Wir sehen die durch die Bewegung von Z beschriebene Hysteresekurve.

Wir nutzen die Beschreibung durch Gradientensysteme $(\mathbb{R}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R})$ mit:

$$\mathcal{R}(q, v) = \frac{v^2}{2\mu(q)}, \quad \mathcal{E}_\epsilon(q) = \Phi(q) - l(t)q + \epsilon\mathcal{W}(q, \frac{q}{\epsilon})$$

und erhalten die Gradientenflussgleichung:

$$\frac{v}{\mu} = -\mathcal{D}\Phi(q) - l(t) - \epsilon\partial_q\mathcal{W}(q, q/\epsilon) - \partial_y\mathcal{W}(q, q/\epsilon)$$

Wir betrachten in Abschnitt 3.2 die Ergebnisse von [2] und werden feststellen, dass für simple EDP-Konvergenz wieder ein Dissipationspotential $\tilde{\mathcal{R}}_0$ vorliegt das Abhängigkeit von der Limitenergie \mathcal{E}_0 aufweist.

Für die vorliegende Kontakt-EDP-Konvergenz können wir jedoch etwas interessantes beobachten:

$$\mathcal{R}_{eff}(v) = \int_0^{|v|} \sqrt{A(q)^2 + \frac{\omega^2}{\mu}} d\omega$$

Wie wir sehen erhält auch unser effektives Dissipationspotential hier durch $A(q)$ eine (implizite) Abhängigkeit von der Familie von Energien \mathcal{E}_ϵ , nicht allerdings von $\mathcal{E}_0 = \Phi(q) - l(t)q$. Diese Tatsache widerspricht allerdings nicht unserem Verständnis effektiver Relationen, da zwar die Energien \mathcal{E}_ϵ im Limit die Abhängigkeit von A verlieren, die potentialwiederherstellenden Kräfte $-\mathcal{D}\mathcal{E}_\epsilon$ jedoch einen oszillierenden Term $\partial_y\mathcal{W}(q, q/\epsilon)$ behalten und somit nicht konvergieren. Diesen in das effektive Dissipationspotential zu integrieren führt also dazu, dass wir als Limit klassischer Gradientensysteme auch ein generalisiertes Gradientensystem erhalten können. Diese Beobachtung werden wir in Abschnitt 3.3 selbst für Tilt-EDP-Konvergenz machen können.

Es folgt nun die formale Einführung.

Kapitel 2

Gradientensysteme und deren Konvergenz

2.1 Definitionen

Definition 2.1

(*Gradientensystem und Dissipationspotential*)

Teile der folgenden Annahmen sind stärker als notwendig um Gradientensysteme darzustellen (siehe [3]). Wir nutzen sie um nicht von technischen Details aufgehalten zu werden.

Wie in der Einleitung bereits erwähnt handelt es sich bei einem Gradientensystem um ein Tripel $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}, \mathcal{R})$. Dabei ist:

- \mathcal{Q} glatte, endlichdimensionale Riemann-Mannigfaltigkeit, häufig $\mathcal{Q} = \mathcal{R}^n$. (Generell
- $\mathcal{E} : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktional welches die Evolution treibt, häufig als 'Energie' bezeichnet
- $\mathcal{R} : T\mathcal{Q} \rightarrow [0, \infty]$ ist das Dissipationspotential. Das bedeutet $\forall q \in \mathcal{Q}$
 - $\mathcal{R}(q, \cdot) : T_q\mathcal{Q} \rightarrow [0, \infty]$ ist konvex und links-halbstetig
 - $\mathcal{R}(q, 0) = \min_{v \in T_q\mathcal{Q}} \mathcal{R}(q, v) = 0$

Das duale Potential $\mathcal{R}^* : T^*\mathcal{Q} \rightarrow [0, \infty]$ erhalten wir durch Legendre-Fenchel Transformation:

$$\mathcal{R}^*(q, \xi) := \sup_{v \in T_q\mathcal{Q}} \langle \xi, v \rangle - \mathcal{R}(q, v) \quad (2.1)$$

Hier sind $T\mathcal{Q}$ und $T^*\mathcal{Q}$ Tangential bzw Kotangentialräume mit lokalen Normen $|\cdot|$. $T\mathcal{Q}$ lässt sich dabei als Raum der generalisierten Änderungsraten/Geschwindigkeiten auffas-

sen, $T^*\mathcal{Q}$ als die generalisierten Kräfte.

Mit $T\mathcal{Q} \oplus T^*\mathcal{Q}$ bezeichnen wir ihre direkte Summe:

$$T\mathcal{Q} \oplus T^*\mathcal{Q} := \{(q, v, \xi) \mid q \in \mathcal{Q}, v \in T\mathcal{Q}, \xi \in T^*\mathcal{Q}\}$$

Für die Subdifferentialen von \mathcal{R} und \mathcal{R}^* im Bezug auf ihre zweiten Argumente v bzw. ξ schreiben wir $\partial_v \mathcal{R}$ bzw. $\partial_\xi \mathcal{R}^*$.

$$\partial_v \mathcal{R}(v) := \{\eta \in T\mathcal{Q}^* \mid \forall \omega \in T\mathcal{Q} : \mathcal{R}(\omega) \geq \mathcal{R}(v) + \langle \eta, \omega - v \rangle\} \subset T\mathcal{Q}^*$$

Mit analoger Definition für $\partial_\xi \mathcal{R}^*$. Aus diesen Annahmen für \mathcal{R} folgt für \mathcal{R}^*

- Konvexität, da wir für $\text{dom}\mathcal{R} \neq \emptyset$ affine Funktionen haben die ihre Konvexität an das Supremum übergeben. Hier ist $\text{dom}f := \{v \in \mathcal{Q} \mid \mathcal{R}(q, v) < \infty\}$
- Links-Halbstetigkeit folgt wie Konvexität aus der Übergabe der Eigenschaft an das Supremum. Argument bspw. über Durchschnitt der Epigraphen
- $\mathcal{R}^*(q, \cdot) \geq 0$, da für $v = 0$ die untere Schranke $\langle \xi, 0 \rangle - \mathcal{R}(q, 0) = 0$ gilt
- $\mathcal{R}^*(q, 0) = 0$ folgt direkt

Für eine ausführlichere Behandlung der Fenchel-Legendre-Transformation, siehe Kapitel 12ff in [29].

Lemma 2.2

Mit den Annahmen aus Definition 2.1 haben wir folgende Äquivalenz:

1. $\forall \xi \in T_q^*\mathcal{Q}$ ist das Subdifferential $\partial_\xi \mathcal{R}^*(q, \xi)$ nicht leer
2. Die Abbildung $v \mapsto \mathcal{R}(q, v)$ ist superlinear, dh $\lim_{|v| \rightarrow \infty} |v|^{-1} \mathcal{R}(q, v) = \infty$

Beweis:

”1 \rightarrow 2” Umstellen der Definition der Fenchel-Legendre-Transformation liefert die Ungleichung $\mathcal{R}(q, v) \geq \langle \xi, v \rangle - \mathcal{R}^*(q, \xi)$. Da $\mathcal{R}^*(q, \xi)$ für alle ξ endlich ist wächst die rechte Seite der Ungleichung für $|v| \rightarrow \infty$ mit Rate ξ gegen unendlich. Da dies für alle ξ gilt muss $\mathcal{R}(q, v)$ superlinear in v sein.

”1 \leftarrow 2” Die Superlinearität impliziert $\lim_{|v| \rightarrow \infty} \mathcal{R}(q, v) / \langle \xi, v \rangle = \infty$ sodass für das Supremum nur eine beschränkte Teilmenge in Frage kommt auf welcher dieses dann angenommen wird. Das Subdifferential ist folglich nicht leer. \square

2.2 Gradientenflussgleichung definiert durch Gradientensystem

Die Gradientenflussgleichung, induziert durch das Gradientensystem hat die äquivalenten Formen:

$$v \in \partial_{\xi} \mathcal{R}^*(q, -\mathcal{D}\mathcal{E}(q)) \quad (2.2a)$$

$$0 \in \partial_v \mathcal{R}(q, v) + \mathcal{D}\mathcal{E}(q) \quad (2.2b)$$

$$\mathcal{R}(q, v) + \mathcal{R}^*(q, -\mathcal{D}\mathcal{E}(q)) = \langle -\mathcal{D}\mathcal{E}(q), v \rangle \quad (2.2c)$$

Die Äquivalenzen folgen aus den *Fenchel-Äquivalenzen* (siehe [6] oder §3.2.2 in [23]):

$$(i) \xi \in \partial\Psi(v) \iff (ii) \Psi(v) + \Psi^*(\xi) = \langle \xi, v \rangle \iff (iii) v \in \partial\Psi^*(\xi)$$

Diese gelten in reflexiven Banachräumen X für alle Paare $(v, \xi) \in X \times X^*$. Hier ist $\Psi : X \rightarrow \mathbb{R}_{\infty}$ konvex, linkshalbstetig und besitzt eine nichtleere Definitionsmenge.

Gleichung (2.2c) erlaubt eine zusätzlich Formulierung. Für absolut stetige Kurven $q : [0, T] \rightarrow \mathcal{Q}$ ($q \in AC([0, T], \mathcal{Q})$) definieren wir das (De-Giorgi)-Dissipationsfunktional:

$$\mathfrak{D}^T(q) := \int_0^T \mathcal{R}(q, v) + \mathcal{R}^*(q, -\mathcal{D}\mathcal{E}(q)) dt \quad (2.3)$$

Lemma 2.3

(*Abschätzung der Energie*)

Unter unseren Annahmen, darunter die Kettenregel aus 3.8 in [21], lässt sich die Energie wie folgt abschätzen:

$$\mathcal{E}(q(T)) + \mathfrak{D}^T(q) \geq \mathcal{E}(q(0)), \quad \forall q \in AC([0, T], \mathcal{Q}) \quad (2.4)$$

Beweis:

Integration der Fenchel-Young-Ungleichung mit $\xi = -\mathcal{D}\mathcal{E}(q)$ ergibt:

$$\mathcal{R}(q, v) + \mathcal{R}^*(q, \xi) \geq \langle \xi, v \rangle \quad (2.5a)$$

Mit der Kettenregel für die Gateux-Ableitung von \mathcal{E} haben wir

$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(q(t)) = \langle -\mathcal{D}\mathcal{E}(q(t)), v \rangle$, folglich:

$$\mathfrak{D}^T(q) \geq \int_0^T \langle -\mathcal{D}\mathcal{E}(q), v \rangle dt = - \int_0^T \mathcal{D}\mathcal{E}(q(t)) dt = \mathcal{E}(q(0)) - \mathcal{E}(q(T)) \quad (2.5b)$$

Die Fenchel-Young-Ungleichung ergibt sich direkt aus der Definition von \mathcal{R}^* □

Satz 2.4*(Energie-Dissipations-Prinzip)*Für $q \in AC([0, T], \mathcal{Q})$ haben wir die folgende Äquivalenz:

1. Für fast alle $t \in [0, T]$ erfüllt \mathcal{Q} die Bedingungen aus (2.2)
2. Die Kurve q erfüllt die Dissipationsabschätzung:

$$\mathcal{E}(q(T)) + \mathfrak{D}^T(q) \leq \mathcal{E}(q(0)) \quad (2.6)$$

Gelten diese Bedingungen so ist das Energie-Dissipations-Prinzip (Gleichheit in Gleichung (2.6)) erfüllt.

Der Beweis dieses Satzes ist, da wir das Energiefunktional hier ohne Zeitabhängigkeit eingeführt haben, eine Vereinfachung des Beweises von Satz 3.3.1 in [23]. Hierbei folgt 1) \rightarrow 2) direkt durch Integration von Gleichung (2.2c). Für 2) \rightarrow 1) erhalten wir durch Integration der Fenchel-Ungleichung, Anwendung von 2) und anschließender Anwendung der Kettenregel die untenstehende Ungleichung aus wir die Gleichheit schließen. Somit folgt Gleichung (2.2c) und durch die Fenchel-Äquivalenzen der Rest. \square

$$\int_0^T -\langle \xi, v \rangle dt \leq \int_0^T \mathcal{R}(q, v) + \mathcal{R}^*(q, -\xi) dt \leq \int_0^T -\langle \xi, v \rangle dt$$

Anmerkung 2.5*(Einordnung in physikalischen Kontext)*

Die Annahme dass $v \mapsto \mathcal{R}(q, v)$ in $v = 0$ minimiert ist und $\mathcal{R}(q, 0) = 0$ definiert die Eigenschaften von 'Dissipation'. Mit Gleichung (2.2b) sehen wir, dass die Dissipation der Energie mit Rate \dot{q} durch $\langle \partial_v \mathcal{R}(q, \dot{q}), \dot{q} \rangle$ gegeben ist.

