# Liquiditätsoptionen
## Bewertung und Risikomanagement

Dr. Volkert Paulsen
Mathematisches Seminar Universität Kiel

4. Januar 2007

## 1 Ziele

Banken in den USA vergeben über $80\%$ ihrer Unternehmens-und Industriedarlehen mittels Liquiditätsfazilitäten (loan commitments), siehe [1]. Obwohl dies die Bedeutung dieses Bankproduktes unterstreicht, sind Liquiditätsfazilitäten, im folgenden Liquiditätsoptionen genannt, bislang wenig untersucht worden. Diese Expertise soll einen ersten Weg zeigen, wie eine Bewertung des Einzelproduktes erfolgen und ein Risikomanagement des Gesamtportfolios an Liquiditätsoptionen durchgeführt werden kann. Im Vordergrund steht dabei die Entwicklung eines mathematischen Modells, daß eine Cashflow-Analyse der zukünftigen abgerufenen Gesamtliquidiät ermöglicht.

## 2 Produktmerkmale

In [1] wird ausgeführt, daß eine Liquiditätsoption ein kompliziertes OTC Produkt ist, dessen vertragliche Ausgestaltung eine breite Variabilität an möglichen Ausprägungen liefert. In der Diskussion mit den Mitarbeitern der HSH-Nordbank hat sich folgende relevante vereinfachte Produktspezifizierung ergeben, die die Grundlage der folgenden Analyse darstellt.
Eine Liquiditätsoption ist eine unwiderrufliche Kreditzusage der Bank an einen Vertragspartner, in der Regel ein Unternehmen, mit einer Vertragslaufzeit in Monaten. Während der Laufzeit hat das Unternehmen das Recht, am Ende eines jeden Monats Liquidität bis zu einem maximalen Nominalbetrag einer bestimmten Währung von der Bank abzurufen. Zu unterscheiden ist in revolierende Verträge, bei denen in jedem Monat der volle Nominalbetrag angefordert werden kann, und nicht revolvierende, bei denen während der gesamten Laufzeit höchstens der Nominalbetrag zur Verfügung steht. Wird ein Kredit beansprucht, werden Kreditzinsen fällig, deren Höhe bei Vertragsabschluß fixiert wurde. In der Analyse gehen wir davon aus, daß der fällige Zinssatz sich aus dem Euribor und einem Spread in Basispunkten zusammensetzt. Dies stellt insofern keine Einschränkung dar, da eine andere Zinszahlungskondition mittels Zinsswaps in obiges Zinsfi-

xing übergeführt werden kann. Zusammenfassend ergeben sich also folgende Merkmale einer Liquiditätsoption, die IT-mäßig erfaßt werden sollten:
Vertragspartner, Laufzeit der Option, Nominalbetrag, Währung, revolvierend/nichtrevolvierend, Zinskonditionen, mögliche Laufzeit eines in Anpruch genommenen Kredites.

# 3 Bewertung

Wir möchten hier den finanzmathematischen Charakter einer Liquiditätsoption ausarbeiten. Wie schon in [1] erwähnt wird, stellt ein loan commitment eine Option auf den Creditspread beziehungsweise die Bonität des Unternehmens dar. Um dies zu verdeutlichen betrachten wir ein Modell, in dem es $N$ geordnete Bonitätsklassen $B_1, \cdots, B_N$ gibt mit $B_1$ als bester Bonitätsklasse. Ein Unternehmen, das in $B_i$ eingestuft ist, hat auf dem Kapitalmarkt einen Creditspread von $s_i$ zu bezahlen bei Inanspruchnahme eines Kredites. Zu diesen $N$ Bonitätsklassen gehören also eindeutige Spreads $s_1, \cdots, s_N$ mit $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_N$.
Zunächst nehmen wir an, daß nur für einen zukünftigen Zeitpunkt $T$ eine unwiderrufliche Kreditzusage über den Nominalbetrag $N$ gegeben wird, bei der im Falle der Ausübung neben dem Euribor ein Spread der Höhe $s_k$ entsprechend der Bonitätsklasse $B_k$ zu zahlen ist. Ausgehend von einem der Bonitätsklasse $B_i$ entsprechendem Spread $s_i$ ist die zukünftige Entwicklung des Spreads bzw. der Bonität zufällig und wird beschrieben durch einen stochastischen Prozeß $(S(t))_{t=0,\cdots,T}$. Startend mit $S(0) = s_i$ beschreibt $S(t)$ den zufälligen Spread des Unternehmens zum Zeitpunkt $t$.
Die Kreditzusage wird eingelöst, wenn die Fremdkapitalkosten für das Unternehmen zum Zeitpunkt $T$ durch die Optionsausübung geringer sind als die auf dem Kapitalmarkt. Dies ist der Fall, wenn $S(T) > s_k$ gilt, und für die Bank ergibt sich ein Verlust in Höhe des Barwertes der zukünftigen fehlenden Zinszahlungen

$$f(S(T) - s_k) = \sum_{i=1}^{m} N(S(T) - s_k)B(T, t_i).$$

Hierbei bezeichnet $B(s, t)$ den Preis in $s$ eines default-free Zero-coupon bonds mit maturity $t$ und obige Formel entspricht dem Fall, daß ein sich ergebender Kredit $m$ Zinszahlungen zu den Zeitpunkten $t_1, \cdots, t_m$ vorsieht. Diese Liquiditätsoption entpricht also einer Option, die $f(S(T) - s_k)^+)$ als Auszahlung zum Ausübungszeitpunkt $T$ liefert. Für eine Bewertung ist ein finanzmathematischer Ansatz dann angebracht, wenn der Spread durch Finanzmarktprodukte handelbar ist. Zu klären ist dann, ob für dieses Derivat ein Hedge bzw. Upperhedge existiert, dessen Anfangspreis dann als arbitragefreier Preis dienen kann.
Ebenso geeignet ist eine aktuarielle Sichtweise, in der die Option als Versicherung gegen Bonitätsverschlechterung zu sehen ist. Dann kann als Preis der erwartete Verlust plus Sicherheitsaufschlag verlangt werden. In diesem Fall ist zu kären, wie eine für die Bank subjektive Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Spread zu modellieren ist.
Wie anfangs erwähnt, beinhaltet eine Liquiditätsoption das Recht, am Ende eines jeden Monats die unwiderrufliche Kreditzusage zu beanspruchen. Dies bedeutet im nichtrevolvierendem Fall,

daß die Kreditzusage der amerikanischen Version des obigen Derivates mit Laufzeit $T$ Monaten entspricht. Im revolvierenden Fall kann sie als Summe von europäischen Optionen angesehen werden, wobei jeder Monat als Ausübungszeitpunkt mit Ausübungsbetrag $f((S(t_k) - s_k)^+)$ auftritt. Wir sehen also, daß dies keine prinzipielle Erschwerung des Problems ist.

