# Finanzmathematik

Steffen Schwarz

6. Februar 2017, Münster

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Informelle Einführung

Zweiteilung von Finanzgütern in

1. Basisfinanzgüter
2. derivative Finanzgüter

Zu 1. gehören zB
-Aktien
-festverzinsliche Wertpapiere
  Bonds
-Rohstoffe
  Öl
  Edelmetalle
  Agrarprodukte

Diese werden gehandelt auf

$$\left.\begin{array}{r}\text{Aktienmärkte}\\ \text{Rentenmärkte}\\ \text{Warenmärkte}\end{array}\right\}\quad \text{Kassamärkte}$$

Zu 2. gehören zB
-Optionen auf Aktien
-Swaps (Zinsderivat)
-futures
-forwards

## 1.1 Option

Unterscheidung in Kauf- und Verkaufsoptionen:
Eine Kaufoption (**Call**) gibt das Recht, ein Basisfinanzgut (**Underlying**) zu einem im voraus bestimmten fixen Preis, dem Ausübungspreis (**strike, Basis**), während (amerikanische Option) oder am Ende der Laufzeit (europäische Option) der Option zu **kaufen**.

Eine Verkaufsoption (**Put**) gibt das Recht, ein Basisgut zu einem im voraus bestimmten Preis, während (USA) oder am Ende der Laufzeit (EU) der Option zu **verkaufen**.

Eine Option ist ein **unbedingtes Termingeschäft**, da keine Verpflichtung zum Kauf bzw. Verkauf besteht.

## 1.2 long, short Position

In der Regel geht der Läufer eines Finanzgutes eine **long Position** ein, ein Verkäufer eine **short Position** ein, etwa

long call $\hat{=}$ Käufer eines Calls, Callinhaber

short call $\hat{=}$ Verkäufer eines Calls, Stillhalter(/writer/Zeichner)

long put $\hat{=}$ Käufer einer Verkaufsoption, Putinhaber

short put $\hat{=}$ Verkäufer einer Verkaufsoption, Put Stillhalter (/writer)

long Aktie $\hat{=}$ Käufer einer Aktie, Aktienbesitzer

short Aktie $\hat{=}$ Verkäufer einer Aktie

Durch einen **Leerverkauf** (shortselling) kann ein Basisgut, etwa Aktien, verkauft werden, ohne, dass man dieses vorher besitzen muss.
Hierzu leiht man sich das Basisgut von einer Bank und verkauft dieses.

## 1.3 Payoff- und Profitdiagramme

Positionen in Finanzgütern bergen Chancen und Risiken. Veranschaulichungen durch Payoff- und Profitdiagrammen.
Payoff: Aufgetragen wird der Wert der Position gegen den Preis des Underlyings
Profit: analog zum Payoff unter Berücksichtigung von Kosten ($\hat{=}$ Anfangswert der Position)

## 1.4 Beispiele:

Option mit Laufzeit $T$, Underlying mit Preis $S_T$ in $T$.

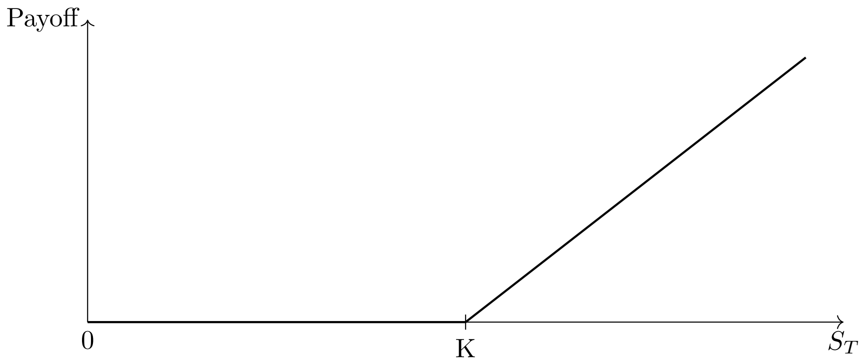
a) long call mit strike $K$
Payoff: $(S_T - K)^+$, denn

$S_T \leq K$: Keine Ausübung

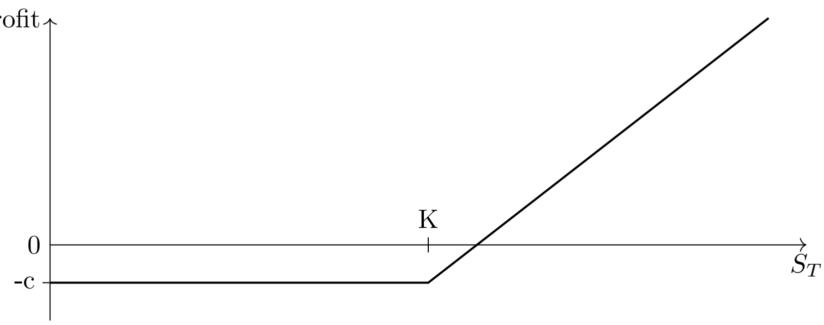
$S_T > K$:

- leihe $K$ Euro
- Nutze diese Option, um 1 Aktie zu erhalten
- Verkaufe diese für $S_T$ Euro
- Zahle $K$ Euro zurück

Insgesamt: $S_T - K$ Euro als Auszahlung




Kosten: Anfangspreis des Calls: $c > 0$
Profit: $(S_T - K)^+ - c$



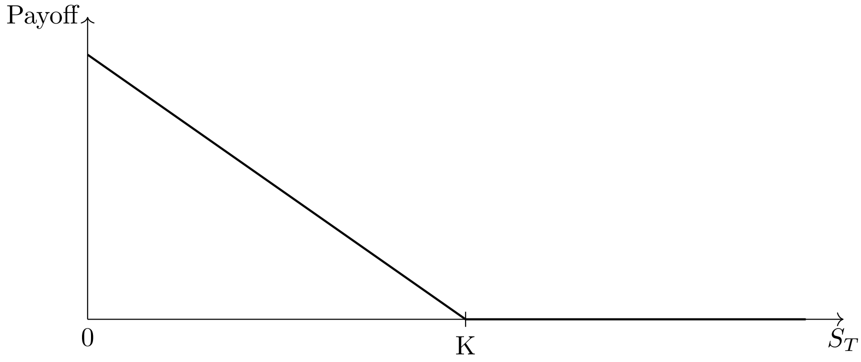

b) long put mit strike $K$
Payoff: $(K - S_T)^+$, denn

$S_T > K$: Keine Ausübung

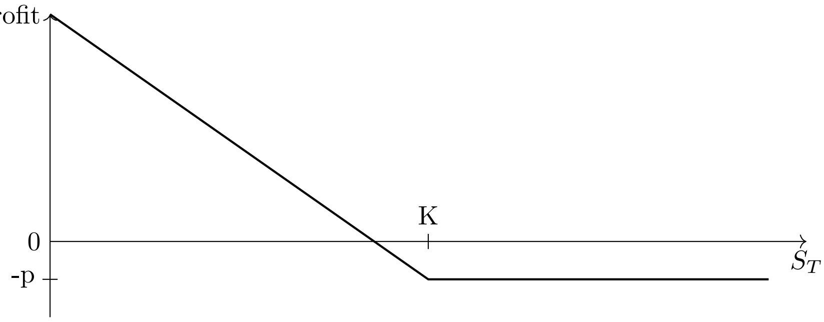
$S_T \leq K$:

- leihe die Aktie
- Nutze diese Option und verkaufe die Aktie zum Kurs von $K$
- Kaufe die Aktie für $S_T$ und gebe diese zurück

Insgesamt: $K - S_T$ Euro als Payoff



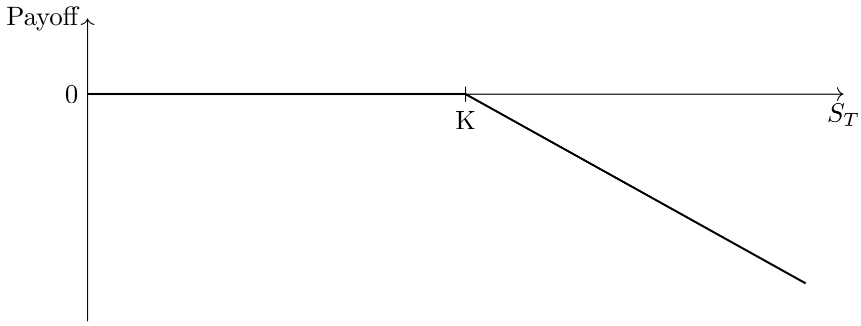

Kosten: Anfangspreis des Puts: $p > 0$
Profit: $(S_T - K)^+ - c$

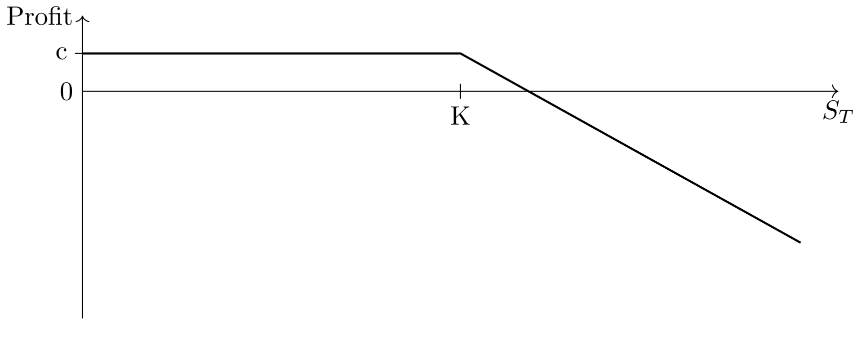



c) short call mit strike $K$

Payoff: $-(S_T - K)^+$

Profit: $c - (S_T - K)^+$

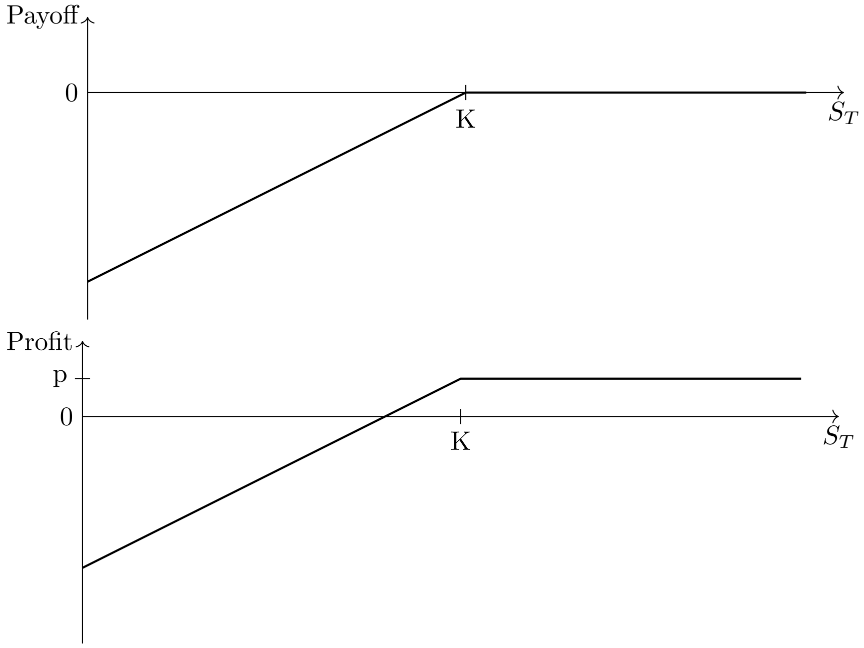



d) short put mit strike $K$

Payoff: $-(K - S_T)^+$

Profit: $p - (K - S_T)^+$




## 1.5 Strategien

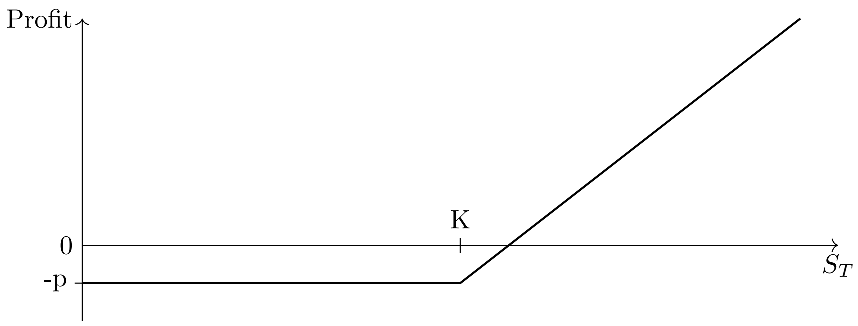
Durch Kombination von einfachen Positionen bildet man Strategien.