Offensichtlich folgt, dass bei nicht vorhandener Bewegung keine Energie dissipiert. Wie wir sehen ist nicht einmal dissipative Kraft vorhanden.

D.h. $\dot{q} = 0 \Rightarrow 0 \in \partial_v \mathcal{R}(q, v)$ (bzw. $0 = \partial_v \mathcal{R}(q, v)$ im Falle der Differenzierbarkeit).

Haben wir in $v = 0$ zusätzlich den einzigen Minimierer folgt auch 'Bewegung erfordert Dissipation', d.h. $q \neq 0 \Rightarrow \langle \partial_v \mathcal{R}(q, \dot{q}), \dot{q} \rangle \geq \mathcal{R}(q, \dot{q}) > 0$.

Das Gradientensystem $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}, \mathcal{R})$ kann für jedes $q \in \mathcal{Q}$ als Träger der kinetischen Relation betrachtet werden durch die *Kontaktmenge*:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{R} \oplus \mathcal{R}^*}(q) := \{(v, \xi) \in T_q \mathcal{Q} \times T_q \mathcal{Q}^* \mid \mathcal{R}(q, v) + \mathcal{R}^*(q, \xi) = \langle \xi, v \rangle\}$$

Wir sehen hier die 'Natur' eines Gradientenflusses auch in der Eigenschaft, dass die kinetische Relation selbst dissipativ ist, d.h. $\langle \xi, v \rangle \geq 0 \forall (v, \xi) \in \mathcal{C}_{\mathcal{R} \oplus \mathcal{R}^*}(q)$. Dies folgt direkt aus Definition 2.1, da in diesem Fall für $v \neq 0$ sowohl \mathcal{R} als auch \mathcal{R}^* nicht-negativ sind.

2.3 Γ -Konvergenz

Definition 2.6

(Γ -Konvergenz)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Die Familie $(\mathcal{J}_\epsilon)_{\epsilon>0}$ von Funktionalen $J_\epsilon : X \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ konvergiert im Sinne der Γ -Konvergenz falls:

$$u_\epsilon \rightarrow u \Rightarrow \mathcal{J}_0(u) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}_\epsilon(u_\epsilon)$$

$$\forall \hat{u} \exists (\hat{u}_\epsilon)_\epsilon \rightarrow \hat{u} \text{ sowie } \mathcal{J}_0(\hat{u}) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{J}_\epsilon(\hat{u}_\epsilon)$$

und wir schreiben $\mathcal{J}_\epsilon \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{J}_0$. Dieser von Ennio de Giorgi ([31]) zuerst unter anderem Namen eingeführte Konvergenzbegriff erlaubt uns den Limit-Übergang bei Betrachtung von Minimierern der Funktionalen $(\mathcal{J}_\epsilon)_{\epsilon>0}$. Für eine ausführliche Behandlung von (schwacher) Γ -Konvergenz sowie Mosco-Konvergenz, welche äquivalent zu gleichzeitiger schwacher und normaler Γ -Konvergenz ist, verweisen wir auf [4] sowie [18].

Die lim sup Bedingung wird häufig durch die, sofern die lim inf Bedingung erfüllt ist, äquivalente Bedingung der Existenz einer Wiederherstellungsfolge ersetzt:

$$\forall \hat{u} \exists (\hat{u}_\epsilon)_\epsilon : \hat{u}_\epsilon \rightarrow \hat{u} \text{ sowie } \mathcal{J}_\epsilon(\hat{u}_\epsilon) \rightarrow \mathcal{J}_0(\hat{u})$$

Satz 2.7

In einem separablen, reflexiven Banachraum X mit Dissipationspotentialen $\Psi_\epsilon : X \rightarrow [0, \infty]$ gilt:

$$\Psi_\epsilon \xrightarrow{\Gamma} \Psi \iff \Psi_\epsilon^* \xrightarrow{\Gamma} \Psi^*$$

Wobei $\xrightarrow{\Gamma}$ die schwache Γ -Konvergenz und Ψ_ϵ^* die dualen Dissipationspotentiale bezeichnen. Für eine Skizze des Beweises verweisen wir auf [21].

2.4 Simple EDP-Konvergenz

Definition 2.8

(Simple EDP-Konvergenz)

Eine Familie von Gradientensystemen $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R}_\epsilon)$ konvergiert gegen ein Limit $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_0, \mathcal{R}_0)$ falls folgende Bedingungen gelten:

1. $\mathcal{E}_\epsilon \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{E}_0$ in \mathcal{Q}
2. Für jedes $T > 0$ gilt $\mathfrak{D}_\epsilon^T \xrightarrow{\Gamma} \mathfrak{D}_0^T$ in $C([0, \infty]; \mathcal{Q})$

Wir schreiben $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R}_\epsilon) \xrightarrow{\text{EDP}} (\mathcal{Q}, \mathcal{E}_0, \mathcal{R}_0)$

Bei \mathfrak{D}_0^T handelt es sich um das Limitfunktional:

$$\mathfrak{D}_0^T : q \mapsto \int_0^T [\tilde{\mathcal{R}}_0(q, \dot{q}) + \tilde{\mathcal{R}}^*(q, -\mathcal{D}\mathcal{E}_0(q))] dt \quad (2.7)$$

Lemma 2.9

Falls $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R}_\epsilon) \xrightarrow{\text{EDP}} (\mathcal{Q}, \mathcal{E}_0, \tilde{\mathcal{R}}_0)$ folgt aus den Konvergenzen von:

- $q_\epsilon \rightarrow q_0$ in $C([0, T], \mathcal{Q})$.
- $\mathcal{E}_\epsilon(q_\epsilon(0)) \rightarrow \mathcal{E}_0(q_0(0))$

Dass q_0 eine Lösung des Gradientensystems $\mathcal{Q}, \mathcal{E}_0, \tilde{\mathcal{R}}_0$ darstellt.

Hier sind $q_\epsilon \in AC([0, T], \mathcal{Q})$ Lösungen von $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R}_\epsilon)$

Beweis:

Die Γ -Konvergenz aus Definition 2.8 impliziert:

$$\mathcal{E}_0(q_0(T)) + \mathfrak{D}_0^T(q_0) - \mathcal{E}_0(q_0(0)) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\epsilon(q_\epsilon(T)) + \mathfrak{D}_\epsilon^T(q_\epsilon) - \mathcal{E}_\epsilon(q_\epsilon(0)) = 0$$

Zusammen mit Gleichung (2.6) folgt dass q_0 eine Lösung zu $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_0, \tilde{\mathcal{R}}_0)$ ist. □

2.5 Tilt der Gradientensysteme

Wie in der Einleitung beschrieben kann die simple EDP-Konvergenz dazu führen, dass wir Dissipationspotentiale mit 'unnatürlichen' Eigenschaften erhalten. Um dies zu vermeiden parametrisieren wir eine Familie aus Folgen von Gradientensystemen $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon + \mathcal{F}, \mathcal{R}_\epsilon)$ mit Funktionalen $\mathcal{F} \in C^1(\mathcal{Q}, \mathbb{R})$ und versehen somit die Energiefunktionale \mathcal{E}_ϵ mit einem 'Tilt'. Dieser verändert nicht die Γ -Konvergenz. $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R}_\epsilon)$ ist in dieser Familie eingeschlossen und wir haben also:

$$\mathcal{E}_\epsilon \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{E}_0 \iff \mathcal{E}_\epsilon + \mathcal{F} \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{E}_0 + \mathcal{F} \quad \text{für alle } \mathcal{F} \in C^1(\mathcal{Q}, \mathbb{R}).$$

Mit dem Dissipationsfunktional \mathfrak{D}_ϵ^T erhalten wir neue, nicht-triviale Information durch das Betrachten der Energien mit Tilt. Sei $\mathcal{M}_\epsilon(q, v, \xi) := \mathcal{R}_\epsilon(q, v) + \mathcal{R}_\epsilon^*(q, \xi)$

$$\mathfrak{D}_\epsilon^T(q, \mathcal{F}) := \int_0^T \mathcal{M}_\epsilon(q, \dot{q}, -\mathcal{D}\mathcal{E}_\epsilon(q) - \mathcal{D}\mathcal{F}(q)) dt$$

Unter der Annahme dass das Γ -Limit von $\mathfrak{D}_\epsilon(\cdot, \mathcal{F})$ existiert, also:

$$\mathfrak{D}_\epsilon^T(\cdot, \mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma} \mathfrak{D}_0^T(\cdot, \mathcal{F}) : q \mapsto \int_0^T \mathcal{N}_0(q, \dot{q}, -\mathcal{D}\mathcal{F}(q)) dt \quad \forall \mathcal{F} \in C^1(\mathcal{Q}, \mathbb{R})$$

versuchen wir die Integralstruktur der \mathfrak{D}_ϵ^T in den \mathcal{M}_ϵ zurückzuerhalten.

Mit $\mathcal{M}_0(q, v, \xi) := \mathcal{N}_0(q, v, \xi + \mathcal{D}\mathcal{E}_0(q))$ erhalten wir also:

$$\mathfrak{D}_\epsilon^T(q, \mathcal{F}) = \int_0^T \mathcal{M}_0(q, \dot{q}, -\mathcal{D}\mathcal{E}_0(q) - \mathcal{D}\mathcal{F}(q)) dt$$

Annahmen 2.10

Wir nehmen an die Familie $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R}_\epsilon)$ erfüllt folgende Bedingungen welche die vorherige Diskussion präzisieren:

1. $\mathcal{E}_\epsilon \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{E}_0$ in \mathcal{Q} ,
2. $\forall T > 0$ existiert ein Funktional $\mathfrak{D}_0^T : AC([0, T], \mathcal{Q}) \times C^1(\mathcal{Q}, \mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$, sodass $\forall \mathcal{F} \in C^1(\mathcal{Q}, \mathbb{R})$ in der Topologie auf $C([0, T], \mathcal{Q})$ gilt:

$$\mathfrak{D}_\epsilon^T(\cdot, \mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma} \mathfrak{D}_0^T(\cdot, \mathcal{F})$$

3. Es existiert eine von T unabhängige Funktion $\mathcal{N}_0 : T\mathcal{Q} \oplus T^*\mathcal{Q} \rightarrow [0, \infty]$ für die gilt:

$$\forall \mathcal{F} \in C^1(\mathcal{Q}, \mathbb{R}) : \quad \mathfrak{D}_0^T(q, \mathcal{F}) = \int_0^T \mathcal{N}_0(q(t), v(t), -\mathcal{D}\mathcal{E}\mathcal{F}(q)) dt$$

Die Abbildung $v \mapsto \mathcal{N}_0(q, v, \xi)$ ist konvex und linkshalbstetig für alle $(q, \xi) \in T^*\mathcal{Q}$.

Wir definieren $\mathcal{M}_0 : T\mathcal{Q} \oplus T^*\mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{M}_0(q, v, \xi) := \mathcal{N}_0(q, v, \xi + \mathcal{D}\mathcal{E}_0(q)) \quad (2.8)$$

$$4. \mathcal{M}_0(q, v, \xi) \geq \langle \xi, v \rangle \quad \forall (q, v, \xi) \in T\mathcal{Q} \oplus T^*\mathcal{Q}$$

Ist Konsequenz aus der Fenchel-Young-Ungleichung und erlaubt uns wie in Lemma 2.3 die Energie für \mathcal{E}_0 und \mathfrak{D}_0^T abzuschätzen:

$$\mathcal{E}_0(q(T)) + \mathfrak{D}_0^T(q) \geq \mathcal{E}_0(q(0)), \quad \forall q \in AC([0, T], \mathcal{Q}) \quad (2.9)$$

$$5. \mathcal{M}_0(q, v, \xi) \geq \mathcal{M}_0(q, 0, \xi) \quad \forall (q, v, \xi) \in T\mathcal{Q} \oplus T^*\mathcal{Q}$$

Dies ist positive ϵ erfüllt, da aus den Anforderungen an Dissipationspotentiale für alle q, v $\mathcal{R}_\epsilon(q, v) \geq \mathcal{R}_\epsilon(q, 0) = 0$ folgt, sodass:

$$\mathcal{M}_\epsilon(q, v, \xi) = \mathcal{R}_\epsilon(q, v) + \mathcal{R}_\epsilon^*(q, \xi) \geq \mathcal{R}_\epsilon(q, 0) + \mathcal{R}_\epsilon^*(q, \xi) = \mathcal{M}_\epsilon(q, 0, \xi).$$

Da $\mathcal{R}_\epsilon(q, v) \geq \mathcal{R}_\epsilon(q, 0) = 0$ inhärente Eigenschaft von Gradientensystemen ist kann Annahme 5. als Erhalt dieser Eigenschaft in \mathcal{M}_0 betrachtet werden. Wir zeigen nun, dass wir durch die Forderung nach Stetigkeit von \mathcal{N}_0 diese Anforderung auch durch Γ -Konvergenz erreichen können.