# 4 Portfoliomerkmale

Neben der einzelvertraglichen Sichtweise ist eine Betrachtung aus Sicht des Gesamtportfolios an Liquiditätsoptionen wichtig, da Risikofaktoren simultan auf das Gesamtportfolio bzw. Teile des Portfolios wirken. Für eine Bewertung ist das Erkennen der entscheidenen Risikotreiber von essentieller Bedeutung.
Merkmale, nach denen Verträge im Portfolio differenziert werden, sind die Branche, in der das Unternehmen tätig ist, das Land, in dem es seinen Sitz hat, die Region, in der es operiert, die Kundengruppe, zu der es bei der HSH Nordbank eingestuft ist und das interne Eingangsrating, mit der es bei der HSH Nordbank geführt wird. In der Diskussion mit den Mitarbeitern der HSH Nordbank hat sich ergeben, daß es im wesentlichen vier verschiedene Gründe gibt, die zu einer unwiderruflichen Kreditzusage führen. Dies sind

- Projektfinanzierung: Hier steht die Liquiditätsoption in engem Zusammenhang mit einer Projektfinanzierung, etwa Schiffs- oder Hausbau, so daß ein Ausüben der Option mit hoher Wahrscheinlichkeit erfolgt. Unsicher sind die Zeitpunkte, an denen Liquidität angefordert wird.

- Finanzlinien: Dies sind Kreditlinien, die Unternehmen eingeräumt werden zur Finanzierung von kurzfristigen Liquiditätsengpässen, vergleichbar mit dem Überziehungskredit eines privaten Girokontos. Hier kann man davon ausgehen, daß eine Ausübung nur mit geringer Wahrscheinlichkeit stattfindet und im wesentlichen vom Geschäftsverlauf des Unternehmens abhängt.

- SPV: Dies sind Kreditlinien, die an Special Purpose Vehicle (SPV) gegeben werden. Diese SPV sind Kapitalgesellschaften, die besonders eng mit der HSH Nordbank verflochten sind. Der Anteil im Gesamtportfolio ist hoch, so daß eine differenzierte Betrachtung der SPV Sinn macht. Die Ausübungswahrscheinlichkeit ist eher gering und hängt im wesentlichen von der Entwicklung auf den Kapitalmärkten ab.

- Showlinie: Dies sind Kreditlinien, die an andere Banken vergeben werden, um aufsichtsrechtliche Bedingungen zu erfüllen. Das Anfordern von Liquidität wird hier nur mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit erfolgen.

Zusammenfassend ergibt sich folgende Tabelle von Merkmalen und deren Ausprägungen.

| Merkmal | Ausprägung |
|---|---|
| Branche | Schiffbau, Immobilien, Finanzinstitute, sonstiges |
| Land | die verschiedenen möglichen Länder |
| Region | weltweit, Eurozone, Deutschland, Amerika, Asiatisch Pazifischer Raum |
| Kundengruppe | Transportation, Corporates, Shipping, Real Estate, |
| | Savings Banks, Lease Finance, Global Markets, Nordic Corporates |
| Rating | interne Ratingklassen |
| Grund | Projekt, Finanzlinie, SPV, Showlinie |

# 5 Cashflow Simulation

Im folgenden wollen wir stochastische Modelle vorstellen, die den Cashflow der abgerufenen Liquidität für die vier Arten von Liquiditätsoptionen beschreiben.

## 5.1 Projektfinanzierzung

Eine unwiderrufliche Kreditzusage in Höhe eines Nominalwertes $N$ soll über eine Laufzeit von $T$ Monaten benutzt werden, um eine Investition zu finanzieren. Die Vorstellung ist die, daß der Nominalbetrag mit hoher Wahrscheinlichkeit angefordert wird, wobei die Zeitpunkte bzw. die Verteilung des Betrages über die Laufzeit zufällig sind. Unser Modellansatz kann daher folgendermaßen beschrieben werden: Am Ende eines jeden $t$-ten Monats steht ein gewisser maximaler Betrag $M(t)$ zur Verfügung, der als Liquidität angefordert werden kann. Risikoindikatoren legen fest, welcher Anteil $A(t) \in [0, 1]$ tatsächlich insgesamt abgerufen werden soll. Die Verteilung über die Restlaufzeit wird dann über ein Auszahlungsprofil gesteuert, das die tatsächliche für die nächste Periode abgerufene Liquidität $L(t + 1) = F(A(t) \cdot M(t), T - t)$ bestimmt. Schießlich wird der maximale Betrag für die nächste Periode adjustiert. Man erhält so das folgende rekursive Schema für einen nichtrevolvierenden Vertrag:

$$\begin{aligned} M(0) = N \quad &, \quad L(1) = F(A(0)M(0), T) \\ M(t) = M(t-1) - L(t) \quad &, \quad L(t+1) = F(A(t)M(t), T-t) \end{aligned}$$

Für einen revolvierenden Vertrag wird der maximal zur Verfügung stehende Betrag nicht adjustiert, so daß also $M(t) = N$ gesetzt wird für jeden Monat. Beispiele für mögliche Auszahlungsprofile eines Betrages $B$ auf eine Laufzeit $t$ sind:

- gleichförmige Verteilung: $F(B, t) = \frac{B}{t}$,
- linear abwärts: $F(B, t) = 2\frac{B}{t+1}$,
- degressiver Abfall: $F(B, t) = \frac{Br}{(1+r)^t-1}(1 + r)^{t-1}$,
- voller Betrag: $F(B, t) = B$.

Welches Profil im Modell benutzt werden sollte, kann durch Expertenwissen nebst einer empirische Betrachtung vergangener Projektfinanzierungen bestimmt werden. Zu vermuten ist, daß eine branchenspezifische Abhängigkeit zu erkennen ist.
Das Modell kann noch flexibler gestaltet werden, wenn nach jedem Monat das Auszahlungsprofil zufällig gewählt wird. Dadurch können Einflüsse von Risikotreibern auf die Wahl des Auszahlungsprofils ins Modell aufgenommen werden.
Man beachte, daß der durch dieses Modell verursachte Cashflow an abgerufener Liquidiät im wesentlichen durch die stochastische Entwicklung des Anteilsprozesses bestimmt wird, der seinerseits durch Risikofaktoren gesteuert wird.