## 1.6 Beispiele:

a) Absicherung einer Aktie:

- Aktie heute zum Kurs $S_0 = K$ gekauft
- zur Absicherung gegen Kursverlust in $T$ wird eine Putoption zur Basis $K$ gekauft.
- Gesamtposition:

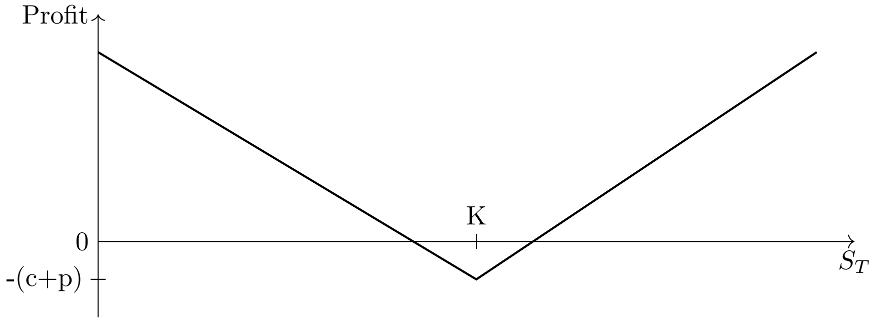
| | long Aktie | long put | Gesamt |
|---|---|---|---|
| Kosten | $K$ | $p$ | $K + p$ |
| Payoff | $S_T$ | $(K - S_T)^+$ | $S_T + (K - S_T)^+ = \max(K, S_T)$ |
| Profit | $S_T - K$ | $(K - S_T)^+ - p$ | $S_T - K + (K - S_T)^+ - p = -p\mathbb{1}_{\{S_T \leq K\}} + (S_T - (K + p))\mathbb{1}_{\{S_T > K\}}$ |




b) long straddle

Idee: Spekulation auf eine starke Kursänderung (egal ob nach oben und unten):

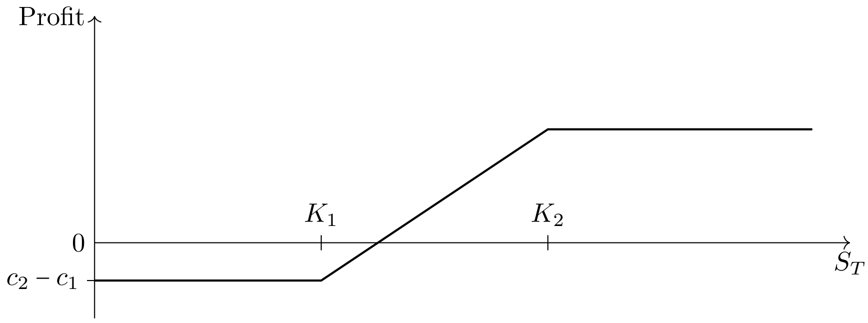
| | long call | long put | Gesamt |
|---|---|---|---|
| Kosten | $c$ | $p$ | $c + p$ |
| Payoff | $(S_T - K)^+$ | $(K - S_T)^+$ | $\lvert S_T - K\rvert$ |
| Profit | $\lvert S_T - K\rvert - (c + p)$ | | |




c) Bullish Vertical Spread

Idee: Risikoarme Spekulation auf ein Anziehen des Kurses:

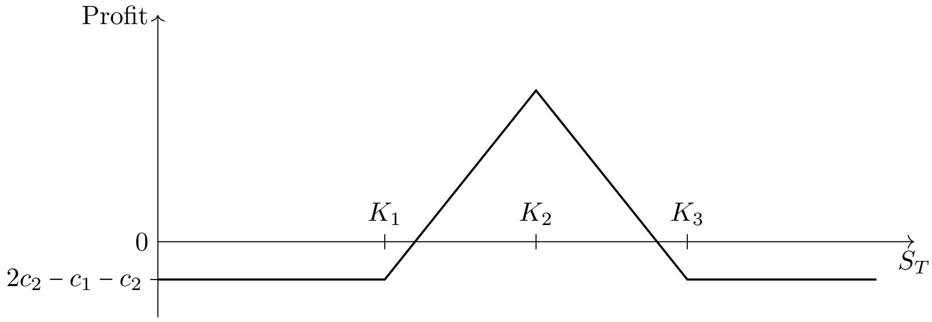
| | long call (strike $K_1$) | short call (strike $K_2 > K_1$) | Gesamt |
|---|---|---|---|
| Kosten | $c_1$ | $-c_2$ | $c_1 - c_2 > 0$ (Call $K_1$ ist mehr wert als Call $K_2$) |
| Payoff | $(S_T - K_1)^+$ | $-(S_T - K_2)^+$ | $(S_T - K_1)\mathbb{1}_{\{K_1 < S_T < K_2\}} + (K_2 - K_1)\mathbb{1}_{\{S_T > K_2\}}$ |




d) Butterfly Spread

Idee: Risikoarme Spekulation auf eine Seitwärtsbewegung des Kurses:
Basispreise $K_1 < K_2 < K_3$

| | long call (strike $K_1$) | long call (strike $K_3$) | 2× short call (strike $K_2$) | Gesamt |
|---|---|---|---|---|
| Kosten | $c_1$ | $c_3$ | $-2c_2$ | $c_1 + c_3 - 2c_2$ |
| Payoff | $(S_T - K_1)\mathbb{1}_{\{K_1 < S_T < K_2\}} + (2K_2 - K_1 - S_T)\mathbb{1}_{\{K_2 < S_T < K_3\}} + (2K_2 - (K_1 + K_3))\mathbb{1}_{\{S_T > K_3\}}$ | | | |




## 1.7 Arbitrage

Ein Arbitrage ist eine Möglichkeit, durch Handel mit Finanzgütern einen risikolosen Profit zu erzielen.

## 1.8 Beispiel:

| | New York | Frankfurt |
|---|---|---|
| Aktie | 130$ | 100€ |
| Wechselkurs | 1€ | 1,27$ |

Arbitragemöglichkeit:

- leihe 100€
- kaufe die Aktie in FF
- verkaufe sie in NY
- tausche 127$ in 100€
- gebe 100€ zurück

$\Rightarrow$ risikoloser Profit von 3$

## 1.9 Grundannahme

Im Handel mit Finanzgütern gibt es kein Arbitrage. Dies ist das **No-Arbitrage-Prinzip**.
Aus dem No-Arbitrage-Prinzip kann man das **Replikationsprinzip** folgern:

## 1.10 Replikationsprinzip

Haben zwei verschiedene Kombinationen $K, L$ von ausschüttungsfreien Finanzgütern zu einem zukünftigen Zeitpunkt $T$ immer den gleichen Wert, so haben sie auch zum gegenwärtigen Zeitpunkt den gleichen Wert. Die Kombination $K$ repliziert den Payoff der Kombination $L$ und umgekehrt.

## Argumentation:

$K$ habe den Anfangswert $V_0 \in \mathbb{R}$ und den zufälligen Wert $V_T$ in $T$.
$L$ habe den Anfangswert $W_0 \in \mathbb{R}$ und den zufälligen Wert $W_T$ in $T$.
Es gelte $V_T = W_T$.
Behauptung: $V_0 = W_0$
Angenommen: $V_0 > W_0$
Dann kann man durch short selling von $K$ ein Arbitrage erzielen:

- short selling in $K$
- gehe long in $L$

$\Rightarrow$ Zu Beginn ein Gewinn von $V_0 - W_0 > 0$

- handeln entsprechend $L$ bis $T$
- verkaufe $L$ in $T$
- erhalte $W_T = V_T$
- kaufe $K$ für $V_T$ und gebe die Position $K$ zurück

Am Ende: Glattstellen der Positionen: $W_T - V_T = 0$

$\Rightarrow$ Risikoloser Gewinn von $V_0 - W_0 > 0$.