Lemma 2.11

Falls Punkt 5 aus den Annahmen 2.10 durch Stetigkeit von \mathcal{N}_0 ersetzt wird, so gilt für alle $(q, v, \xi) \in T\mathcal{Q} \oplus T^*\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{N}_0(q, v, \xi) \geq \mathcal{N}_0(q, 0, \xi) \quad \text{sowie} \quad \mathcal{M}_0(q, v, \xi) \geq \mathcal{M}_0(q, 0, \xi) \quad (2.10)$$

Beweis:

Wir fixieren ein $q^0 \in \mathcal{Q}$. Indem wir mit lokalen Koordinaten arbeiten und ein T wählen das klein genug ist, lässt sich eine Kurve $q_0 : [0, T] \rightarrow \mathcal{Q}$ wählen für die gilt $q_0(t) = q^0 + tv$ für ein $v \in T_{q^0}\mathcal{Q}$.

Genauso lässt sich falls T klein genug ist \mathcal{F} so wählen, dass $-\mathcal{D}\mathcal{F}$ konstante $\xi \in T_{q^0}^*\mathcal{Q}$ auf der affinen Kurve q_0 darstellt.

Aus der Stetigkeit von \mathcal{N}_0 folgt nun dass $\mathfrak{D}_0^T(q_0, \mathcal{F})$ endlich ist. Wir können also eine Folge $q_\epsilon \rightarrow q_0$ für $\mathfrak{D}_\epsilon^T(\cdot, \mathcal{F})$ finden.

Nun definieren wir umparametrisierte Kurven $r_\epsilon(s) := q_\epsilon(s/\lambda)$ für $s \in [0, \lambda T]$ welche in $AC([0, \lambda T], \mathcal{Q})$ gegen $r_0(s) = q_0(s/\lambda)$ konvergieren. Für alle $(q, v) \in T\mathcal{Q}$, $\lambda \geq 1$ folgt dann aus der Konvexität von \mathcal{R}_ϵ in v , da für $t \in [0, 1]$ gilt: $\mathcal{R}_\epsilon(q, tv + (1-t) \cdot 0) \leq t\mathcal{R}_\epsilon(q, v) + (1-t)\mathcal{R}_\epsilon(q, 0)$:

$$\mathcal{R}_\epsilon(q, \lambda v) \geq \lambda \mathcal{R}_\epsilon(q, v) \geq \mathcal{R}_\epsilon(q, v)$$

Wir erhalten also mit Anwendung der Definitionen und Substitution von t durch $\frac{1}{\lambda}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \mathcal{N}_0((q_0(t), \dot{q}_0(t), -\mathcal{D}\mathcal{F}(q_0(t))))dt &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T \mathcal{N}_\epsilon((q_\epsilon(t), \dot{q}_\epsilon(t), -\mathcal{D}\mathcal{F}(q_\epsilon(t))))dt \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda T} \mathcal{N}_\epsilon((r_\epsilon(s), \lambda \dot{r}_\epsilon(s), -\mathcal{D}\mathcal{F}(r_\epsilon(s))))ds \\
&\geq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda T} \mathcal{N}_\epsilon((r_\epsilon(s), \dot{r}_\epsilon(s), -\mathcal{D}\mathcal{F}(r_\epsilon(s))))ds \\
&\geq \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda T} \mathcal{N}_0((r_0(s), \dot{r}_0(s), -\mathcal{D}\mathcal{F}(r_0(s))))ds \\
&= \int_0^T \mathcal{N}_0((q_0(t), \dot{q}_0(t)/\lambda, -\mathcal{D}\mathcal{F}(q_0(t))))dt
\end{aligned}$$

Hierbei ist $\mathcal{N}_\epsilon(q, v, \eta) := \mathcal{M}_\epsilon(q, v, \eta - \mathcal{D}\mathcal{E}_\epsilon(q))$ sodass wir $\mathcal{N}_\epsilon(q, \lambda v, \eta) \geq \mathcal{N}_\epsilon(q, v, \eta)$ erhalten.

Nutzen wir nun die Stetigkeit von \mathcal{N}_0 sehen wir für $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{T} \int_0^{\lambda T} \mathcal{N}_0((q^0 + tv, v, \xi))dt \geq \frac{1}{T} \int_0^{\lambda T} \mathcal{N}_0((q^0 + tv, 0, \xi))dt$$

Nun erhalten wir mit dem Limit $T \rightarrow 0$ die erste Ungleichung von (2.10).

Da dies für alle $(q, v, \xi) \in T\mathcal{Q} \oplus T^*\mathcal{Q}$ gilt folgt die zweite Ungleichung aus der Definition von \mathcal{M}_0 in den Annahmen 2.10 □

2.6 Primale und Duale Abbildungen

Wir betrachten nun für festes $q \in \mathcal{Q}$ Eigenschaften der Abbildung $(v, \xi) \mapsto \mathcal{M}_0(q, v, \xi)$. Sei im Folgenden X ein reflexiver Banachraum. Wir werden die Ergebnisse für festes $q \in \mathcal{Q}$ auf $X = T_q \mathcal{Q}$ sowie $X^* = T_q^* \mathcal{Q}$ anwenden. Wir erinnern an Definition 2.1, insbesondere dass ein Funktional $\mathcal{R} : X \rightarrow [0, \infty]$ ein Dissipationspotential ist falls es konvex, linkshalbstetig sowie nichtnegativ erfüllt und $\mathcal{R}(0) = 0$

Definition 2.12

Für $M : X \times X^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sodass: $M(v, \xi) \geq \langle \xi, v \rangle$.

1. So nennen wir M *duale Dissipationssumme* falls ein Dissipationspotential $\widehat{\mathcal{R}}$ existiert, sodass

$$M(v, \xi) = \widehat{\mathcal{R}}(v) + \widehat{\mathcal{R}}^*(\xi)$$

Wir schreiben dann $M = \widehat{\mathcal{R}} \oplus \widehat{\mathcal{R}}^*$.

2. Wir sagen M hat *kontakt-äquivalentes Dissipationspotential* falls ein Dissipationspotential \mathcal{R} existiert, sodass für die Kontaktmenge \mathcal{C}_M gilt:

$$\mathcal{C}_M := \{(v, \xi) : M(v, \xi) = \langle \xi, v \rangle\} = \text{graph}(\partial \mathcal{R}) \quad (2.12)$$

3. Wir sagen M hat *kraft-abhängiges Dissipationspotential* falls $\forall \xi \in X^*$ ein Dissipationspotential $\overline{\mathcal{R}}_\xi$ existiert sodass:

$$M(v, \xi) = \overline{\mathcal{R}}_\xi(v) + \overline{\mathcal{R}}_\xi^*(\xi)$$

Lemma 2.13

Es gelte für $M : X \times X^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sodass $M(v, \xi) \geq \langle \xi, v \rangle$.

- In jedem der Fälle aus Lemma 2.13 ist das Dissipationspotential eindeutig durch M charakterisiert.
- Falls M duale Dissipationssumme $\widehat{\mathcal{R}} \oplus \widehat{\mathcal{R}}^*$ ist so ist $\widehat{\mathcal{R}}$ auch kontakt-äquivalentes Dissipationspotential für M . Die Bedingungen der Kraftabhängigkeit sind von $\widehat{\mathcal{R}}$ ebenfalls erfüllt auch wenn keine tatsächliche Abhängigkeit von ξ besteht. Wir haben also $1) \Rightarrow 2)$ sowie $1) \Rightarrow 3)$
- Wir nehmen an M habe ein kontakt-äquivalentes Dissipationspotential \mathcal{R} und erfülle:

$$\forall \xi \in X^* : M(\cdot, \xi) \text{ ist linkshalbstetig und konvex,} \quad (2.13a)$$

$$M(v, \xi) \geq M(0, \xi) \quad \forall v \in X \quad (2.13b)$$

Dann folgt falls \mathcal{R} superlinear ist, dass M ebenfalls ein kraftabhängiges Dissipationspotential $\overline{\mathcal{R}}_\xi$ besitzt für das nicht notwendigerweise $\mathcal{R} = \overline{\mathcal{R}}_\xi$ gilt.

In diesem Falle gilt also 2) \Rightarrow 3)

Beweis:

Um Eindeutigkeit zu zeigen betrachten wir zunächst 1). Haben wir zwei Dissipationspotentiale $\widehat{\mathcal{R}}_1, \widehat{\mathcal{R}}_2$ so gilt:

$$\widehat{\mathcal{R}}_1(v) - \widehat{\mathcal{R}}_2(v) = \widehat{\mathcal{R}}_2^*(\xi) - \widehat{\mathcal{R}}_1^*(\xi) \quad \forall (v, \xi) \in X \times X^*$$

Es folgt dass beide Seiten konstant sind und da $\widehat{\mathcal{R}}_i(0) = 0$ sind beide Potentiale identisch. Der Beweis für 3) folgt analog, wir betrachten also 2):

Auch hier gilt, falls zwei Dissipationspotentiale M darstellen so haben sie dieselben Subdifferentiale. Diese sind wieder bis auf eine Konstante c gleich und aufgrund der Normalisierung in 0 ist auch hier $c = 0$. Teil zwei folgt aus der Definition sodass wir uns nun Teil drei des Lemmas widmen.

Wir sehen mit Lemma 2.2 und der Superlinearität, dass es für alle $\xi \in X^*$ zugehörige $v_\xi \in \partial\mathcal{R}(\xi)$ gibt. Da $\mathcal{C}_M = \text{graph}(\partial\mathcal{R})$ folgt also $M(v_\xi, \xi) = \langle \xi, v_\xi \rangle$.

Nun definieren wir für jedes $\xi \in X^*$ die Funktion $\overline{\mathcal{R}}_\xi : X \rightarrow [0, \infty]$ durch:

$$\overline{\mathcal{R}}_\xi(v) := M(v, \xi) - M(0, \xi).$$

Mit Gleichung (2.13b) sehen wir $M(0, \xi) \leq M(v_\xi, \xi) = \langle \xi, v_\xi \rangle < \infty$, sodass die obige Differenz wohldefiniert ist. Mit Gleichung (2.13a) und (2.13b) haben wir in $\overline{\mathcal{R}}$ eine konvexe, links-halbstetige Funktion für die $\overline{\mathcal{R}}_\xi(0) = 0 = \min_v \overline{\mathcal{R}}_\xi(v)$ gilt.

Um nun $\overline{\mathcal{R}}_\xi^*$ zu berechnen beobachten wir, dass die konvexe Funktion $v \mapsto M(v, \xi) - \langle \xi, v \rangle$ durch v_ξ mit Wert 0 minimiert wird, sodass:

$$\overline{\mathcal{R}}_\xi^*(\xi) = \sup_{v \in X} \langle \xi, v \rangle - \overline{\mathcal{R}}_\xi(v) = \sup_{v \in X} [\langle \xi, v \rangle - M(v, \xi)] + M(0, \xi) = M(0, \xi)$$

Es folgt also $M(v, \xi) = \overline{\mathcal{R}}_\xi(v) + \overline{\mathcal{R}}_\xi^*(\xi)$. Dass \mathcal{R} und $\overline{\mathcal{R}}_\xi$ nicht zwangsläufig identisch sein müssen sehen wir später, beispielsweise in Abschnitt 3.1 \square

2.7 (Kontakt-)EDP-Konvergenz mit Tilt

Definition 2.14

((Kontakt-)EDP-Konvergenz mit Tilt)

Unter Annahmen 2.10 konvergiert die Familie von Gradientensysteme $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R}_\epsilon)$

1. im Sinne von *EDP-Konvergenz mit Tilt*, kurz *tilt-EDP-Konvergenz* gegen ein Limit $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_0, \widehat{\mathcal{R}}_0)$, falls für alle $q \in \mathcal{Q}$ der Integrand $\mathcal{M}_0(q, \cdot, \cdot)$ eine duale Dissipationssumme mit dem Potential $\widehat{\mathcal{R}}_0(q, \cdot)$ ist. Wir schreiben:

$$(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R}_\epsilon) \xrightarrow{tiEDP} (\mathcal{Q}, \mathcal{E}_0, \widehat{\mathcal{R}}_0)$$

2. im Sinne von *Kontakt-EDP-Konvergenz mit Tilt*, kurz *Kontakt-EDP-Konvergenz* gegen ein Limit $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_0, \mathcal{R}_{eff})$, falls für alle $q \in \mathcal{Q}$ der Integrand $\mathcal{M}_0(q, \cdot, \cdot)$ ein Kontakt-äquivalentes Dissipationspotential $\mathcal{R}_{eff}(q, \cdot)$ besitzt. Wir schreiben:

$$(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R}_\epsilon) \xrightarrow{coEDP} (\mathcal{Q}, \mathcal{E}_0, \mathcal{R}_{eff})$$

Lemma 2.15

Falls unter den Annahmen 2.10 für alle $q \in \mathcal{Q}$ die Funktion $\mathcal{M}_0(q, \cdot, \cdot)$ ein kraftabhängiges Dissipationspotential besitzt, so konvergiert die Familie $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R}_\epsilon)$ im Sinne der simplen EDP-Konvergenz aus Definition 2.8

Beweis:

Nehmen wir an $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R}_\epsilon)$ erfülle Annahmen 2.10 und \mathcal{M}_0 habe kraftabhängiges Dissipationspotential $\overline{\mathcal{R}}_\xi$. Der erste Punkt von Definition 2.8 ist durch Annahme 1. bereits erfüllt.