## 5.2 Finanzlinie

In diesem Fall wird ein Unternehmen eine gewährte Kreditlinie dazu benutzen, Liquiditätsengpässe auszugleichen. Wir gehen davon aus, daß dies nur mit geringer Wahrscheinlichkeit geschieht und im Ausübungsfalle der volle Betrag angefordert wird. Bei der Modellierung können wir obiges Modell benutzen und geeignet simplifizieren, indem wir annehmen, daß der Anteil $A(t)$ immer nur zufällig die Werte $0$ und $1$ annehmen kann. Es ergibt sich folgendes rekursive Schema für einen nichtrevolvierenden Vertrag bei Nominalbetrag $N$ und Laufzeit $T$ Monaten.

$$\begin{aligned} M(0) &= N \quad , \quad L(1) = A(0)M(0) \\ M(t) &= M(t-1) - L(t) \quad , \quad L(t+1) = A(t)M(t) \quad . \end{aligned}$$

Zu bemerken ist, daß dieses Modell äquivalent beschrieben werden kann durch die zufällige Auszahlung $N1_{\{\tau \leq T\}}$ wobei

$$\tau = \inf\{t : A(t) = 1\}$$

für den zufälligen Zeitpunkt der Ausübung der Option steht.
Revolvierende Vertragstypen erscheinen hier nicht sinnvoll zu sein.

## 5.3 SPV

Hier kann das gleiche Vorgehen wir bei der Finanzlinie angewendet werden. Zu beachten ist allerdings, daß andere Risikotreiber auf den Anteilsprozeß wirken.

## 5.4 Showlinie

Auch hier kann das Modell der Finanzlinie benutzt werden, wobei darauf zu achten ist, daß nur mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit am Ende eines Monats Liquidität abgefordert wird.

## 5.5 Migrationsmodell

Wir erkennen, daß die obigen Modelle die gleiche Struktur besitzen und die stochastische Entwicklung des Anteilsprozesses durch Risikoindikatoren gesteuert wird. Um zu einem endgülti-

gen Simulationsmodell zu kommen, muß also die Entwicklung der Risikofaktoren spezifiziert werden.
Als ersten Ansatz stellen wir ein zu Credit-Metrics analoges Modell vor, daß allerdings noch keine Differenzierung nach Risikoindikatoren aufweist. Wie schon vorher erwähnt gehen wir davon aus, daß ein Unternehmen in einer von $N$ Bonitätsklassen enthalten ist, die der Menge von Spreads $E = \{s_1, \cdots, s_n\}$ entsprechen. Die zufällige Bonitätsentwicklung modellieren wir durch eine Markov-Kette $(S(t))_{t=0,\cdots,T}$ auf der Menge der Spreads $E$ bestimmt durch eine Migrationsmatrix $\mathbf{P} = (p_{i,j})_{i,j\in\{1,\cdots,N\}}$. Es gilt also

$$P(S(t) = s_j | S(t-1) = s_i) = p_{i,j} \quad i, j \in \{1, \cdots, N\}.$$

Als Migrationsmatrix könnte man die von Credit-Metrics verwandte geeignet modifizieren und übernehmen.
Aus der Entwicklung der Spreads kann dann ein Anteilsprozeß $A(t)$ gewonnen werden mittels

$$A(t) = H(t)1_{\{D(t)=1\}}, \tag{1}$$

Hierbei gibt $D(t)$ an, ob es zu einer Optionsausübung nach $t$ Perioden kommt. Dies wird dann geschehen, wenn die Bonitätsentwicklung für das Unternehmen unvorteilhaft ist, wenn also $S(t) > s_k$ ist. Wir erinnern, daß $s_k$ den im Vertrag spezifizierten Spread bezeichnet, zu dem das Unternehmen Kapital beziehen kann. Im Fall der Projektfinanzierung ist es sinnvoll, auch von einer Ausübung auszugehen, wenn der realisierte Spread $S(t) = s_k$ gilt. Nur bei einer vorteilhaften Entwicklung des Unternehmens, wenn also $S(t) < s_k$ gilt, wird Fremdkapital auf dem Kapitalmarkt finanziert. Die Höhe $H(t)$ des Anteils kann bei der Projektfinanzierung als zufällige Größe aus $[0, 1]$ modelliert werden. Bei den anderen Arten von Kreditzusagen wird $H(t) = 1$ gesetzt, da wir dann davon ausgehen, daß der Gesamtbetrag an zur Verfügung stehender Liquidität angefordert wird.

## 5.6 Risikostufenmodell

Hier wird das Migrationsmodell erweitert, indem eine differenzierte Abhängigkeit von Risikofaktoren modelliert wird. Wir betrachten hierzu $K$ verschiedene makroökonomische Risikofaktoren und nehmen an, daß diese jeweils $2M + 1$ Ausprägungen von $-M$ bis $M$ besitzen. Die zufällige stochastische Entwicklung dieser Risikofaktoren $(R(t))_{t=0,\cdots,T}$ wird modelliert als $K$-dimensionale Markov-Kette mit Zustandsraum $F^K$ , wobei $F = \{-M, \cdots, M\}$ die Menge der Risikofaktorausprägungen bezeichnet. Für jeden Vertrag wird individuell durch Gewichtsvektoren $\gamma \in [0, 1]^K$ der Einfluß der Risikofaktoren festgesetzt, indem man einen Risikoindikator

$$\rho(t) = \sum_{i=1}^{K} \gamma_i R_i(t) \in [-M, M]$$

bestimmt. Schließlich wird aus dem Risikoindikator ein Spread gebildet durch Anwenden der Funktion

$$f : [-M, M] \to \{1, \cdots, N\}; x \mapsto \sum_{j=1}^{N} s_j 1_{I_j}(x)$$

mit $I_j = [-M + (j-1)h, -M + jh), h = \frac{2M}{N}$.
Insgesamt gesehen erhält man also ein Modell für die Entwicklung des Spreads für jeden einzelnen Vertrag mittels

$$S(t) = f(\rho(t)) = f(\sum_{i=1}^{K} \gamma_i R_i(t))$$

und kann daraus den Anteil $A(t)$ entsprechend (1) bestimmen.
Dieses Modell kann man erweitern, indem zusätzlich für jeden Vertrag aus dem Portfolio ein unternehmensspezifischer Risikofaktor hinzugenommen wird. Dies führt zu einer eindimensionalen Markovkette $(U(t))$ unabhängig von $(R(t))$ und einer Risikoindikatorentwicklung

$$\rho(t) = \sum_{i=1}^{K} \gamma_i R_i(t) + \beta U(t).$$

mit $\beta = 1 - \sum_{i=1}^{K} \gamma_i$.