Angenommen $V_0 < W_0$
Analog zu oben mit $K$ und $L$ vertauscht.

## 1.11 Nullkouponanleihen

festverzinsliches Wertpapier

- Fälligkeit $T$ (Maturity)
- Zahlung von 1€ in $T$
- keine Kouponzahlung während der Laufzeit
- $B(t,T)$ bezeichne den Preis dieser Anleihe zum Zeitpunkt $t < T$.
- $0 < B(t,T) < 1$ ist der Regelfall

Durch die Nullkouponanleihen wird die Veränderung des Geldwertes mit der Zeit wiedergegeben. Den Preis $B(t,T$ kann man als Diskontfaktor auffassen, der Preise in $T$ in Preise in $t$ umrechnet. Ein Euro in $T$ hat einen Wert vono $B(t,T)$ Euro in $t$.

## 1.12 Put-Call-Parität

Seien $c(S_0,K,T)$ und $p(S_0,K,T)$ die Anfangspreise einer Call bzw Put-Option mit Laufzeit $T$ und strike $K$.
Sei $S_0$ und $S_T$ der heutige Preis bzw der Preis zum Zeitpunkt $T$ des Underlyings.
Dann gilt:

$$S_0 + p(S_0,K,T) = c(S_0,K,T) + KB(0,T)$$

## Argumentation:

Betrachte folgende zwei Kombinationen:

I long Aktie long Put

II long call K× long in Nullkouponanleihe mit Fälligkeit in $T$

Wert in Zeitpunkt $T$:

I $S_T + (K - S_T)^+ = \max(S_T, K)$

II $(S_T - K)^+ + K = \max(S_T, K)$

Replikationsprinzip liefert:

$$S_0 + p(S_0,K,T) = c(S_0,K,c) + KB(0,T)$$

## 1.13 forward

- unbedingtes Termingeschäft
- Termin $T$ ist Ausübungszeitpunkt
- Underlying mit Preisen $S_0$ heute und $S_T$ in $T$
- zwei Parteien $A, B$
- Terminpreis $F_T$ festgelegt zum Vertragsabschluss
- keine Kosten bei Vertragsabschluss

in $T$:

- $A$ zahlt an $B$ Terminpreis $F_T$
- $B$ liefert das Underlying
- $A$ hat die long Position von forward
- $B$ hat die short Position von forward

Zusammenhang zwischen Termin- und Spotpreis des Underlyings:

$S_0$: gegenwärtiger Preis/ Spotpreis

$F_T$: Terminpreis zum Termin $T$

Dann gilt:

$$F_T B(0,T) = S_0$$

## Argumentation

Betrachte folgende Kombinationen:

I long im Forward zum Termin T, $F_T\times$ long in Nullkouponanleihe mit Fälligkeit $T$

II long im Underlying

Wert zum Zeitpunkt $T$:

I $\underbrace{S_T - F_T}_{\text{forward}} + \underbrace{F_T}_{\text{Nullkouponanleihe}} = S_T$

II $S_T$

Replikationsprinzip liefert:

$$F_T B(0,T) = S_0$$

## 1.14 Digitale Option

Recht auf Auszahlung eines festen Geldbetrags (etwa 1€) bei Eintreten eines auslösenden Ereignisses. z.B.:

- digitaler Call: $\mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}}$
- digitaler Put: $\mathbb{1}_{\{S_T \leq K\}}$

## 1.15 Eigenschaften des Callpreises

Sei $c(S_0,T,K)$ der Preis eines Calls auf ein Underlying $S$ mit Laufzeit $T$, strike $K$ und Anfangspreis $S_0$ des Underlyings. Dann gilt:

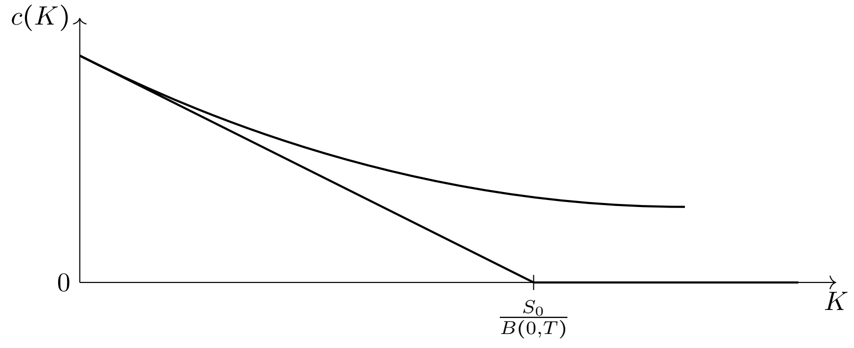
i) $c(S_0,T,K) \geq \max(0, \underbrace{S_0 - KB(0,T)}_{\substack{\text{innerer Wert}\\ \text{des Calls}}})$

ii) $c(S_0,T,K) \leq S_0$ obere Grenze des Calls

iii) $K_1 \leq K_2 \Rightarrow c(S_0,T,K_1) \geq c(S_0,T,K_2)$

iv) $K_1 < K_2 \Rightarrow B(0,T)(K_2 - K_1) \geq c(S_0,T,K_1) - c(S_0,T,K_2)$

v) $K_1 < K_2 < K_3 \Rightarrow c(S_0,T,K_2) \leq \frac{K_3-K_2}{K_3-K_1} c(S_0,T,K_1) + \frac{K_2-K_1}{K_3-K_1} c(S_0,T,K_3)$ Konvexität in $K$



Sei $p(S_0,T,K)$ der Preis eines Puts auf ein Underlying $S$ mit Laufzeit $T$, strike $K$ und Anfangspreis $S_0$ des Underlyings. Dann gilt:

i) $p(S_0,T,K) \geq \max(0, \underbrace{KB(0,T) - S_0}_{\substack{\text{innerer Wert} \\ \text{des Puts}}})$

ii) $p(S_0,T,K) \leq KB(0,T)$ obere Grenze des Puts

iii) $K_1 \leq K_2 \Rightarrow p(S_0,T,K_1) \leq p(S_0,T,K_2)$

iv) $K_1 < K_2 \Rightarrow B(0,T)(K_2 - K_1) \geq p(S_0,T,K_2) - p(S_0,T,K_1)$

v) $K_1 < K_2 < K_3 \Rightarrow p(S_0,T,K_2) \leq \frac{K_3-K_2}{K_3-K_1} p(S_0,T,K_3) + \frac{K_2-K_1}{K_3-K_1} p(S_0,T,K_1)$