Für den zweiten Punkt nehmen wir $\mathcal{F} = 0$ in der Aussage über die Γ -Konvergenz von \mathfrak{D}_ϵ^T und erhalten somit Γ -Konvergenz in Punkt 2. Die Kraftabhängigkeit von $\overline{\mathcal{R}}_\xi$ impliziert:

$$\mathcal{N}_0(q, v, 0) = \mathcal{M}_0(q, v, -\mathcal{D}\mathcal{E}_0(q)) = \overline{\mathcal{R}}_{-\mathcal{D}\mathcal{E}_0(q)}(q, v) + \overline{\mathcal{R}}_{-\mathcal{D}\mathcal{E}_0(q)}^*(q, -\mathcal{D}\mathcal{E}_0(q))$$

Damit folgt dass \mathfrak{D}_0^T als Summe $\overline{\mathcal{R}}_{-\mathcal{D}\mathcal{E}_0(q)} \oplus \overline{\mathcal{R}}_{-\mathcal{D}\mathcal{E}_0(q)}^*$ darstellbar ist und somit Definition 2.8 erfüllt. \square

Anmerkung 2.16

Die Umkehrung der Aussage von Lemma 2.15 gilt nicht. Aus der EDP-Konvergenz folgt zwar dass ein Dissipationspotential $\tilde{\mathcal{R}}_0$ mit $\mathcal{M}_0(q, v, -\mathcal{D}\mathcal{E}_0(q)) = \tilde{\mathcal{R}}_0(q, v) + \tilde{\mathcal{R}}_0^*(q, -\mathcal{D}\mathcal{E}_0(q))$ existiert, jedoch benötigen wir für ein kraftabhängiges Potential Informationen über $\mathcal{M}_0(q, v, \xi)$ für alle ξ und nicht nur für $\xi = -\mathcal{D}\mathcal{E}_0(q)$

2.8 Eigenschaften von Tilt-EDP und Kontakt-EDP Konvergenz

Lemma 2.17

(Unabhängigkeit vom Tilt bei Kontakt-EDP und Tilt-EDP Konvergenz)

Es gelte

$$(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R}_\epsilon) \xrightarrow{tiEDP} (\mathcal{Q}, \mathcal{E}_0, \mathcal{R}_0) \quad \text{bzw.} \quad (\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R}_\epsilon) \xrightarrow{coEDP} (\mathcal{Q}, \mathcal{E}_0, \mathcal{R}_0)$$

Dann folgt für alle $\tilde{\mathcal{F}} \in C^1(\mathcal{Q})$

$$(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon + \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{R}_\epsilon) \xrightarrow{tiEDP} (\mathcal{Q}, \mathcal{E}_0 + \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{R}_0) \quad \text{bzw.} \quad (\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R}_\epsilon) \xrightarrow{coEDP} (\mathcal{Q}, \mathcal{E}_0, \mathcal{R}_0)$$

Hier ist \mathcal{R}_0 dasselbe Dissipationspotential für alle $\tilde{\mathcal{F}}$

Beweis:

Die Konvergenz der Familie $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R}_\epsilon)$ gegen $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_0, \mathcal{R}_0)$ bedeutet, dass die Annahmen 2.10 für sie erfüllt sind. Daher überprüfen wir nun ob die Familien $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon + \mathcal{F}, \mathcal{R}_\epsilon)$ diese ebenfalls erfüllen. Sei also $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon + \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{R}_\epsilon)$ eine solche Familie.

Die Γ -Konvergenz, Teil 1. der Annahmen, folgt direkt aus Stetigkeit von $\tilde{\mathcal{F}}$ und den Eigenschaften der Γ -Konvergenz.

Sei also für $\mathcal{F} \in C^1(\mathcal{Q})$, dann:

$$\tilde{\mathfrak{D}}_\epsilon^T(q, \mathcal{F}) := \int_0^T [\mathcal{R}_\epsilon(q, \dot{q}) + \mathcal{R}_\epsilon^*(q, -\mathcal{D}(\mathcal{E}_\epsilon + \tilde{\mathcal{F}})(q) - \mathcal{D}\mathcal{F}(q))] dt = \mathfrak{D}_\epsilon^T(q, \mathcal{F} + \tilde{\mathcal{F}})$$

Demzufolge $\tilde{\mathfrak{D}}_\epsilon^T(\cdot, \mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma} \mathfrak{D}_0^T(\cdot, \mathcal{F} + \tilde{\mathcal{F}})$ und wir haben mit $\tilde{\mathcal{N}}_0(q, v, \eta) := \mathcal{N}_0(q, v, \eta - \mathcal{D}\tilde{\mathcal{F}}(q))$:

$$\mathfrak{D}_0^T(q, \mathcal{F} + \tilde{\mathcal{F}}) = \tilde{\mathfrak{D}}_0^T(q, \mathcal{F}) := \int_0^T \tilde{\mathcal{N}}_0(q, \dot{q}, -\mathcal{D}\mathcal{F}(q)) dt$$

Demnach gilt mit $\tilde{\mathfrak{D}}_\epsilon^T$, $\tilde{\mathfrak{D}}_0^T$ sowie $\tilde{\mathcal{N}}_0$ Teil 2. und Teil 3.

Wir sehen dass Teil 4. sowie Teil 5. erfüllt sind, wenn wir mithilfe der Definition $\tilde{\mathcal{M}}_0(q, v, \xi) := \tilde{\mathcal{N}}_0(q, v, \xi + \mathcal{D}\mathcal{E}_0(q) + \mathcal{D}\tilde{\mathcal{F}}(q))$ beobachten, dass:

$$\tilde{\mathcal{M}}_0(q, v, \xi) = \mathcal{N}_0(q, v, \xi + \mathcal{D}\mathcal{E}_0(q)) = \mathcal{M}_0(q, v, \xi) \quad (2.14)$$

Somit sind die Annahmen 2.10 erfüllt.

Die Gleichung (2.14) $\tilde{\mathcal{M}}_0 = \mathcal{M}_0$ bedeutet, dass die Familie $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon + \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{R}_\epsilon)$ das gleiche Konvergenzverhalten zeigt wie die Familie $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R}_\epsilon)$ ohne Tilt \square

Lemma 2.18

Wir haben

$$\text{Tilt-EDP-Konvergenz mit } \widehat{\mathcal{R}}_0 \implies \text{Kontakt-EDP-Konvergenz mit } \mathcal{R}_{eff} = \widehat{\mathcal{R}}_0$$

sowie

$$\left. \begin{array}{l} \text{Kontakt-EDP-Konvergenz} \\ \mathcal{R}_{eff} \text{ superlinear } \forall q \end{array} \right\} \implies \text{simple EDP-Konvergenz}$$

Falls also Tilt-EDP-Konvergenz hält, so gelten alle 3 Konvergenzen und $\widehat{\mathcal{R}}_0 = \mathcal{R}_{eff} = \widetilde{\mathcal{R}}_0$

Beweis:

Beide Pfeile sowie die Aussage folgen direkt aus Lemma 2.13 □

Lemma 2.19

(Alternative Charakterisierung der Tilt-EDP-Konvergenz)

Für eine Familie von Gradientensystemen $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R}_\epsilon)$ sowie ein festes Gradientensystem $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_0, \mathcal{R}_0)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R}_\epsilon) \xrightarrow{tiEDP} (\mathcal{Q}, \mathcal{E}_0, \mathcal{R}_0)$
2. Für alle $\mathcal{F} \in C^1(\mathcal{Q})$ gilt $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon + \mathcal{F}, \mathcal{R}_\epsilon) \xrightarrow{EDP} (\mathcal{Q}, \mathcal{E}_0 + \mathcal{F}, \mathcal{R}_0)$

Die Probleme simpler EDP-Konvergenz können nicht dadurch gelöst werden, dass wir sie für alle Versionen mit Tilt des Gradientensystems fordern was nach diesem Lemma äquivalent zur Forderung nach Tilt-EDP-Konvergenz ist. Da nach Lemma 2.18 im Falle der Tilt-Konvergenz die Dissipationspotentiale der drei Konvergenzarten übereinstimmen werden hier also alle Systeme ausgeschlossen bei denen simple EDP-Konvergenz problematisch ist in dem Sinne, dass ein von der Kraft abhängiges Potential geliefert wird.

Hier ermöglicht uns die Beschränkung auf Kontakt-EDP-Konvergenz eine Abschwächung der Forderung die jedoch den wichtigen Teil, nämlich die kinetische Relation, erhält. Dies werden wir uns an den ersten beiden Beispielen im folgenden Kapitel ansehen.

Kapitel 3

Anwendung

3.1 Kontakt-Konvergenz für Beispiel 3: Oszillierende Dissipation

Wir kommen zurück zu unserem Beispiel aus der Einleitung und betrachten eine Familie von Gradientensystemen $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}, \mathcal{R}_\epsilon)$, $\epsilon > 0$ deren Energie unabhängig vom Parameter ϵ ist während das Dissipationspotential in q oszilliert. Für $\mu \in C^0(\mathbb{R}^2)$ mit $\mu(q, \gamma) = \mu(q, \gamma + 1)$ ist also:

$$\mathcal{R}_\epsilon(q, v) = \frac{\mu(q, q/\epsilon)}{2} v^2,$$

μ ist dabei durch $0 < m \leq \mu(q, \gamma) \leq M < \infty$ beschränkt und wir setzen:

$$\mathcal{R}_{eff}(q, v) = \frac{\bar{\mu}(q)}{2} v^2 \text{ wobei } \bar{\mu}(q) := \int_0^1 \mu(q, \gamma) d\gamma$$

Mit dem folgenden Satz sowie Lemma 2.9 folgt nun die Konvergenz von q_ϵ , den Lösungen von:

$$0 = \mu(q_\epsilon, q_\epsilon/\epsilon) v_\epsilon + \mathcal{D}\mathcal{E}(q_\epsilon)$$

gegen die Lösung q des Gradientenflusses:

$$0 = \bar{\mu}(q) v + \mathcal{D}\mathcal{E}(q) \tag{3.1}$$

Satz 3.1

Wir haben mit $(\mathbb{R}, \mathcal{E}, \mathcal{R}_\epsilon) \xrightarrow{coEDP} (\mathbb{R}, \mathcal{E}, \mathcal{R}_{eff})$ ein klassisches Gradientensystem, dh. $\mathcal{R}_{eff}(q, \cdot)$ ist quadratisch.

Außerdem ist das effektive Dissipationpotential unabhängig \mathcal{E} .

Für nicht konstante $\mu(q, \cdot)$ haben wir keine Tilt-EDP-Konvergenz und das Dissipationspotential $\tilde{\mathcal{R}}_0(q, \cdot)$ der EDP-Konvergenz die vorliegt ist abhängig von \mathcal{E} und nicht-quadratisch.