## 5.7 Durchführung der Simulation

Wir haben das Risikostufenmodell für ein homogenes Portfolio implementiert, um eine Cashflow-Simulation für einen Zeitraum von 12 Monaten zu erstellen. Das erste Ziel besteht darin, die wesentlichen Einflußgrößen auf den Cashflow zu erkennen und deren Wirkung zu illustrieren. Hierzu haben wir das Modell aus 5.6 angewendet auf die Situation, daß allen Verträge im homogenen Portfolio eine unwiderrufliche Kreditzusage aufgrund einer Finanzlinie eingeräumt wird. Wir unterscheiden zwei Effekte, die das Ausüben der Kreditzusage beeinflußen. Zum einen ist es ein makroökonomischer Faktor, der auf alle Verträge des homogenen Portfolios simultan wirkt, zum anderen wird die unternehmensspezifische Entwicklung subsummiert in eine vertragsspezifische Einflußgröße. Modelliert wird dies durch unabhängige Random-Walks

$$\begin{aligned} R(t) &= \sum_{s=1}^{t} X_s \quad , R(0) = 0, \quad , t = 1, \cdots, T \\ R_i(t) &= \sum_{s=1}^{t} X_s^{(i)} \quad , R_i(0) = 0, \quad , t = 1, \cdots, T, i = 1, \cdots, N \end{aligned} \tag{2}$$

Während der Random Walk $(R(t)_{t=1\cdots T})$ die gesamtwirtschaftliche makroökonomische Entwicklung beschreibt, die auf das gesamte Portfolio wirkt, steht $(R_i(t))$ für die Entwicklung des $i$-ten Unternehmens. Für eine Simulation ist die Zuwachsverteilung der $X_s$ bzw. $X_s^{(i)}$ zu spezifizieren. Im vereinfachten Modell wollen wir die drei mögliche Szenarien down, neutral, up darstellen durch die folgenden Zuwachsverteilungen:

| **Szenario** | **-2** | **-1** | **0** | **1** | **2** |
|---|---|---|---|---|---|
| down | 0.009 | 0.06 | 0.88 | 0.05 | 0.001 |
| neutral | 0.001 | 0.049 | 0.9 | 0.049 | 0.001 |
| up | 0.001 | 0.05 | 0.88 | 0.06 | 0.009 |

Wir erkennen, daß bei allen Szenarien eine große Wahrscheinlichkeit besteht, im vorhandenen Zustand zu verharren. Im neutralen Fall haben wir eine symmetrische mögliche Änderung in positiver und negativer Richtung. Im down Fall wird die negative Richtung ein wenig stärker akzentuiert, entsprechend im up Fall eine positive Entwicklung. Die Vorstellung ist, daß die Zustände der Random-Walks Bonitätseinschätzungen entsprechen; ein Abwärtssprung ist dabei als Verschlechterung, ein Aufwärtssprung als Verbesserung, zu interpretieren. Die Bonitätsklasse des Unternehmens nach $t$ Monaten ergibt sich dann durch eine Überlagerung der beiden obigen Effekte, also z.B. durch eine gewichtete Summe der Form.

$$\rho_i(t) = \gamma_i R_i(t) + (1 - \gamma_i) R(t) \tag{3}$$

Die Zahl $\gamma_i \in (0, 1)$ legt das Gewicht des unternehmensspezifischen Einflußes fest, wobei wir bei der vereinfachten Analyse im gesamten homogenen Portfolio von einem konstanten Gewicht ausgehen.
Die Liquiditätsoption des $i$-ten Vertrages wird dann ausgeübt, wenn die Bonitätsklasse des Unternehmens innerhalb der Laufzeit einen gewissen Schwellenwert $s_i$ unterschreitet. Dies ist also der Fall, wenn

$$\tau_i = \inf\{t > 0 : \rho_i(t) < s_i\} \leq T$$

vorliegt. Hierbei gibt $\tau_i$ den Monat an, an dem die Option ausgeübt wird. Für uns von Interesse ist zunächst die Gesamtanzahl von ausgeübten Optionen im Portfolio aus $n = 60$ Verträgen im betrachteten Zeitbereich von $T$ Monaten, die wir durch die Zufallsgröße

$$Z = \sum_{i=1}^{n} 1_{\{\tau_i \leq T\}} \tag{4}$$

beschreiben können. Der dadurch innerhalb von $T$ Monaten verursachte Gesamtcashflow Abfluß ergibt sich dann durch

$$C = \sum_{i=1}^{n} N_i 1_{\{\tau_i \leq T\}} \quad . \tag{5}$$

In der durchgeführten Simulation wollen wir die Einflüsse der Modellparameter auf die Verteilung der Gesamtanzahl $Z$ bzw. des Gesamtcashflows $C$ untersuchen.

### 5.7.1 Ergebnisse

Bei einem Gewicht $\gamma = 0.5$, einer Schwellenbonität $s = -2$ und einem makroökonmischen Effekt neutral wollen wir zunächst den Einfluß des unternehmensspezifischen Effektes auf die Gesamtanzahlverteilung an ausgeübten Optionen untersuchen, indem wir für die drei möglichen Szenarien neutral, down, up eine Simulation durchführen zur näherungsweisen Ermittlung der Gesamtanzahlverteilung. Szenario down bedeutet also, daß jedes Unternehmen unabhängig voneinander eine Entwicklung der unternehmensspezifischen Bonität entsprechend eines down gerichteten Random-Walks erfährt. Die Ergebnisse der Simulation sind in der Datei Ergebnis-DriftNeutral.xls abgespeichert.