## 1.16 Zinsmethoden

Frage: Wie kann man Kapitalrenditen durch annualisierte Zinssätze beschreiben?
Antwort: Man vereinbart eine Zinsmethode und eine Zählkonvention
Genauer: Ein Kapital $N$ wird zum Zeitpunkt $t$ wie eine Nullkouponanleihe mit Fälligkeit in $T$ angelegt.
in $t$: erhalte für $N$ insgesamt $\frac{N}{B(0,T)}$ $T$-Bonds.
in $T$: die Position hat einen Wert von $\frac{N}{B(0,T)}$.
Gewinn: $\frac{N}{B(0,T)} - N = N(\underbrace{\frac{1}{B(0,T)} - 1}_{\substack{\text{Rendite der} \\ \text{Investition}}})$.
$R(t,T) := \frac{1}{B(0,T)} - 1$ kann als Kapitalrendite interpretiert werden, die ein Investment zwischen $t$ und $T$ hervorbringt.
Ziel: Beschreibung durch einen jährlichen Zinssatz:

### 1.16.1 lineare Zinsmethode

entspricht einer linearen Verteilung der jährlichen Zinsen auf die Laufzeit.

$$R(t,T) = \underbrace{(T-t)}_{\text{Laufzeit}} r_{\text{lin}}$$

$r_{\text{lin}}$ ist der jährliche Zinssatz bei linearer Zinsmethode

**Beispiel:** Anlagezeitraum: Ein Monat

- Rendite von $0,5\% = 50bp$ (Basispunkte; $1bp = 0,01\%$)
- Also $r_{\text{lin}} = 0,5\% \cdot 12 = 6\%$

### 1.16.2 periodische Zinsmethode

Ein erzielter Gewinn in einem Zeitraum $(t,T]$ soll durch einen annualisierten Zinssatz $r$ beschrieben werden. Dazu wird der Zeitraum $(t,T]$ in $m$ äquidistante Perioden eingeteilt und der jährliche Zins $r$ auf $m$ Perioden linear verteilt. Setze $t_i := t + i \cdot \frac{T-t}{m}$ $\quad i = 0,...,m$
In jeder Periode von $t_{i-1}$ nach $t_i$ wird also ein Kapital mit einer periodischen Rendite$r \cdot \frac{T-t}{m}$ verzinst. Unter Berücksichtigung von Zineszins ergibt sich so eine Kapitalentwicklung der Form

$$K_m(r,t,T) := \left(1 + r\frac{T-t}{m}\right)^m = 1 + R(t,T)$$

Durch Auflösen nach $r$ erhält man also den zu einem Gewinn $R(t,T)$ entsprechenden Zinssatz.

### 1.16.3 stetige Zinsmethode

Die stetige Zinsmethode ergibt sich als Grenzübergang aus der periodischen Zinsmethode, wenn die Intervalllänge der Teilintervalle gegen 0 strebt.

**konstante Zinsrate** $r$**:** Hier ergibt sich

$$\lim_{m\to\infty} K_m(r,t,T) = e^{r(T-t)} = 1 + R(t,T)$$

Durch Auflösen nach $r$ erhält man wieder den zu einem Gewinn $R(t,T)$ entsprechenden Zinssatz $r$.

**nicht konstante Zinsrate:** Eine variierende Zinsratenfunktion $r : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ liefert eine Kapitalentwicklung der Form

$$K(r,t,T) = \exp\left(\int_t^T r(s)ds\right)$$

zwischen $t$ und $T$.

## 1.17 Festzinsanleihe

- festverzinsliches Wertpapier
- Nominal $N$
- Fälligkeit $T$
- Zinstermine $t_1 < t_2 < ... < t_n \leq T$
- Koupons $K_1, K_2, ..., K_n$

In der Regel werden Koupons als Zins auf das Nominal gezahlt, d.h. $K_i = N \cdot R(t_i - t_{i-1}), R$ Zinsrate bei linearer Verzinsung.
Bewertung zum Zeitpunkt $t < t_1$, mit Hilfe einer Modifikation des Replikationsprinzips:

I Halte Festzinsanleihe

II Halte $K_i$ Nullkouponanleihen mit Fälligkeit $t_i, i = 1, ..., m$ und halte $N$ Nullkouponsanleihe mit Fälligkeit $T$

Beide Strategien erzeugen den gleichen Zahlungsstrom an Ausschüttungsmenge: $K_1$ in $t_1$, ..., $K_n$ in $t_n$ , $N$ in $T$.

Das Replikationsprinzip liefert, dass die Preise in $t < t_1$ übereinstimmen müssen.
Dies bedeutet, dass der Preis der Festzinsanleihe in $t < t_1$ gegeben ist durch

$$\sum_{i=1}^{m} K_i B(t,t_i) + NB(t,T)$$

## 1.18 Variabel verzinsliche Aktie (/Floater/ FRN (Floating Rate Note))

- Nominal $N$
- Fälligkeit $T$
- Startpunkt $t_0$
- Zinszahlungstermine $t_1 < t_2 < ... < t_n = T$ mit $t_0 < t_1$
- nachschüssige Kouponzahlungen $K_1, ..., K_n$ entsprechend den für die Periode geltenden Marktzins

  $$F(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i) = \frac{1}{t_i - t_{i-1}}\left(\frac{1}{B(t_{i-1}, t_i)} - 1\right)$$

  also

  $$K_i = NF(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i)(t_i - t_{i-1}) = N\left(\frac{1}{B(t_{i-1}, t_i)} - 1\right) \qquad i = 1, ..., n$$

Bewertung in $t_0$ durch folgende replizierende Handelsstrategie:

- Rollierende Anlage des Nominals bis zum jeweiligen nächsten Zinstermin.

Genauer

- In $t_0$: kaufe $\frac{N}{B(t_0,t_1)}$ $t_1$-Bonds für $N$€ (die ich ja habe) und halte bis $t_1$
- In $t_1$:
  - Reinvestiere das $N$ in die zweite Zinsperiode durch Kauf von $\frac{N}{B(t_1,t_2)}$ $t_2$-Bonds
  - Ausschüttung der Zinszahlung von

$$\begin{aligned}\tfrac{N}{B(t_0,t_1)} - N &= NF(t_0,t_0,t_1)(t_1 - t_0)\\ &= K_1\end{aligned}$$

$\vdots$

- In $t_n$:
  - Rückzahlung des Nominals $N$
  - Ausschüttung der letzten Zinszahlung

$$\frac{N}{B(t_0,t_n)} - N = K_n$$

⇒ Gleiche Zahlungsströme an Zinszahlungen und gleicher Endwert
⇒ Replikationsprinzip liefert gleiche Anfangsbewertung: $N$ in $t_0$.
In $t < t_0$ ist der Preis $NB(t,t_0)$.