Wir wollen nun zeigen, dass die Gradientenflussgleichung welche aus EDP-Konvergenz hervorgeht mit derjenigen aus Kontakt-EDP-Konvergenz Gleichung (3.1) übereinstimmt. Dazu betrachten wir:

$$0 = \partial_v \tilde{\mathcal{R}}_0(q, v) + \mathcal{D}\mathcal{E}(q) = \partial_v \mathcal{M}_0(q, v, -\mathcal{D}\mathcal{E}(q)) + \mathcal{D}\mathcal{E}(q) \quad (3.2)$$

Dies lässt sich genauer ausdrücken indem wir die explizite Form von \mathcal{M}_0 in Gleichung (3.4c) betrachten und feststellen, dass $\mathcal{M}_0(q, \cdot, \cdot)$ nur von v^2, ξ^2 abhängig und in beiden Variablen linear homogen ist:

$$\mathcal{M}_0(q, v, \xi) = (\xi^2 - \bar{\mu}(q)^2 v^2) \phi \left(q, \frac{\xi^2}{\xi^2 + \bar{\mu}(q)^2 v^2} \right)$$

$\phi : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist hierbei eine stetige Funktion für die gilt:

$$\phi(q, 0) = \frac{\mu_{1/2}(q)}{2\bar{\mu}(q)^2}, \quad \phi(q, 1/2) = \frac{1}{2\bar{\mu}(q)}, \quad \phi(q, 1) = \frac{1}{2\mu_{\max}(q)}, \quad \phi(q, s) \geq \frac{\sqrt{s(1-s)}}{\bar{\mu}(q)}$$

wobei die letzte Relation aus $\mathcal{M}_0(q, v, \xi) \geq \xi v$ mithilfe der effektive kinetischen Relation und $\max \{ \sqrt{s-s^2} \mid s \in [0, 1] \} = \frac{1}{2}$ folgt. Hier sind:

$$\mu_{1/2}(q) := \left(\int_0^1 \sqrt{\mu(q, y)} dy \right)^2 \quad \text{sowie} \quad \mu_{\max}(q) := \max \{ \mu(q, y) \mid y \in [0, 1] \} \quad (3.3)$$

Nun lässt sich somit, indem wir der Konstruktion im Beweis von Lemma 2.13 folgen, das kraftabhängige Dissipationspotential darstellen als:

$$\bar{\mathcal{R}}_\xi(q, v) = (\xi^2 + \bar{\mu}(q)^2 v^2) \phi \left(q, \frac{\xi^2}{\xi^2 + \bar{\mu}(q)^2 v^2} \right) - \xi^2 \phi(q, 1)$$

Wenn wir nun also $\tilde{\mathcal{R}}_0(q, v) = \bar{\mathcal{R}}_{-\mathcal{D}\mathcal{E}(q)}(q, v)$ einsetzen wird aus Gleichung (3.2):

$$0 = 2\bar{\mu}(q)^2 v \psi \left(q, \frac{\mathcal{D}\mathcal{E}(q)^2}{\mathcal{D}\mathcal{E}(q)^2 + \bar{\mu}(q)^2 v^2} \right) + \mathcal{D}\mathcal{E}(q)$$

wobei:

$$\psi(q, s) = \phi(q, s) - s \partial_s \phi(q, s)$$

Die Äquivalenz von Gleichung (3.1) und Gleichung (3.2) folgt nun, da $\partial_s \phi(q, \frac{1}{2}) = 0$, aus $\psi(q, \frac{1}{2}) = \phi(q, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2\bar{\mu}(q)}$.

Wir finden also für EDP-Konvergenz die untenstehende kinetische Relation vor, welche die bereits erwähnten Unnatürlichkeiten illustriert. Sie ist nicht linear und abhängig von der Energie \mathcal{E} , somit also 'unnatürlicher' als die durch Kontakt-EDP-Konvergenz erlangte, simple Relation. $v \mapsto \xi = \bar{\mu}(q)v$

$$v \mapsto \xi = \partial_v \mathcal{M}_0(q, v, -\mathcal{D}\mathcal{E}(q)) = 2\bar{\mu}(q)^2 v \Psi \left(\frac{\mathcal{D}\mathcal{E}(q)^2}{\mathcal{D}\mathcal{E}(q)^2 + \bar{\mu}(q)^2 v^2} \right)$$

Beweisskizze für Satz 3.1:

$$\mathfrak{D}_\epsilon^T(q, \mathcal{F}) = \int_0^T \mathcal{N}_\epsilon(q, \dot{q}, -\mathcal{D}\mathcal{F}(q)) dt \quad \text{mit} \quad \mathcal{N}_\epsilon(q, v, \eta) = \mathcal{R}_\epsilon(q, v) + \mathcal{R}_\epsilon^*(q, \eta - \mathcal{D}\mathcal{E}(q))$$

Bezeichne das Dissipationsfunktional mit Tilt. Wir erhalten nun:

$$\mathcal{N}_\epsilon(q, v, \eta) = \widehat{\mathcal{N}}(q, q/\epsilon, v, \eta - \mathcal{D}\mathcal{E}(q)) \quad \text{mit} \quad \widehat{\mathcal{N}}(q, y, v, \xi) = \frac{\mu(q, y)}{2} v^2 + \frac{\xi^2}{2\mu(q, y)}$$

Da unser Gradientensystem wie sich leicht zeigen ließe die Annahmen (2.14) aus [2] erfüllt und der Integrand $\widehat{\mathcal{N}}$ die gleichmäßige Stetigkeit aus der dortigen Gleichung (3.3), lassen sich \liminf -Abschätzung sowie die Wiederherstellungsfolge analog zu den beiden Propositionen (3.6)&(3.7) konstruieren.

Somit erhalten wir das Limit-Funktional $\mathfrak{D}_0^T(\cdot, \mathcal{F})$ (dort \mathcal{J}):

$$\mathfrak{D}_0^T(q, \mathcal{F}) = \int_0^T \mathcal{N}_0(q, \dot{q}, -\mathcal{D}\mathcal{F}(q)) dt \quad \text{mit} \quad \mathcal{N}_0(q, v, \eta) = \mathcal{M}_0(q, \dot{q}, \eta - \mathcal{D}\mathcal{E}(q)),$$

wobei \mathcal{M}_0 durch Homogenisierung gegeben ist:

$$\mathcal{M}_0(q, v, \xi) = \inf \left\{ \int_{s=0}^1 \widehat{\mathcal{N}}(q, z(s), vz'(s), \xi) ds \mid z \in \mathbf{H}_v^1 \right\} \quad (3.4a)$$

$$= \inf \left\{ \int_{s=0}^1 \left(\frac{\mu(q, z(s)) (vz'(s))^2}{2} + \frac{\xi^2}{2\mu(q, z(s))} \right) ds \mid z \in \mathbf{H}_v^1 \right\} \quad (3.4b)$$

$$= \inf \left\{ \int_{y=0}^1 \left(\frac{\mu(q, y)v^2}{2b(y)} + \frac{b(y)\xi^2}{2\mu(q, y)} \right) dy \mid b(y) > 0, \int_0^1 b(y) dy = 1 \right\} \quad (3.4c)$$

Hier ist $\mathbf{H}_v^1 := \{z \in H^1((0, 1)) \mid z(1) = z(0) + \text{sign}(v)\}$.

Wie in [2] finden wir eine starke Abhängigkeit von der 1-Periodizität von μ sowie der Tatsache, dass $\frac{q}{\epsilon} = y$ skalar ist.

Wir wollen nun zeigen, dass wir in mit M_0 eine Struktur vorliegen haben die nicht durch eine duale Dissipationssumme $\mathcal{R}_{eff} \oplus \mathcal{R}_{eff}^*$ gegeben ist. Dazu werten wir $\mathcal{M}_0(q, \cdot, \cdot)$ entlang der Achsen $\xi = 0$ sowie $v = 0$ aus:

$$\mathcal{M}_0(q, v, 0) = \frac{\mu_{1/2}(q)}{2} v^2 \quad \text{mit} \quad \mu_{1/2}(q) := \left(\int_0^1 \sqrt{\mu(q, y)} dy \right)^2$$

$$\mathcal{M}_0(q, 0, \xi) = \frac{1}{\mu_{\max}(q)} \xi^2 \quad \text{wobei} \quad \mu_{\max}(q) := \max\{\mu(q, y) \mid y \in [0, 1]\}$$

Das Ergebnis entlang der Achse $\xi = 0$ sehen wir indem wir in Gleichung (3.4c) b nahe

von Maximierern von $\mu(q, \cdot)$ konzentrieren, für die Achse $v = 0$ betrachten wir Gleichung (3.4b) und minimieren $\int_0^1 \mu(z) z'^2 dz$ unter der Einschränkung $z(1) = z(0) + 1$.

Hier lässt sich nun sehen, dass für nicht konstantes $\mu(q, \cdot)$ also keine Tilt-EDP-Konvergenz vorliegt, da sich in diesem Falle $\mu_{1/2}(q)$ und $\mu_{\max}(q)$ unterscheiden.

Die Kontaktmenge $\mathcal{C}_{\mathcal{M}_0} := \{(v, \xi) \mid \mathcal{M}_0(q, v, \xi) = \langle \xi, v \rangle\}$ lässt sich wie folgt konstruieren. Für $v = 0$ folgt mit unserer vorherigen Auswertung $\mathcal{M}_0(q, 0, \xi) = \frac{1}{\mu_{\max}(q)} \xi^2 = 0$, somit also $\xi = 0$. Ist $v \neq 0$ existiert nun durch Koerzitivität ein Minimierer $\iota \in \mathbf{H}_v^1$ für Gleichung (3.4b). Die Kontaktbedingung lautet nun also:

$$\mathcal{M}_0(q, v, \xi) = \int_0^1 \left(\frac{\mu(q, \iota(s)) (v \iota'(s))^2}{2} + \frac{\xi^2}{2\mu(q, \iota(s))} \right) ds = \xi v = \int_0^1 |v| \iota'(s) \xi ds, \quad (3.5)$$

Nun folgt allerdings die Abschätzung nach unten $\mathcal{M}_0(q, v, \xi) \geq \xi v$ mithilfe von :

$$\frac{\mu(q, z(s)) (v z'(s))^2}{2} + \frac{\xi^2}{2\mu(q, z(s))} \geq |v| z'(s) \xi \quad (3.6)$$

für Gleichung (3.4b) und Integration über $s \in [0, 1]$ (Hier gilt die Gleichheit nur genau dann, falls $\mu(q, z(s)) |v| z'(s) = \xi$)

Das bedeutet nun, dass ι für fast alle $s \in [0, 1]$ die Bedingung $\mu(q, \iota(s)) |v| \iota'(s) = \xi$ erfüllen muss, sodass wir mit Integration über s in Gleichung (3.6) nun also $v \bar{\mu} = \xi$ sowie die Kontaktmenge finden:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{M}_0}(q) = \{(v, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathcal{M}_0(q, v, \xi) = \xi v\} = \{(v, \bar{\mu}(q)v) \mid v \in \mathbb{R}\}$$

Hier lässt sich nun die gesuchte kinetische Relation ablesen und wir erhalten das quadratische Dissipationspotential: $\mathcal{R}_{eff}(q, v) = \frac{\bar{\mu}(q)}{2} v^2$

Für das Dissipationspotential der EDP-Konvergenz (siehe Lemma 2.18) schließen wir daraus, dass für $\tilde{\mathcal{R}}_0(q, \cdot) := \mathcal{M}_0(q, v, -\mathcal{D}\mathcal{E}(q)) - \mathcal{M}_0(q, 0, -\mathcal{D}\mathcal{E}(q))$ eine Abhängigkeit von \mathcal{E} vorliegt, da wir \mathcal{M}_0 nicht als Dissipationssumme darstellen konnten. Offensichtlich ist auch $v \mapsto \tilde{\mathcal{R}}_0(q, v)$ nicht quadratisch.

Um die Betrachtung dieses Beispiels abzuschließen wollen wir noch die folgenden beiden Anmerkungen machen:

Anmerkung 1

Falls Tilt-EDP-Konvergenz vorläge hätten wir die duale Dissipationssumme $\mathcal{M}_{eff}(q, v, \xi) := \mathcal{R}_{eff}(q, v) + \mathcal{R}_{eff}^*(q, \xi)$. Da diese nicht vorliegt wollen wir überprüfen ob

die Abschätzung $\mathcal{M}_0 \leq \mathcal{R}_{eff} + \mathcal{R}_{eff}^*$ aus Kapitel 5.4 in [2] hier hält.

Setzen wir dazu in Gleichung (3.4c) $b_0 := y \mapsto \mu(q, y)/\bar{\mu}(q)$ ein so erfüllt b_0 die Anforderungen an b per Definition und wir erhalten:

$$\mathcal{M}_0(q, v, \xi) \leq \int_0^1 \left(\frac{\mu(q, y)v^2}{2b_0(y)} + \frac{b_0(y)\xi^2}{2\mu(q, y)} \right) dy = \frac{\bar{\mu}(q)v^2}{2} + \frac{\xi^2}{2\bar{\mu}(q)} = \mathcal{R}_{eff}(q, v) + \mathcal{R}_{eff}^*(q, \xi)$$

Die Energiedifferenz $\mathcal{R}_{eff} + \mathcal{R}_{eff}^* - \mathcal{M}_0 \geq 0$ illustriert die Relaxation der Kontakt-EDP-Konvergenz im Vergleich zur Tilt-EDP-Konvergenz. Für das Funktional \mathcal{M}_0 skalieren wir durch Homogenisierung \mathcal{R} und \mathcal{R}^* um. Der Effekt wird insbesondere in der Anforderung an z in Gleichung (3.4b) deutlich wo dessen Endpunkt vorgegeben ist.

Das bedeutet, dass eine Minimierung außerhalb der Kontaktbedingung $\mathcal{M}_0(q, v, \xi) = \langle v, \xi \rangle$ nicht zwangsläufig eine Lösung z des Gradientenflusses darstellen muss. Hier sehen wir warum Kontakt-EDP-Konvergenz eine natürliche Wahl darstellt: für die relevanten Paare (v, ξ) ist die Minimierung im mikroskopischen Bereich der Definition von \mathcal{M}_0 mit makroskopisch vorgegebenen Rate v eine Gradientenfluss-Lösung und wir erhalten ein effektives Dissipationspotential.