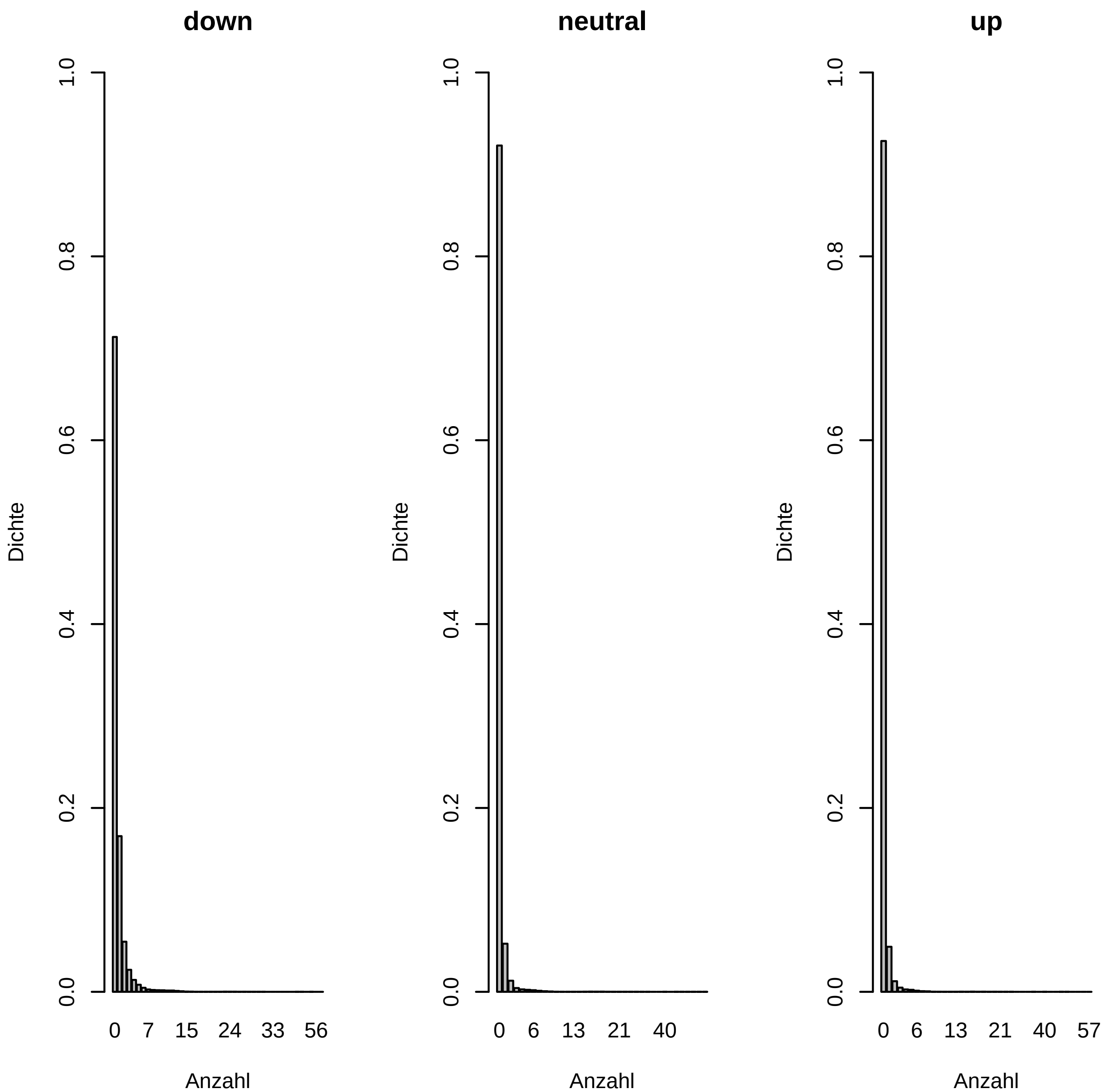


Abbildung 1: Wirkung des unternehmensspezifischen Effektes

Betrachten wir den Plot der Anzahlverteilung, siehe Abb. 1, erkennen wir, daß bei allen drei möglichen Szenarien die Wahrscheinlichkeit, daß keine Option im Portfolio ausgeübt wird, sehr stark dominiert. Aus der Graphik sind eigentlich keine Unterschiede im neutral und up Fall zu erkennen. Ein up wärts gerichteter Effekt hat also kaum einen positiven Einfluß auf die Anzahlverteilung. Anders ist die Wirkung des down Szenarios. Hier sieht man in der Graphik, daß die Verteilung nach rechts verschoben wird. Bestätigt wird dies durch die Kennzahlen. Im down Fall haben wir einen knapp vierfach höheren Erwartungswert als im neutralen und up Fall. Dies unterstreicht die Asymmetrie des Problems. Eine nur geringfügige Verschlechterung des unternehmensspezifischen Faktors hat eine nicht zu vernachlässigende Wirkung, während eine geringfügige Verbesserung kaum einen Effekt verursacht. Bestätigt wird dies auch durch den Value at Risk, der im down Fall wesentlich größer ist als im neutral und up Fall. Zu erwähnen ist, daß die Schwankung um den Mittelwert sehr groß ist.

| **Kennzahl** | **down** | **neutral** | **up** |
|---|---|---|---|
| mean | $0.64$ | $0.18$ | $0.16$ |
| std.deviation | $1.85$ | $1.15$ | $1.07$ |
| $0.99$ quantile | $9$ | $4$ | $3$ |

Interessant ist auch die Focusierung in den Bereich der kleinen Wahrscheinlichkeiten, siehe Abb. 2, die hier gezeigt wird für den Fall, daß der down Fall sowohl für den spezifischen als auch makroökonomischen Effekt vorliegt. Wir erkennen, daß die Gesamtanzahlverteilung zumindest drei Gipfel besitzt. Diese liegen bei $0, 24, 47$ und sind dadurch zu erklären, daß die Verteilung eine Mischungsverteilung ist. Dies unterstreicht die Abhängigkeit von der Entwicklung des makroökonomischen Faktors.
Von der Art ähnliche Plots erhalten wir, wenn die Schwellenbonität heraufgesetzt wird. Dann wird das Unterschreiten der Schwelle wahrscheinlicher und die Verteilung wird stärker nach rechts verschoben, siehe Abb. 3, 4.
Bestätigt wird dies auch durch die Kennzahlen, die in der Datei Ergebnisneutral.xls abgespeichert sind.

| **Kennzahl** | **down** | **neutral** | **up** |
|---|---|---|---|
| mean | $6.51$ | $3.50$ | $3.19$ |
| std.deviation | $8.33$ | $7.22$ | $6.54$ |
| $0.99$ quantile | $46$ | $44$ | $39$ |

Wichtig ist die Abhängigkeit vom Gewichtsprameter. Für verschiedene Kombinationen von makro- und unternehmensspezifischen Effekten wurde das Gewicht in den Ausprägungen $1, 0.5, 0$ untersucht. Dabei bedeutet Gewicht $1$ das alleinigie Vorliegen von unternehmensspezifischen Einflüßen und Gewicht $0$ das alleinige des makroökonomischen Faktors. Im verbleibenden dritten Fall wird eine Gleichgewichtung zwischen beiden Effekten modelliert.
Wir erkennen in der Abb. 5, daß die Anzahlverteilung sehr stark vom Gewicht abhängt. Bei Gewicht $1$ liegt eine Binomialverteilung für $60$ Erfolgsversuche vor, während bei Gewicht $0$ ein