## 1.19 Swap

Ein Zinsswap liefert die Möglichkeit, das Zinsänderungsrisiko einer Festzinsanleihe zu vermeiden:

- Tauschgeschäft
- beim Zinsswap werden feste gegen variable Zinsen getauscht
- Tenorstruktur: $t_0 < t_1 < ... < t_n$
- jährlicher Festzinssatz $R$
- Nominal $N$, das zur Berechnung der Zinsen dient
- Unterscheidung in Payer - und Reciever Swap, ausgehend von der Festzinsseite

Am Ende einer jeden Periode werden die festen Zinsen

$$NR(t_i - t_{i-1})$$

gegen die variablen Zinsen

$$NF(t_{i-1},t_{i-1},t_i)(t_i - t_{i-1})$$

getauscht.
Das führt zum Zahlungsstrom

$$N(t_i - t_{i-1})(F(t_{i-1},t_{i-1},t_i) - R) \qquad i = 1,...,m$$

beim Payer Swap und

$$N(t_i - t_{i-1})(R - F(t_{i-1},t_{i-1},t_i)) \qquad i = 1,...,m$$

beim Reciever Swap.
Ein Payer Swap kann repliziert werden durch folgende Handelsstrategie:

$$\left.\begin{array}{l}\text{– long in FRN}\\ \text{– short in Festzinsanleihe}\end{array}\right\}\quad \text{zum Nominal } N\text{, Zinszahlungsmethode passend zur Tenorstruktur}$$

Deshalb ergibt sich für den Preis des Payer Swap($t$) in $t \le t_0$:

$$\begin{aligned}\text{Payer Swap}(t) &= \underbrace{NB(t,t_0)}_{\text{Preis der FRN in } t} - \left(\underbrace{\textstyle\sum_{i=1}^n NRB(t,t_i)(t_i - t_{i-1}) + NB(t,t_n)}_{\text{Preis Festzinsgeschäft}}\right) \\ &= N\left(B(t,t_0) - B(t,n) - \textstyle\sum_{i=1}^n R(t_i - t_{i-1})B(t,t_i)\right)\end{aligned}$$

Der **faire** Festzins $R$ liegt dann in $t$ vor, wenn Payer Swap($t$) = 0 gilt, also wenn

$$R = \frac{B(t,t_0) - B(t,n)}{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})B(t,t_i)}$$

$R$ ist dann die sogenannte **Swaprate** in $t$.

# 2 Aktuarielle Bewertung von Zahlungsströmen

Ziel: Bewertung von Zahlungsverpflichtungen, die durch biometrische Risiken verursacht werden.
Biometrische Risiken sind zum Beispiel:

- Todesfall
- Invalidität

## 2.1 Zahlungsströme und deren Bewertung

-Zeitdiskrete, periodische Sichtweise. Die Zeit wird in Jahren gemessen.

## 2.2 Definition (Zahlungsstrom)

Ein **Zahlungsstrom** $(Z(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge von nicht negativen reellen Zahlen.
$Z(n) \,\hat{=}\,$ Auszahlung zum Zeitpunkt $n$.

Frage: Was ist der heutige Kapitalwert der durch den Zahlungsstrom verursachten Zahlungsverpflichtungen.
Antwort: Summe der abdiskontierten Zahlungen.
Genauer: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt $B(k,n)$, der Preis der Nullkouponanleihe mit Fälligkeit $n$ zum Zeitpunkt $k$, den Wert einer in $n$ fälligen Zahlungsverpflichtung von 1€ an.
Deshalb definieren wir:

$$V_0(Z) = \sum_{n=0}^\infty Z(n)B(0,n) \;\hat{=}\; \text{Summe aller auf den Anfang abdiskontierten Zahlungsverpflichtungen; Kapitalwert heute}$$

und

$$V_m(Z) = \sum_{k=0}^\infty Z(m+k)B(m,m+k) \;\hat{=}\; \text{Summe aller nach } m \text{ fälligen auf den Zeitpunkt } m \text{ abdiskontierten Zahlungsverpflichtungen}$$

$V_m(Z)$ ist das Kapital, das zum Zeitpunkt $m$ benötigt wird, um die zukünftigen Zahlungsverpflichtungen erfüllen zu können.

In der Praxis, insbesondere bei der Kalkulation von Lebensversicherungen, wird von einer periodischen Verzinsung bzw. Diskontierung ausgegangen. Es wird also eine periodische Rendite $r$ bzw. ein periodischer Diskontfaktor $v = \frac{1}{1+r}$ angenommen. Damit ergibt sich dann

$$\Rightarrow B(m,n) = v^{n-m} \qquad \forall 0 \le m \le n.$$

## 2.3 Personenversicherung und deren Bewertung

Ziel: Mathematische Beschreibung und Analyse einer Personenversicherung.

## 2.4 Definition (Personenversicherung)

Eine **Personenversicherung** ist eine Quadrupel

$$\Gamma = (t, s, b, T)$$

mit Zahlungsströmen $(t(n))_{n\in\mathbb{N}_0}, (s(n))_{n\in\mathbb{N}_0}, (b(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(0,\infty)$-wertiger Zufallsvariablen $T$.

## 2.5 Interpretation

- $T$ ist eine zufällige Ausfallzeit, z.B. : Restlebensdauer
- Todesfallspektrum $(t(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$: $t(n) \geq 0$ entspricht einer Auszahlung in $n$, bei Ausfall in der $n$-ten Periode.
- Erlebungsspektrum $(s(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$: $s(n) \geq 0$ entspricht einer Auszahlung in $n$, wenn $n$ erreicht wird.
- Beitragsspektrum $(b(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$: $b(n) \geq 0$ entspricht einer Prämieneinzahlung in $n$, wenn $n$ erreicht wird.

Aus Sicht eines Versicherungsunternehmens erzeugt eine Personenversicherung die folgende Zahlungsströme:

Ausgabenstrom:

$$A(n) = s(n)\mathbb{1}_{\{T>n\}} + t(n)\mathbb{1}_{\{n-1<T\leq n\}} \qquad n \in \mathbb{N}_0$$
$$A(0) = s(0)$$

Einnahmestrom:

$$I(n) = b(n)\mathbb{1}_{\{T>n\}} \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

Bewertung aus heutiger Sicht durch

$$V_0(A) = s(0) + \sum_{n=1}^{\infty} s(n)\mathbb{1}_{\{T>n\}}B(0,n) + \sum_{n=1}^{\infty} t(n)\mathbb{1}_{\{n-1<T\leq n\}}B(0,n)$$

$$V_0(I) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)\mathbb{1}_{\{T>n\}}B(0,n)$$

$V_0(A)$ heutiger Kapitalwert des zufälligen Zahlungsstroms
$\mathbb{E}(V_0(A))$ ist der mittlerer Kapitalwert der zukünftigen Zahlungsverpflichtungen:

$$\mathbb{E}(V_0(A)) = s(0) + \sum_{n=1}^{\infty} s(n)B(0,n)\mathbb{P}(T>n) + \sum_{n=1}^{\infty} t(n)B(0,n)\mathbb{P}(n-1<T\leq n)$$