Anmerkung 2

Folgen wir der Diskussion in Kapitel 4.4 sowie 4.5 in [2] so können wir zeigen, dass $\mathcal{M}_0(q, \cdot, \xi)$ sowie $\mathcal{M}_0(q, v, \cdot)$ konvex und somit Bipotentiale sind.

Betrachten wir $M_0(q, v, \cdot)$: Wir ignorieren hier die Abhängigkeit von q und mit $v > 0$ definieren wir $\mathcal{W}(\xi, h) = \int_0^1 \sqrt{\xi^2 + 2h\mu(y)} dy$ und erhalten:

$$\mathcal{M}_0(v, \xi) = v\mathcal{W}(\xi, H(v, \xi)) - H(v, \xi), \text{ wobei } 1 = v\mathcal{D}_{H(v, \xi)}\mathcal{W}(\xi, H(v, \xi))$$

Hier ist also $H(v, \xi)$ implizit definiert und mithilfe des Satzes der impliziten Funktionen erhalten wir (vgl. Lemma 4.13(d), [2]):

$$\mathcal{D}_\xi^2 \mathcal{M}_0(v, \xi) = \frac{v}{\mathcal{D}_{H(v, \xi)}^2 \mathcal{W}} \left((\mathcal{D}_\xi \mathcal{D}_{H(v, \xi)} \mathcal{W})^2 - \mathcal{D}_\xi \mathcal{W} * \mathcal{D}_{H(v, \xi)} \mathcal{W} \right)$$

Dies ist nicht-negativ, da \mathcal{W} konvex in ξ und konkav in h ist.

Die beiden einzelnen Konvexitäten bedeuten jedoch nicht, dass eine gleichzeitige Konvexität in v, ξ vorliegt. Um dies zu sehen können wir M_0 für die drei Punkte $(v_0, 0), (0, \bar{\mu}v_0), (\frac{1}{2}v_0, \frac{1}{2}\bar{\mu}v_0)$ betrachten:

$$\mathcal{M}_0(v_0, 0) = \frac{\mu_{1/2}v_0^2}{2}, \quad \mathcal{M}_0(0, \bar{\mu}v_0) = \frac{(\bar{\mu}v_0)^2}{2\mu_{\max}}, \quad \mathcal{M}_0\left(\frac{1}{2}v_0, \frac{1}{2}\bar{\mu}v_0\right) = \frac{\bar{\mu}v_0^2}{4}$$

Für die letzte Gleichung nutzen wir, dass $(\frac{1}{2}v_0, \frac{1}{2}\bar{\mu}v_0)$ die Kontaktbedingung erfüllt. Da er sich zwischen den beiden anderen Punkten befindet haben wir Konvexität nur vorliegen,

falls:

$$\frac{\bar{\mu}v_0^2}{4} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_{1/2}v_0^2}{2} + \frac{(\bar{\mu}v_0)^2}{2\mu_{\max}} \right) \iff \bar{\mu} \leq \mu_{1/2} + (\bar{\mu})^2/\mu_{\max}$$

Wählen wir μ nun passend, bspw $\mu(y) = \alpha + |2y - 1|^\gamma$ für $y \in [0, 1]$, so finden wir einen Widerspruch wenn α klein genug und γ groß genug ist.

3.2 Das Beispiel oszillierender Energie aus [2]

Wir kommen nun zu unserem in der Einleitung als Beispiel 4 (1.8) angeführten Modell. Wir betrachten dazu Gradientensysteme $(\mathbb{R}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R})$ wobei die Energie definiert ist durch:

$$\mathcal{E}_\epsilon(t, q) = \Phi(q) - l(t)q + \epsilon \mathcal{W}(q, \frac{q}{\epsilon}) \quad (3.7)$$

Dabei bezeichnet Φ den makroskopischen und \mathcal{W} den mikroskopischen Anteil der Energie, l ist die Kraftausübung.

Die Untersuchung dieses Modells in [2] hat die Konvergenz des Modells gegen $(\mathbb{R}, \mathcal{E}_0, \mathcal{R}_{eff})$ im Sinne der Kontakt-EDP-Konvergenz gezeigt, die Tilt-EDP-Konvergenz ist jedoch eine zu starke Forderung.

Wir geben für \mathcal{W}, \mathcal{R} nun ein explizites Beispiel an um das Resultat aus [2] ebenfalls in expliziter Form darzustellen:

$$\mathcal{W}(q, y) = \frac{A(q)}{2\pi} \sin(2\pi y) \quad \text{und} \quad \mathcal{R}(q, v) = \frac{v^2}{2\mu(q)} \quad (3.8)$$

wobei $A, \mu \in C^0(\mathbb{R})$ positive untere und obere Schranke besitzen.

Satz 3.2

Für die durch Gleichung (3.7) und Gleichung (3.8) definierte Familie von Gradientensystemen $(\mathbb{R}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R})$ gilt:

- Im Sobolev-Raum $H^1([0, T])$ haben wir schwache Γ -Konvergenz von $\mathcal{D}_\epsilon^T(q) := \int_0^T (\mathcal{R}(q, v) + \mathcal{R}^*(q, -\mathcal{D}\mathcal{E}(q))) dt$ gegen $\mathcal{D}_0^T : q \mapsto \int_0^T \mathcal{M}_0(q, v, l(t) - \mathcal{D}\Phi(q)) dt$ mit:

$$\mathcal{M}_0(q, v, \xi) = \inf \left\{ \int_0^1 \left(\frac{(vz'(s))^2}{2\mu(q)} + \frac{\mu(\xi - A(q) \cos z(s))^2}{2} \right) ds \mid z \in \mathbf{H}_v^1 \right\}$$

wobei $\mathbf{H}_v^1 := \{z \in H^1((0, 1)) \mid z(1) = z(0) + \text{sign}(v)\}$

- Für alle $q, v, \xi \in \mathbb{R}$ gilt $\mathcal{M}_0(q, v, \xi) \geq v\xi$ sowie:

$$\mathcal{M}_0(q, v, \xi) = v\xi \iff v = \mu \text{sign}(\xi) \sqrt{\max\{\xi^2 - A(q)^2, 0\}}$$

- Mit der Limit-Energie \mathcal{E}_0 und dem effektiven Dissipationspotential \mathcal{R}_{eff}

$$\mathcal{E}_0(t, q) = \Phi(q) - l(t)q \quad \text{und} \quad \mathcal{R}_{eff}(v) = \int_0^{|v|} \sqrt{A(q)^2 + \frac{\omega^2}{\mu}} d\omega$$

haben wir Kontakt-EDP-Konvergenz $(\mathbb{R}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R}) \xrightarrow{coEDP} (\mathbb{R}, \mathcal{E}_0, \mathcal{R}_{eff})$

- Wir haben keine Tilt-EDP-Konvergenz für $(\mathbb{R}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R})$

Der Beweis erfolgt in ähnlicher Weise wie für Satz 3.1 und wir verweisen wieder auf Kapitel 3&4 in [2].

3.3 Anwendung von EDP-Konvergenz für partielle Differentialgleichungen

Nun betrachten wir die Anwendung des Konzeptes im Kontext von PDEs am Beispiel einer 1-dimensionalen Diffusionsgleichung mit einer dünnen Schicht sehr niedriger Diffusivität. Unter passenden Annahmen an die Skalierung von Diffusionskoeffizient und der Weite der Schicht erlaubt uns dieses Modell im Limit ein Membranmodell zu erhalten. Eine ausführlichere Behandlung findet sich in [26].

$$\dot{u} = \partial_x(a_\epsilon(x)(\partial_x u + u\partial_x V(x))) \text{ in } \Omega = (-1, 1)$$

$$\partial_x u(t, x) + u(t, x)\partial_x V(x) = 0 \text{ für } x = -1, 1 \quad (3.9)$$

Mit $\lambda_B(z) = z \log(z) - z + 1$ sehen wir, dass die Gradientenfluss-Gleichung (3.9) vom Gradientensystem $(\mathcal{P}(\Omega), \mathcal{E}, \mathcal{R}_\epsilon^*)$ erzeugt wird wodurch sie eine Wasserstein-Gradientenstruktur erhält. Hierbei sind:

$$\mathcal{E}_\epsilon(u) = \int_\Omega \lambda_B\left(\frac{u(x)}{\omega_\epsilon(x)}\right) \omega_\epsilon(x) dx \quad \text{sowie} \quad \mathcal{R}_\epsilon^*(u, \xi) = \frac{1}{2} \int_\Omega a_\epsilon(x) u(x) (\partial_x \xi(x))^2 dx$$

Hierbei ist ω_ϵ die Gleichgewichtsdichte mit:

$$\omega_\epsilon(x) = \frac{e^{-V_\epsilon(x)}}{\int_\Omega e^{-V_\epsilon(x)} dx} \quad (3.10)$$

Wir betrachten ein von ϵ unabhängiges Potential $V \in C^1([-1, 1])$ sodass $\omega_\epsilon = \omega_0$. Das Funktional $\mathcal{E}_\epsilon = \mathcal{E}$ ist als die relative Boltzmann-Entropie definiert:

$$\mathcal{E}(u) = \int_\Omega \lambda_B\left(\frac{u}{\omega_0}\right) \omega_0 dx = \int_\Omega (\lambda_B(u) + u(V + \log Z_0) - 1) dx$$

Für den Diffusionskoeffizienten a_ϵ nehmen wir an, dass es Funktionen $a_+, a_* \in C^1([0, 1])$ sowie $a_- \in C^1([-1, 0])$ gibt die auf $[0, 1]$ durch $\underline{a} > 0$ nach unten beschränkt sind. Dann:

$$a_\epsilon(x) = \begin{cases} a_-(x) & \text{für } x < 0, \\ \epsilon a_*(x\epsilon) & \text{für } x \in [0, \epsilon], \\ a_+(x) & \text{für } x > \epsilon. \end{cases} \quad (3.11)$$

Wir haben also im Intervall $[0, \epsilon]$ einen Diffusionskoeffizienten der ebenfalls von der Größenordnung ϵ ist und sehen eine nicht-triviale Abhängigkeit von a_ϵ im Bezug auf x . Ebenso besitzt a_ϵ während das Potential V auf $[-1, 1]$ stetig ist also Sprünge in $x = 0, x = \epsilon$.

Satz 3.3

Wir haben $(\mathcal{P}(\Omega), \mathcal{E}, \mathcal{R}_\epsilon) \xrightarrow{tiEDP} (\mathcal{P}(\Omega), \mathcal{E}, \widehat{\mathcal{R}}_0)$ wobei $\widehat{\mathcal{R}}_0$ wie folgt über dessen Legendre-Dual $\widehat{\mathcal{R}}_0^*$ definiert ist:

$$\widehat{\mathcal{R}}_0^*(u, \xi) = \int_{-1}^0 \frac{a_-}{2} (\partial_x \xi)^2 u dx + \int_0^1 \frac{a_+}{2} (\partial_x \xi)^2 u dx + a_{\text{eff}} \sqrt{u(0^-)u(0^+)} \mathfrak{C}^*(\xi(0^+) - \xi(0^-))$$

wobei

$$\frac{1}{a_{\text{eff}}} = \int_0^1 \frac{1}{a_*(x)} dx \quad \text{und} \quad \mathfrak{C}^*(\zeta) = 4 \cosh\left(\frac{\zeta}{2}\right) - 4 \quad (3.12)$$

Für den Beweis verweisen wir auf den Beweis von Satz 4.1 in [16]

Für $x \in [-1, 1] \setminus \{-1, 0, 1\}$ erhalten wir nach wie vor die Otto-Wasserstein Diffusion, allerdings können sich an der Membran in $x = 0$ Transmissionsbedingungen ergeben die durch mögliche Sprünge in ξ und u entstehen.