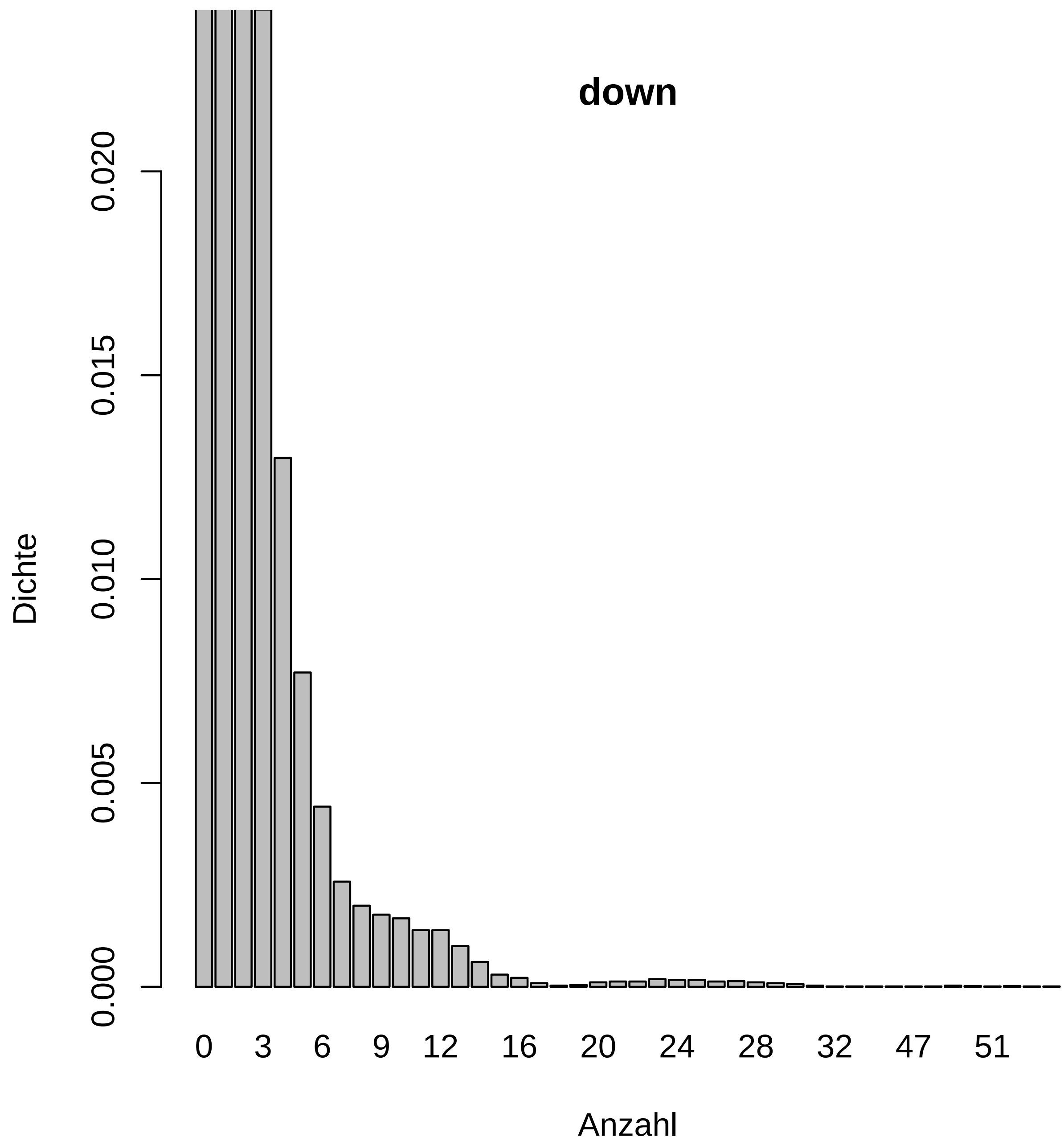


Abbildung 2: Struktur der Verteilung

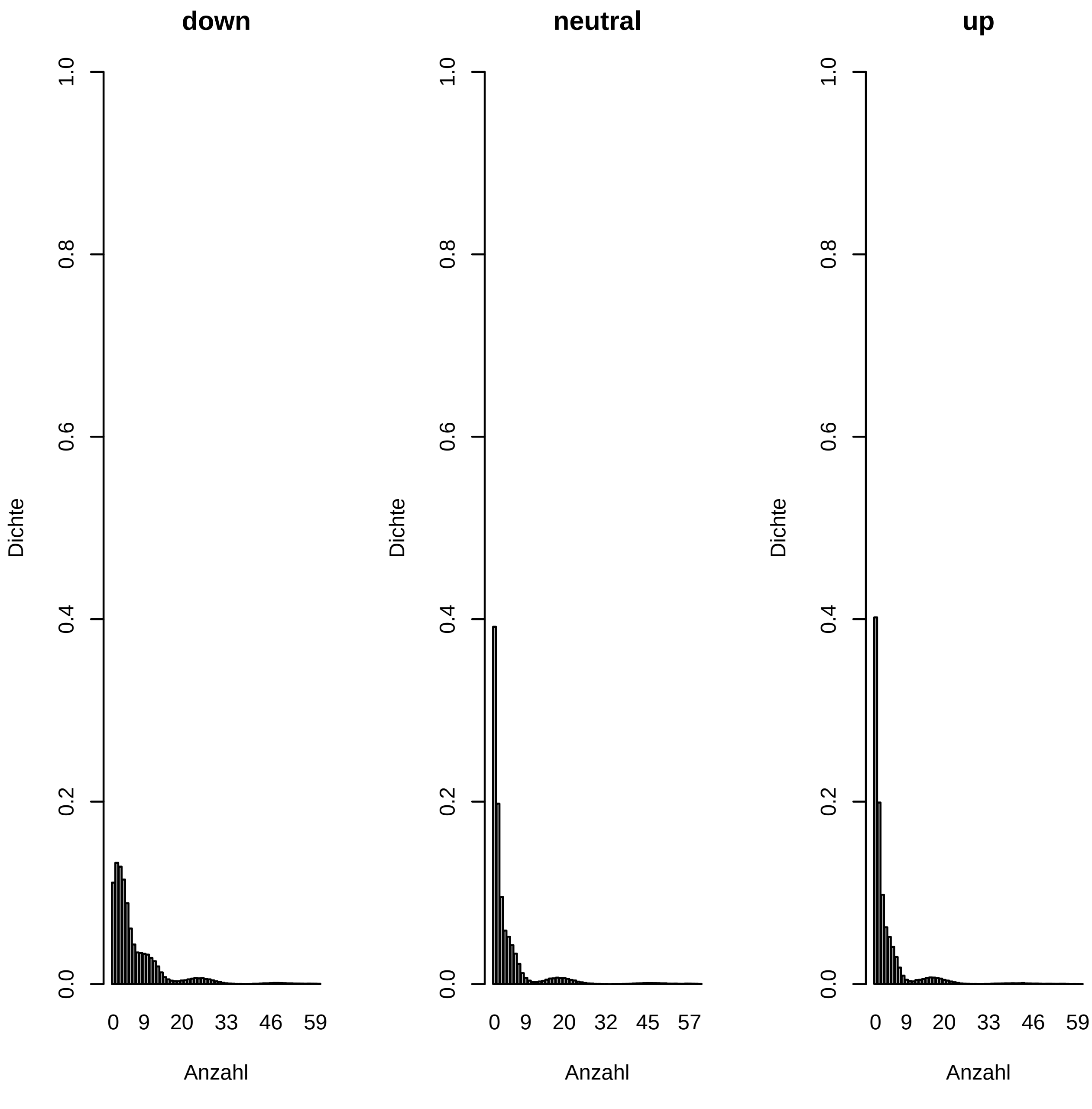


Abbildung 3: Unternehmensspezifischer Effekt bei heraufgesetzter Schwellenbonität