$\mathbb{E}(V_0(I))$ ist der mittlerer Kapitalwert der zukünftigen Einnahmen:

$$\mathbb{E}(V_0(I)) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)B(0,n)\mathbb{P}(T>n)$$

## 2.6 Definition (Barwert, fair)

$\mathbb{E}(V_0(A))$ heißt **Barwert** der durch die Versicherung induzierten Zahlungsverpflichtungen.
$\mathbb{E}(V_0(I))$ heißt **Barwert** der durch die Versicherung induzierten Einnahmen.
Eine Personenversicherung heißt **ausgewogen/fair**, wenn

$$\mathbb{E}(V_0(A)) = \mathbb{E}(V_0(I)) < \infty$$

Ist $\mathbb{E}(V_0(A)) < \infty$ oder $\mathbb{E}(V_0(I)) < \infty$, so ist

$$\mathbb{E}(V_0(A)) - \mathbb{E}(V_0(I))$$

der **Barwert** der Versicherung.
Dies ist als Ausgangspreis zu interpretieren, den ein Versicherungsunternehmen verlangt.

## 2.7 Äquivalenzprinzip

Man wähle $(t, s, b)$ so, dass die Versicherung fair ist. Dies kann man zur Beitragskalkulation benutzen, indem zu vorgegebenem Todesfall-und Erlebensfallspektrum das Beitragsspektrum $b$ so bestimmt wird, dass die Versicherung fair ist.

## 2.8 Klassische Beispiele

- versichert wird eine Person
- biometrisches Risiko ist das Todesfallrisiko
- Ausfallzeit ist deshalb die Restlebenszeit der Person

### 2.8.1 Todesfallversicherung

- Todesfallsumme $M$
- Laufzeit $n$
- konstante periodische Prämienzahlung $p$

Induzierte Zahlungsströme:

$$A(k) = M\mathbb{1}_{\{k-1<T\le k\}} \qquad k = 1, ..., n$$

$$A(k) = 0 \text{ sonst}$$

$$I(k) = p\mathbb{1}_{\{T>k\}} \qquad k = 0, ..., n-1$$

$$I(k) = 0 \text{ sonst}$$

$$V_0(A) = \sum_{k=1}^{n} MB(0,k)\mathbb{1}_{\{k-1<T\le k\}}$$

$$V_0(I) = \sum_{k=0}^{n-1} pB(0,k)\mathbb{1}_{\{T>k\}}$$

Also

$$\mathbb{E}(V_0(A)) = \sum_{k=1}^{n} MB(0,k)\mathbb{P}(k-1 < T \le k)$$

$$\mathbb{E}(V_0(I)) = \sum_{k=0}^{n-1} pB(0,k)\mathbb{P}(T > k)$$

### 2.8.2 In der Praxis:

- Restlebenszeit wird durch das Alter bestimmt: $T_x$ ist die Restlebenszeit eines $x$-Jährigen.
- Sationaritätsannahme:

$$\mathbb{P}(T_x > t | T_x > s) = \mathbb{P}(T_{x+s} > t - s) \qquad \forall 0 \le s \le t$$

- $q_x := \mathbb{P}(T_x \le 1)$ 1-jährige Sterbewahrscheinlichkeit eines $x$-Jährigen
- $p_x := 1 - q_x = \mathbb{P}(T_x > 1)$ 1-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines $x$-Jährigen
- $$\begin{aligned} {}_kp_x = \mathbb{P}(T_x > k) &= \mathbb{P}(T_x > 1)\mathbb{P}(T_x > k | T_x > 1) \\ &= p_x\mathbb{P}(T_{x+1} > k-1) = ... = p_x \cdot p_{x+1} \cdot ... \cdot p_{x+k-1} \end{aligned}$$
- ${}_kq_x := 1 -_k p_x = \mathbb{P}(T_x \le k)$

Eintrittsalter $x$:
Bezeichnung für $M = 1$:

$$_{|n}A_x := \sum_{k=1}^{n} v^k \mathbb{P}(k-1 < T_x \le k)$$

Bezeichnung für $p = 1$:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} := \sum_{k=0}^{n-1} v^k \mathbb{P}(T_x > k)$$

Die Todesfallversicherung ist fair, wenn

$$M_{|n}A_x = p\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$n = \infty$ entspricht Todesfall ohne zeitliche Beschränkung
Bezeichnung:

$$A_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \mathbb{P}(k-1 < T \le k)$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \mathbb{P}(T_x > k)$$

### 2.8.3 aufgeschobene Rentenversicherung

- Eintrittalter $x$
- Aufschubzeit $m$ Jahre
- Bezugszeit $n$ Jahre
- Rentenhöhe $R$
- Beitragshöhe $p$

Modellierung:

- $T = T_x$ Restlebenszeit eines $x$-Jährigen
- $t(k) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0$
- $s(k) = 0 \qquad k = 0, ..., m-1$
- $s(m+k) = R \qquad k = 0, ..., n-1$
- $b(k) = p \qquad k = 0, ..., m-1$
- $b(k) = 0 \qquad$ sonst

Induzierte Zahlungsströme:

Ausgaben:

$A(m+k) = R\mathbb{1}_{\{T_x > m+k\}} \qquad k = 0, ..., n-1$

$A(k) = 0 \qquad$ sonst

Einnahmen:

$I(k) = p\mathbb{1}_{\{T_x > k\}} \qquad k = 0, ..., m-1$

Barwert der Ausgaben:

$\mathbb{E}(V_0(A)) = \sum_{k=0}^{n-1} Rv^{m+k}\mathbb{P}(T_x > m+k) = R_{m|n}\ddot{a}_x$

Barwert der Einnahmen:

$\mathbb{E}(V_0(I)) = p\sum_{k=0}^{m-1} v^k \mathbb{P}(T_x > k) = p\ddot{a}_{x:\overline{m}|}$

Die Versicherung ist fair, wenn $R_{m|n}\ddot{a}_x = p\ddot{a}_{x:\overline{m}|}$ gilt.
Für $n = \infty$ (also eine lebenslange Rente) setze:

$$_{m|}\ddot{a}_x := \sum_{k=0}^{\infty} v^{m+k} \mathbb{P}(T_x > m+k)$$

### 2.8.4 Erlebensfallversicherung

- Eintrittalter $x$
- Laufzeit $n$ Jahre
- Erlebensfallsumme $M$, Auszahlung bei Überleben von $n$ Jahren
- konstante Prämie $p$ während der Laufzeit

Modellierung:

- $T = T_x$ Restlebenszeit eines $x$-Jährigen
- $t(k) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0$
- $s(n) = M$
- $s(k) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0 \backslash \{n\}$
- $b(k) = p \qquad k = 0, ..., n-1$
- $b(k) = 0 \qquad$ sonst

Induzierte Zahlungsströme:

Ausgaben:

$A(n) = M\mathbb{1}_{\{T_x > n\}}$

$A(k) = 0 \qquad$ sonst

Einnahmen:

$I(k) = p\mathbb{1}_{\{T_x > k\}} \qquad k = 0, ..., n-1$

Barwert der Ausgaben:

$$\mathbb{E}(V_0(A)) = M \underbrace{v^n \mathbb{P}(T_x > n)}_{=:{}_nE_x} = M_nE_x$$

Barwert der Einnahmen:

$$\mathbb{E}(V_0(I)) = p\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$$

Die Versicherung ist fair, wenn $M_nE_x = p\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ gilt.