Wenn wir nun das Limit aus Gleichung (3.9) als Gradientenflussgleichung betrachten ist dies ebenfalls wieder eine lineare Gleichung, allerdings mit Bedingungen an den Transport in $x=0$:

$$\dot{u} = \partial_x (a_-(x)(\partial_x u + u \partial_x V_0(x))) \quad \text{in } \Omega := (-1, 0), \quad (3.13a)$$

$$\dot{u} = \partial_x (a_+(x)(\partial_x u + u \partial_x V_0(x))) \quad \text{in } \Omega := (0, 1), \quad (3.13b)$$

$$0 = a_-(0) (\partial_x u(0^-) + u(0^-) \partial_x V(0)) - a_{\text{eff}} (u(0^+) - u(0^-)) \quad (3.13c)$$

$$0 = a_+(0) (\partial_x u(0^+) + u(0^+) \partial_x V(0)) - a_{\text{eff}} (u(0^+) - u(0^-)) \quad (3.13d)$$

$$0 = \partial_x u(t, x) + u(t, x) \partial_x V_0(x) \quad \text{für } x = \pm 1 \quad (3.13e)$$

Diese Bedingungen lassen aber auch in diesem Beispiel nicht zu aus der Gradientenflussgleichung die kinetische Relation zu extrahieren aus der die Transportbedingungen entstehen. $\widehat{\mathcal{R}}_0^*$ trägt also auch hier zusätzliche thermodynamische Information. In der Tat

lässt sich ähnlich zu Satz 3.1 in [1] aus der kinetische Relation, hier allerdings in schwacher Form, also die Bedingungen c) und d) herleiten:

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \partial_t u \psi dx = D_\xi \widehat{\mathcal{R}}_0^*(u, \xi)[\psi] \\
& = \int_{-1}^0 a_- \partial_x \xi \partial_x \psi u dx + \int_0^1 a_+ \partial_x \xi \partial_x \psi u dx \\
& \quad + a_{\text{eff}} \sqrt{u(0^-)u(0^+)} (\mathfrak{C}^*)' (\xi(0^+) - \xi(0^-)) (\psi(0^+) - \psi(0^-)) \\
& = - \int_{-1}^0 \partial_x (a_- u \partial_x \xi) \psi dx - \int_0^1 \partial_x (a_+ u \partial_x \xi) \psi dx \\
& \quad + \left[a_{\text{eff}} \sqrt{u(0^-)u(0^+)} (\mathfrak{C}^*)' (\xi(0^+) - \xi(0^-)) - a_+(0)u(0^+) \partial_x \xi(0^+) \right] \psi(0^+) \\
& \quad + \left[-a_{\text{eff}} \sqrt{u(0^-)u(0^+)} (\mathfrak{C}^*)' (\xi(0^+) - \xi(0^-)) - a_+(0)u(0^-) \partial_x \xi(0^-) \right] \psi(0^-) \\
& \quad - a_-(-1)u(-1) \partial_x \xi(-1) \psi(-1) + a_+(1)u(1) \partial_x \xi(1) \psi(1)
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $\xi = -\mathcal{D}\mathcal{E}(u) = -\log(\frac{u}{\omega_0}) = -\log u - V$ erhalten wir ebenfalls die Gleichungen aus (3.13). Insbesondere erhalten wir c) und d) mit:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{ab} (\mathfrak{C}^*)' (\log a - \log b) = 2\sqrt{ab} \sinh(\log(\frac{a}{b})) \\
& = \sqrt{ab} (e^{\log(a/b)/2} - e^{-\log(a/b)/2}) = \sqrt{ab} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) = a - b
\end{aligned}$$

Anmerkung

Die cosh-Gradientenstruktur hat für die in [25] betrachteten Systeme eine interessante Eigenschaft. Die Autoren betrachten $I \in \mathbb{N}$ Partikel die mit Raten A_{ik} interagieren. Die Evolution der Konzentration $c_i \in [0, 1]$ einer Spezies $i \in \{1, \dots, I\}$ lässt sich durch die Mastergleichung beschreiben:

$$\dot{c} = Ac$$

Es wird die Konvergenz für Systeme betrachtet deren Reaktionen in schnelle(S)& langsame(L) aufgeteilt werden, sodass wir die folgenden Gleichungen erhalten:

$$\dot{c}^\epsilon = A^\epsilon c^\epsilon = (A^L + \frac{1}{\epsilon} A^S) c^\epsilon$$

Diese werden von Gradientensystemen $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_{BZ}^\epsilon, \mathcal{R}_\epsilon^*)$ generiert mit:

$$\mathcal{Q} = \{c \in [0, 1]^I \mid \sum_{i=1}^I c_i = 1\}, \mathcal{R}_\epsilon^*(c, \xi) = \frac{1}{2} \sum_{i < k} A_{ik}^\epsilon \sqrt{\frac{\omega_k^\epsilon}{\omega_i^\epsilon}} \sqrt{c_i c_k} \mathfrak{C}^*(\xi_i - \xi_k), \mathcal{E}_{BZ}^\epsilon = \mathcal{H}(c \mid \omega^\epsilon)$$

Hier ist ω^ϵ ein Gleichgewichtszustand dessen Existenz nötige Bedingung für die Existenz einer Gradientenstruktur ist. $\mathcal{H}(c \mid \omega^\epsilon)$ bezeichnet die relative Boltzmann-Entropie von c relativ zu ω^ϵ welche durch den Logarithmus als Inverses die 'cosh'-Struktur erzeugt. Die Autoren zeigen, dass diese Struktur die einzige ist welche unter Tilt-EDP-Konvergenz stabil ist, das heißt im Limit bleibt die cosh-Struktur erhalten.

3.4 Tilt für Markov-Prozesse

3.4.1 Große Abweichungen in Markov-Prozessen und Gradientenflüsse

Für eine Folge stetiger Markov-Prozesse Q^n in \mathcal{Q} welche mit Bezug auf die Maße $\mu^n \in P(\mathcal{Q})$ reversibel sind nehmen wir an, dass sie die folgenden beiden Punkte erfüllen: (vgl. [19])

1. Mit der Cramér-Funktion $K : \mathcal{Q} \rightarrow [0, \infty]$ erfüllen die invarianten Maße μ^n ein große-Abweichungen Prinzip, also

$$\mu^n \sim \exp(-nK), \text{ für } n \rightarrow \infty$$

2. Die Zeitverläufe von Q^n erfüllen mit der Cramér-Funktion $I : C([0, \infty]; \mathcal{Q}) \rightarrow [0, \infty]$ ein große-Abweichungen Prinzip in $C([0, \infty]; \mathcal{Q})$, also

$$\text{Prob}(Q^n \approx q \mid Q_0^n \approx q(0)) \sim \exp(-nI(q)), \text{ für } n \rightarrow \infty \quad (3.15)$$

Dies erlaubt die Funktion I mithilfe von einem symmetrischen Dissipationspotential \mathcal{R} darzustellen als:

$$I(q) = \frac{1}{2}S(q(T)) - \frac{1}{2}S(q(0)) + \int_0^T [\mathcal{R}(q, \dot{q}) + \mathcal{R}^*(q, -\frac{1}{2}\mathcal{D}S(q))] dt \quad (3.16)$$

Hier ist das Funktional $I(q) \geq 0$ und für eine Folge von Realisierungen q_n des Prozesses Q^n gilt $\text{Prob}(q_{n_k} \rightarrow q) = 1$ wobei die Kurve q $I(q) = 0$ erfüllt.

$I(q) = 0$ lässt sich also mit dem Verhalten des Prozesses Q^n im Limit identifizieren.

Diese Kurven sind Lösungen der Gradientenflussgleichung $v = \mathcal{D}_\xi \mathcal{R}^*(q, \frac{1}{2}\mathcal{D}K(q))$

Wir haben also eine bijektive Abbildung zwischen I und dem Gradientensystem $(\mathcal{Q}, \frac{1}{2}K, \mathcal{R})$

3.4.2 Nicht-dynamischer Kontext

Wir betrachten im nicht-dynamischen Kontext eine Zufallsvariable X^n in \mathcal{Q} mit dem Gesetz $\mu^n \in P(\mathcal{Q})$. Wir betrachten nun den Tilt einer Zufallsvariable X^n , dh wir betrachten eine neue Folge $X^{\mathcal{F},n}$ mit:

$$\mu^{\mathcal{F},n}(A) := \frac{1}{Z_n} \int_A \exp(-n\mathcal{F}(q)) \mu^n(dq), \quad \text{wobei } Z_n := \int_{\mathcal{Q}} \exp(-n\mathcal{F}(q)) \mu^n(dq) \quad (3.17)$$

Hierbei verbinden wir eine Eigenschaft die wir ohne sie explizit zu erwähnen bereits genutzt haben mit dem Tilt von Zufallsvariablen: Die Additivität von Energien. Genauer ist die totale Energie in einem System bei Zusammenführung von Energien aus verschiedenen Phänomenen einfach deren Summe. So entsteht die perturbierte Energie $\mathcal{E} + \mathcal{F}$ in einem System mit Energie \mathcal{E} aus der Summe dieser Energie und der Perturbation \mathcal{F} . Gleichung (3.17) übt einen Tilt auf die Verteilung von \mathcal{F} in Richtung kleinerer Werte aus indem größere Wahrscheinlichkeiten zu $q \in \mathcal{Q}$ zugeordnet werden bei denen $\mathcal{F}(q)$ kleiner ist.

Sofern die μ^n Bedingung 1. sowie eine Bedingung an die Ränder der Verteilung erfüllen folgt mit Varadhan & Brycs Lemma (siehe Kapitel 1.2 in [9]), dass $\mu^{\mathcal{F},n}$ ebenfalls ein große-Abweichungen Prinzip erfüllen mit der getilteten Cramér-Funktion $K^{\mathcal{F}}$:

$$\mu^{\mathcal{F},n} \sim \exp(-nK^{\mathcal{F}}), \quad K^{\mathcal{F}}(q) := K(q) + \mathcal{F}(q) + c \text{ mit Konstante } c$$

Die Konstante c wird hier so ausgewählt, dass $\inf K^{\mathcal{F}} = 0$. Dies kann so verstanden werden, dass mit $\mu^n \sim \exp(-nK)$

$$\exp(-n\mathcal{F})\mu^n \sim \exp(-n\mathcal{F} - nK)$$

Was die Terme $K(q)$ sowie $\mathcal{F}(q)$ in der Definition von $K^{\mathcal{F}}$ erzeugt. Die Konstante c folgt dann aus der Normalisierung in Gleichung (3.17) Wir sehen also im Tilt Gleichung (3.17) ein Analog zur Additivität der Energien. Beide Konzepte stimmen im große-Abweichungen Prinzip für $n \rightarrow \infty$ überein.

3.4.3 Dynamischer Kontext

Wir betrachten einen Markov-Prozess Q^n in \mathcal{Q} mit Generator G^n . Beispielsweise Q^n löse

$$dQ_t^n = a^n(Q_t^n)dt + b^n(Q_t^n)dW_t$$

in \mathbb{R}^d . Dann:

$$(G^n f)(q) = a^n(q)\nabla f(q) + \frac{1}{2}b^n(q)b^n(q)^T \Delta f(q)$$

Wir wollen nun zeigen, dass Gradientensysteme die aus Markovprozessen entstehen ebenfalls eine Unabhängigkeit aufweisen die wir in den vorherigen Sektionen bereits betrachtet

haben, nämlich die Unabhängigkeit des Dissipationsfunktional \mathcal{R} . In der Anwendung eines Tilts haben wir nicht nur die Additivität der Energien angenommen, sondern auch dass die Perturbation durch \mathcal{F} die Dissipation nicht verändert.

Diese Annahme entsteht wie bereits in der Einleitung erwähnt dadurch, dass \mathcal{R} die kinetische Relation zwischen Kraft ξ und der Änderungsrate v kodiert welche als unabhängig von der treibenden Energie angenommen wird.