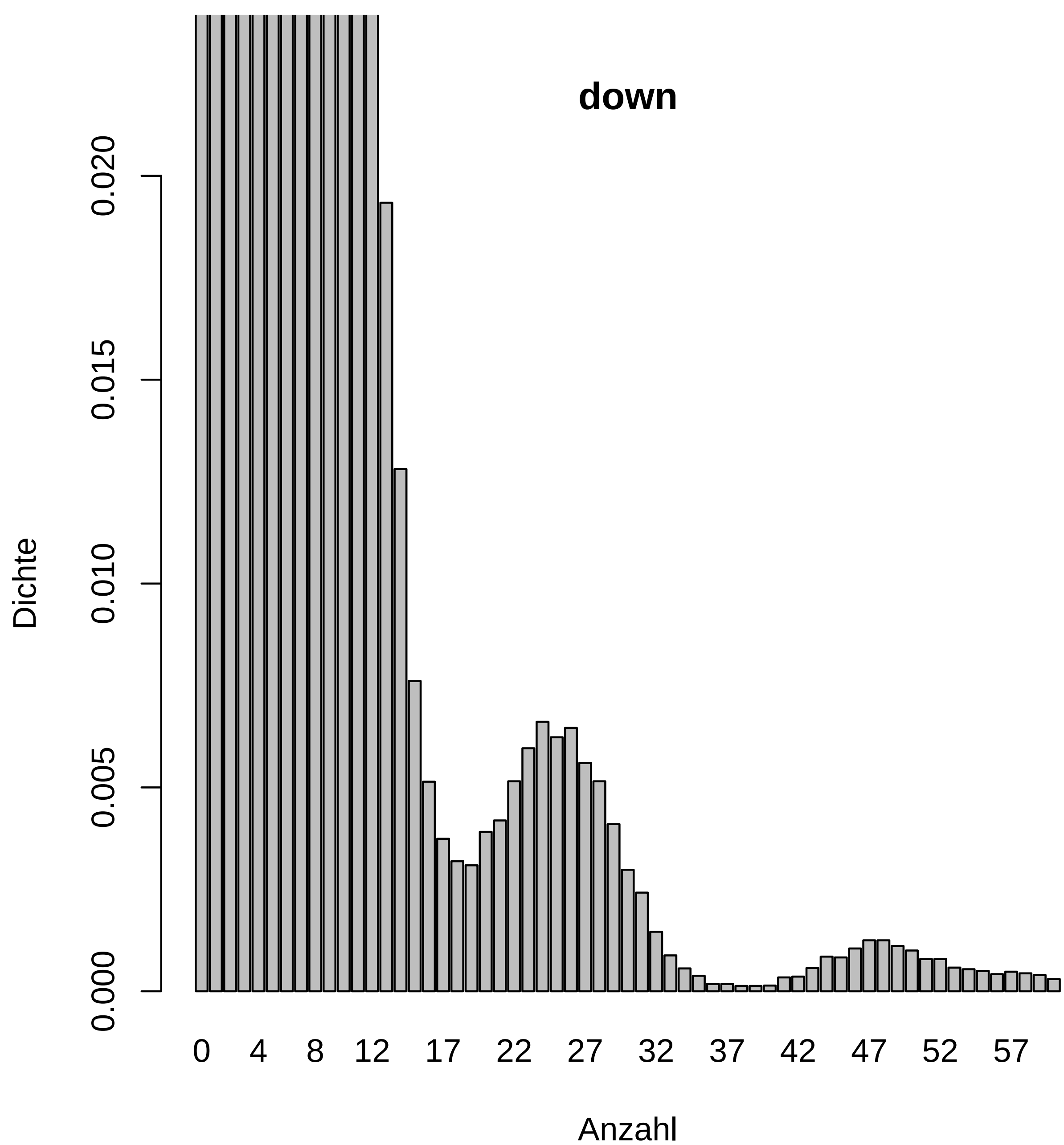


Abbildung 4: Struktur der Verteilung

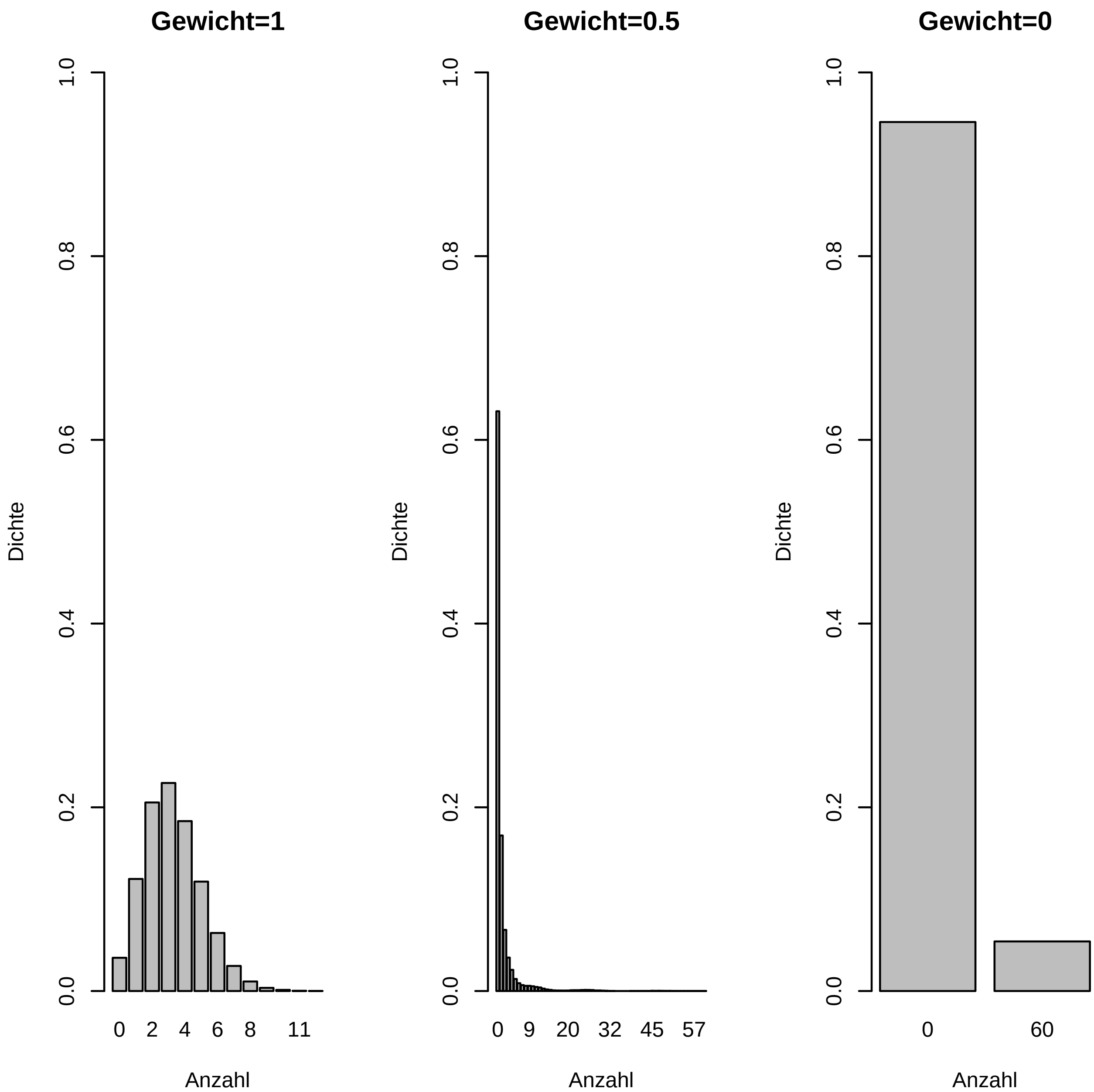


Abbildung 5: Wirkung des Gewichtsparameters

einzelnes $0-1$ Experiment festlegt, ob alle Verträge im Portfolio ausfallen oder nicht. Bei Gewicht $0.5$ ergibt sich eine Mischungsverteilung, deren Form schon am Anfang diskutiert wurde. Dieses sehr unterschiedliche Verhalten spiegelt sich auch in den Kennzahlen wider.

| **Kennzahl** | **1** | **0.5** | **0** |
|---|---|---|---|
| mean | 3.25 | 1.42 | 3.24 |
| std.deviation | 1.76 | 4.2 | 13.56 |
| 0.99 quantile | 8 | 23 | 60 |

Zu bemerken ist, daß in beiden Extremfällen in etwa der gleiche Mittelwert vorliegt, aber bei sehr unterschiedlichen Standardabweichungen.
Zusammenfassend stellen wir fest, daß das Modell den heuristischen qualitativen Forderungen erfüllt:

- Eine Verbesserung des unternehmensspezifischen Effektes führt zu einer Erniedrigung der Anzahl an ausgeübten Kreditzusagen, eine Verschlechterung zu einer Erhöhung.
- Entsprechendes gilt für den makroökonomischen Effekt.
- Eine Erhöhung der Schwellenbonität führt zu einer Erhöhung der Wahrscheinlichkeit der Optionsausübung, was zu einer Erhöhung der Gesamtanzahl an ausgeübten Optionen im Portfolio führt.
- Die Verteilung der Gesamtanzahl an ausgeübten Optionen im Portfolio ist eine Mischungsverteilung.
- Je höher das Gewicht des makroökonomischen Effektes, desto unsicherer ist die Anzahl an ausgeübten Optionen. Im Extremfall entscheidet ein Münzwurf, ob alle Zusagen ausgeübt werden oder nicht.

### 5.7.2 Ausblicke

Das bislang entwickelte Modell ist zu einfach und könnte folgendermaßen verbessert werden.

- **Verfeinerte Diskretisierung in der Zeit und in den Bonitätsklassen:** Statt einer monatlichen Betrachtung, kann auch im Modell eine tägliche benutzt werden. Dies führt zu einer Verfeinerung von 12 Perioden im Jahr zu 250 oder 360. Entsprechend sollten dann auch die Bonitätsklassen geeignet modifiziert werden. Im Grenzfall könnte man statt eines diskreten Random-Walks einen stetigen Wiener-Prozeß mit Drift zur Modellierung der Entwicklung der Spreads benutzen.
- **Übergang zu mean reverting Markov-Ketten** Anstelle von Random-Walks erscheint es sinnvoll, mean reverting Markov-Ketten zu verwenden. Diese zeichnen sich dadurch aus, daß die Sprungwahrscheinlichkeiten vom gegenwärtigen Zustand abhängen. Diese sollten

so gewählt werden, daß die Markov-Kette tendenziell zu einem mittleren Zustand zurückkehrt. Als Grenzprozeß bei Verfeinerung ergibt sich hier der Orenstein-Uhlenbeck Prozeß, der im Vasicek Modell für Zinsraten eine wichtige Rolle spielt.

- **Kalibrierung:** Allen Modellen gemein ist das Problem der Kalibrierung. Wie können die Parameter gewählt werden, so daß das Modell die Daten gut erklärt. Hier ist zu klären, was für Daten zur Verfügung stehhen und wie diese zu einer Modellkalibrierung benutzt werden können.

# Literatur


[1] R.L. Shockley, A.V. Thakor; Bank Loan Commitment Contracts: Data, Theory, and Tests, Journal of Money, Credit and Banking Vol. 29 No 4 Nov. 1997