Wir können im dynamischen Kontext mithilfe der Logarithmus-Transformation von Fleming-Sheu([8],[30]) den Tilt darstellen als:

$$(G^{\mathcal{F},n} f)(q) := \exp(n\mathcal{F}(q))G^n(\exp(-n\mathcal{F})f)(q) - \exp(n\mathcal{F}(q))f(q)(G^n \exp(-n\mathcal{F}))(q)$$

Sei $Q^{\mathcal{F},n}$ durch $G^{\mathcal{F},n}$ erzeugt. Falls Q^n ein invariantes Maß μ^n hat, so hat $Q^{\mathcal{F},n}$ das Maß $\frac{1}{Z_n} \exp(-n\mathcal{F})\mu^n$ mit $Z_n := \int_{\mathcal{Q}} \exp(-n\mathcal{F})d\mu^n$

In der Herleitung von Gleichung (3.16) findet man \mathcal{R}^* indem man von einer skalierten Version der G^n das Limit betrachtet. Dafür definieren wir im Sinne von Kapitel 8.6.1 in [7] den nichtlinearen Generator:

$$(L^n f)(q) := \frac{1}{n} \exp(-nf(q))(G^n \exp(nf))(q)$$

sowie dessen Limit:

$$(Lf)(q) := \lim_{n \rightarrow \infty} L^n f(q)$$

Für erfolgreiche Resultate aus dem große-Abweichungen Prinzip wirkt der Operator L auf f nur durch die Ableitung Df , was uns folgende Identifizierung erlaubt:

$$Lf(q) = \mathcal{L}(q, \mathcal{D}f(q))$$

Das duale Dissipationspotential \mathcal{R}^* ist dann definiert durch:

$$\mathcal{R}^*(q, \xi) := \mathcal{L}(q, \xi + \frac{1}{2}\mathcal{D}K(q)) - \mathcal{L}(q, \frac{1}{2}\mathcal{D}K(q))$$

Wir können nun indem wir G^n durch $G^{\mathcal{F},n}$ ersetzen zeigen, dass ein Tilt \mathcal{R}^* nicht beeinflusst:

$$\begin{aligned} (L^{\mathcal{F},n} f)(q) &:= \frac{1}{n} e^{-nf(q)} (G^{\mathcal{F},n} e^{nf})(q) \\ &= \frac{1}{n} e^{-nf(q)} e^{n\mathcal{F}(q)} G^n(e^{nf} e^{-n\mathcal{F}})(q) - \frac{1}{n} e^{-nf(q)} e^{n\mathcal{F}(q)} e^{nf} G^n e^{-n\mathcal{F}}(q) \\ &= L^n(f - \mathcal{F})(q) - L^n(-\mathcal{F})(q) \\ &\rightarrow L(f - \mathcal{F})(q) - L(-\mathcal{F})(q) \text{ für } n \rightarrow \infty \\ &= \mathcal{L}(q, \mathcal{D}f(q) - \mathcal{D}\mathcal{F}(q)) - \mathcal{L}(q, -\mathcal{D}\mathcal{F}(q)) \end{aligned}$$

Das mit den Abweichungen des Prozesses $Q^{\mathcal{F},n}$ verbundene Dissipationspotential $\mathcal{R}^{\mathcal{F},*}$ erfüllt dann:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\mathcal{F},*}(q, \xi) &= \left[\mathcal{L}(q, \xi + \frac{1}{2} \mathcal{D}K^{\mathcal{F}}(q) - \mathcal{D}\mathcal{F}(q)) - \mathcal{L}(q, -\mathcal{D}\mathcal{F}(q)) \right] \\ &\quad - \left[\mathcal{L}(q, \frac{1}{2} \mathcal{D}K^{\mathcal{F}}(q) - \mathcal{D}\mathcal{F}(q)) - \mathcal{L}(q, -\mathcal{D}\mathcal{F}(q)) \right] \\ &= \mathcal{L}(q, \xi + \frac{1}{2} \mathcal{D}K(q)) - \mathcal{L}(q, \frac{1}{2} \mathcal{D}K(q)) \\ &= \mathcal{R}^*(q, \xi) \end{aligned}$$

Es lässt sich also eine Analogie zwischen der Additivität von Energien und diesen stochastischen Prozessen zeigen. Im mechanischen Kontext der Modellierung von Energien ist die Unabhängigkeit des Potentials Konsequenz von Modellierungsannahmen während sie im Kontext der Stochastik mathematische Konsequenz des Tilts ist. Folglich ist das Verhalten, egal ob die Gradientenstruktur aus Modellierung oder indirekt durch große-Abweichungs Prinzipien entsteht, unter Perturbationen der Energie gleich.

Kapitel 4

Zusammenfassung

Diese Arbeit befasste sich mit der Konvergenz von Gradientenfluss-Modellen in der Form von Gradientensystemen $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_\epsilon, \mathcal{R}_\epsilon)$ gegen ein Limitsystem. Dazu haben wir zunächst betrachtet wie sich eine solche Konstruktion rechtfertigen lässt und haben festgestellt dass sie durch die Kodierung einer kinetischen Relation in Form einer funktionellen Abhängigkeit von ξ und v zusätzliche Information zu einem Gradientenfluss hinzufügt. Dabei haben wir gesehen, dass die Zuordnung einer Gradientenflussgleichung zwar eindeutig ist, andersherum die Zuordnung einer Gradientenstruktur jedoch in hohem Maße uneindeutig. Danach folgte mit dem Hauptfokus die Betrachtung der Konvergenz dieser Systeme. Aufbauend auf dem Energie-Dissipations-Prinzip von DeGiorgi haben wir dabei gesehen, dass die Limitstrukturen $(\mathcal{Q}, \mathcal{E}_0, \mathcal{R}_*)$ mit $\mathcal{R}_* \in \{\tilde{\mathcal{R}}_0, \hat{\mathcal{R}}_0, \mathcal{R}_{eff}\}$ sich unterscheiden sofern keine Tilt-EDP-Konvergenz vorliegt.

Bei Untersuchung der Relationen zwischen den Konvergenzarten in Lemma 2.18 & Lemma 2.18 haben wir dann festgestellt, dass die Tilt-EDP-Konvergenz genau in den Fällen scheitert in denen wir die EDP-Konvergenz als problematisch angesehen haben. Ist das Dissipationspotential der EDP-Konvergenz nämlich von der Energie abhängig so kann die Tilt-EDP-Konvergenz nicht gelten. Hier erweist sich die Kontakt-EDP-Konvergenz als nützliche Brücke die uns dennoch erlaubt ein Limitsystem zu erhalten das mit der effektiven kinetischen Relation konsistent ist. Dabei haben wir festgestellt dass diese effektiven Relationen die mikroskopischen Informationen des im Limit verschwindenden Teils der Energien \mathcal{E}_ϵ aufnehmen können sodass im Limit von klassischen Gradientensystemen ein generalisiertes entstehen kann.

Zukünftige Arbeit würde das Konvergenzverhalten weiterer Systeme betrachten und sich mit der Frage der Kopplung von ansonsten unabhängigen Gradientensystemen $(\mathcal{Q}^i, \mathcal{E}_\epsilon^i, \mathcal{R}_\epsilon^i)$ über einen gemeinsamen Energieanteil $\mathcal{F}_\epsilon : \prod_i \mathcal{Q}^i \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ beschäftigen.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über **Konvergenz von Gradientenfluss-Modellen** selbstständig von mir und ohne fremde Hilfe verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken - auch elektronischen Medien - dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind. Mir ist bekannt, dass es sich bei einem Plagiat um eine Täuschung handelt, die gemäß der Prüfungsordnung sanktioniert werden kann.

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in einer Datenbank einverstanden.

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit oder Teile daraus nicht anderweitig als Prüfungsarbeit eingereicht habe.

.....
(Datum, Unterschrift)

Literatur

- [1] *A gradient structure for systems coupling reaction-diffusion effects in bulk and interfaces*. Mai 2011. URL: <https://opus4.kobv.de/opus4-matheon/frontdoor/index/index/docId/801>.
- [2] “A gradient system with a wiggly energy and relaxed EDP-convergence*”. In: *ESAIM: COCV* 25 (2019), S. 68. DOI: 10.1051/cocv/2018058. URL: <https://doi.org/10.1051/cocv/2018058>.
- [3] Luigi Ambrosio, Nicola Gigli und Giuseppe Savaré. *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*. Birkhäuser, 2008.
- [4] Andrea Braides. *Gamma-Convergence for Beginners*. Oxford University Press, Juli 2002. ISBN: 9780198507840. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780198507840.001.0001.
- [5] “BV solutions and viscosity approximations of rate-independent systems”. In: *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* 18.1 (Dez. 2010), S. 36–80. DOI: 10.1051/cocv/2010054.
- [6] W. Fenchel. “On Conjugate Convex Functions”. In: *Canadian Journal of Mathematics* 1.1 (1949), S. 73–77. DOI: 10.4153/CJM-1949-007-x.
- [7] J. Feng und T.G. Kurtz. *Large Deviations for Stochastic Processes*. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 2006. ISBN: 9780821841457. URL: <https://books.google.de/books?id=VYvzBwAAQBAJ>.
- [8] Wendell Fleming. “Logarithmic transformations and stochastic control”. In: Bd. 42. Jan. 2006, S. 131–141. ISBN: 3-540-11936-1. DOI: 10.1007/BFb0004532.
- [9] “Formulation of Large Deviation Theory in Terms of the Laplace Principle”. In: *A Weak Convergence Approach to the Theory of Large Deviations*. John Wiley Sons, Ltd, 1997. Kap. 1, S. 1–47. ISBN: 9781118165904. DOI: <https://doi.org/10.1002/9781118165904.ch1>.
- [10] Thomas Frenzel. “On the derivation of effective gradient systems via EDP-convergence”. Diss. Humboldt-Universität zu Berlin, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, 2020. DOI: <http://dx.doi.org/10.18452/21391>.

- [11] “Gamma-convergence of gradient flows with applications to Ginzburg-Landau”. In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 57.12 (2004), S. 1627–1672. DOI: <https://doi.org/10.1002/cpa.20046>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cpa.20046>.
- [12] *Gamma-limits and relaxations for rate-independent evolutionary problems*. Juli 2007. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00526-007-0119-4>.
- [13] Jacques Hadamard. *Mémoire sur le problème d’analyse relatif à l’équilibre des plaques élastiques encastrées*. 1908. URL: <https://searchworks.stanford.edu/view/2147097>.
- [14] R.D. James. Nov. 1995. URL: <https://conservancy.umn.edu/handle/11299/1486>.
- [15] Richard Jordan, David Kinderlehrer und Felix Otto. “The variational formulation of the Fokker-Planck equation”. In: (Jan. 1996). DOI: 10.1184/R1/6480020.v1.
- [16] Matthias Liero u. a. “On microscopic origins of generalized gradient structures”. In: *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S* 10 (Juli 2015). DOI: 10.3934/dcdss.2017001.
- [17] E.M. LIFSHITZ, A.M. KOSEVICH und L.P. PITAEVSKII. “CHAPTER I - FUNDAMENTAL EQUATIONS”. In: *Theory of Elasticity (Third Edition)*. Hrsg. von E.M. LIFSHITZ, A.M. KOSEVICH und L.P. PITAEVSKII. Third Edition. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1986, S. 1–37. ISBN: 978-0-08-057069-3. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-057069-3.50008-5>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780080570693500085>.
- [18] Gianni Dal Maso. *An introduction to gamma-convergence*. Birkhauser, 1993.
- [19] A. Mielke, M. A. Peletier und D. R. M. Renger. “On the Relation between Gradient Flows and the Large-Deviation Principle, with Applications to Markov Chains and Diffusion”. In: (2014). DOI: 10.1007/s11118-014-9418-5.
- [20] Alexander Mielke. “A gradient structure for reaction–diffusion systems and for energy-drift-diffusion systems*”. In: *Nonlinearity* 24.4 (März 2011), S. 1329. DOI: 10.1088/0951-7715/24/4/016. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0951-7715/24/4/016>.
- [21] Alexander Mielke. *An introduction to the analysis of gradients systems*. 2023. arXiv: 2306.05026 [math-ph].
- [22] Alexander Mielke. *Formulation of thermoelastic dissipative material behavior using generic*. Jan. 2011. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00161-010-0179-0>.

- [23] Alexander Mielke. “On Evolutionary Gamma-Convergence for Gradient Systems”. In: *Macroscopic and Large Scale Phenomena: Coarse Graining, Mean Field Limits and Ergodicity*. Hrsg. von Adrian Muntean, Jens Rademacher und Antonios Zagaris. Cham: Springer International Publishing, 2016, S. 187–249. ISBN: 978-3-319-26883-5. DOI: 10.1007/978-3-319-26883-5_3. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-26883-5_3.
- [24] Alexander Mielke, Alberto Montefusco und Mark A. Peletier. “Exploring families of energy-dissipation landscapes via tilting: three types of EDP convergence”. In: *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 33.3 (Jan. 2021), S. 611–637. DOI: 10.1007/s00161-020-00932-x. URL: <https://doi.org/10.1007/s00161-020-00932-x>.
- [25] Alexander Mielke und Artur Stephan. *Coarse-graining via EDP-convergence for linear fast-slow reaction systems*. 2021. arXiv: 1911.06234 [math-ph].
- [26] “On microscopic origins of generalized gradient structures”. In: *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 10.1 (2017), S. 1–35. DOI: 10.3934/dcdss.2017001.
- [27] Mark A. Peletier. *Variational Modelling: Energies, gradient flows, and large deviations*. 2014. arXiv: 1402.1990 [math-ph].
- [28] L. Prandtl. “Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper”. In: *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 8.2 (1928), S. 85–106. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.19280080202>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/zamm.19280080202>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/zamm.19280080202>.
- [29] Ralph Tyrell Rockafellar. *Convex analysis*. en. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1996. ISBN: 9780691015866.
- [30] Shuenn-Jyi Sheu. “Stochastic Control and Exit Probabilities of Jump Processes”. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 23.2 (1985), S. 306–328. DOI: 10.1137/0323022.
- [31] “Su un tipo di convergenza variazionale”. ita. In: *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti* 58.6 (Juni 1975), S. 842–850. URL: <http://eudml.org/doc/291278>.
- [32] G.A. Tomlinson. “CVI. A molecular theory of friction”. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 7.46 (1929), S. 905–939. DOI: 10.1080/14786440608564819. URL: <https://doi.org/10.1080/14786440608564819>.