### 2.8.5 gemischte Versicherung (kapitalgebundene Lebensversicherung)

- Kombination aus Todesfall- und Erlebensfallversicherung
- Eintrittalter $x$
- Laufzeit $n$ Jahre
- VS $M$, fällig bei Tod während der Laufzeit oder bei Überleben der Laufzeit
- konstante Prämie $p$ während der Laufzeit

Modellierung:

- $T = T_x$ Restlebenszeit eines $x$-Jährigen
- $t(k) = M \qquad k = 1, ...n$
- $t(k) = 0 \qquad$ sonst
- $s(n) = M$
- $s(k) = 0 \qquad$ sonst

- $b(k) = p \qquad k = 0, ..., n-1$
- $b(k) = 0 \qquad$ sonst

Induzierte Zahlungsströme:

Ausgaben:

$$A(k) = M\mathbb{1}_{\{k-1<T_x\leq k\}} \qquad k = 1, ..., n-1$$

$$A(n) = M\left(\mathbb{1}_{\{n-1<T_x\leq n\}} + \mathbb{1}_{\{T_x>n\}}\right)$$

$$A(k) = 0 \qquad \text{sonst}$$

Einnahmen:

$$I(k) = p\mathbb{1}_{\{T_x>k\}} \qquad k = 0, ..., n-1$$

Barwert der Ausgaben:

$$\mathbb{E}(V_0(A)) = M\left({}_{|n}A_x +_n E_x\right)$$

Barwert der Einnahmen:

$$\mathbb{E}(V_0(I)) = p\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$$

Die Versicherung ist fair, wenn $M\left({}_{|n}A_x +_n E_x\right) = p\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ gilt.

## 2.9 Beispiele im Überblick:

| | aufgeschobene Rentenversicherung | Erlebensfall-versicherung | gemischte Versicherung |
|---|---|---|---|
| Voraussetzungen | -Eintrittalter $x$<br>-Aufschubzeit $m$ Jahre<br>-Bezugszeit $n$ Jahre<br>-Rentenhöhe $R$<br>-Beitragshöhe $p$ | -Eintrittalter $x$<br>-Laufzeit $n$ Jahre<br>-Erlebensfallsumme $M$, Auszahlung bei Überleben von $n$ Jahren<br>-konstante Prämie $p$ während der Laufzeit | -Kombination aus Todesfall- und Erlebensfallsversicherung<br>-Eintrittalter $x$<br>-Laufzeit $n$ Jahre<br>-VS $M$, fällig bei Tod während der Laufzeit oder bei Überleben der Laufzeit<br>-konstante Prämie $p$ während der Laufzeit |
| Modellierung | -$T = T_x$ Restlebenszeit eines $x$-Jährigen<br>-$t(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$<br>-$s(k) = 0 \quad k = 0, ..., m-1$<br>-$s(m+k) = R$<br>$k = 0, ..., n-1$<br>-$b(k) = p \quad k = 0, ..., m-1$<br>-$b(k) = 0$ sonst | -$T = T_x$ Restlebenszeit eines $x$-Jährigen<br>-$t(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$<br>-$s(n) = M$<br>-$s(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \backslash \{n\}$<br>-$b(k) = p \quad k = 0, ..., n-1$<br>-$b(k) = 0$ sonst | -$T = T_x$ Restlebenszeit eines $x$-Jährigen<br>-$t(k) = M \quad k = 1, ...n$<br>-$t(k) = 0$ sonst<br>-$s(n) = M$<br>-$s(k) = 0$ sonst<br>-$b(k) = p \quad k = 0, ..., n-1$<br>-$b(k) = 0$ sonst |
| induzierte Zahlungsströme | -$A(m+k) = R\mathbb{1}_{\{T_x > m+k\}}$<br>$k = 0, ..., n-1$<br>-$A(k) = 0$ sonst<br>-$I(k) = p\mathbb{1}_{\{T_x > k\}}$<br>$k = 0, ..., m-1$ | -$A(n) = M\mathbb{1}_{\{T_x > n\}}$<br>-$A(k) = 0$ sonst<br>-$I(k) = p\mathbb{1}_{\{T_x > k\}}$<br>$k = 0, ..., n-1$ | -$A(k) = M\mathbb{1}_{\{k-1 < T_x \leq k\}}$<br>$k = 1, ..., n-1$<br>-$A(n) = M\left(\mathbb{1}_{\{n-1 < T_x \leq n\}} + \mathbb{1}_{\{T_x > n\}}\right)$<br>-$A(k) = 0$ sonst<br>-$I(k) = p\mathbb{1}_{\{T_x > k\}}$<br>$k = 0, ..., n-1$ |
| Bewertung | -$\mathbb{E}(V_0(A)) = \sum_{k=0}^{n-1} Rv^{m+k}\mathbb{P}(T_x > m+k) = R_{m\|n}\ddot{a}_x$<br>-$\mathbb{E}(V_0(I)) = p\sum_{k=0}^{m-1} v^k \mathbb{P}(T_x > k) = p\ddot{a}_{x:\overline{m\|}}$ | -$\mathbb{E}(V_0(A)) = M \underbrace{v^n \mathbb{P}(T_x > n)}_{=:_n E_x} = M_n E_x$<br>-$\mathbb{E}(V_0(I)) = p\ddot{a}_{x:\overline{n\|}}$ | -$\mathbb{E}(V_0(A)) = M\left({}_{\|n}A_x +_n E_x\right)$<br>-$\mathbb{E}(V_0(I)) = p\ddot{a}_{x:\overline{n\|}}$ |
| Versicherung ist fair, wenn | $R_{m\|n}\ddot{a}_x = p\ddot{a}_{x:\overline{m\|}}$ | $M_n E_x = p\ddot{a}_{x:\overline{n\|}}$ | $M\left({}_{\|n}A_x +_n E_x\right) = p\ddot{a}_{x:\overline{n\|}}$ |
| Für $n = \infty$ | lebenslange Rente: ${}_{m\|}\ddot{a}_x := \sum_{k=0}^{\infty} v^{m+k}\mathbb{P}(T_x > m+k)$ | | |

## 2.10 Deckungskapital

Betrachtet wird der Fall einer deterministischen Zinsentwicklung, d.h. $B(k,m) \in (0,1)$ deterministisch $\forall n \in \mathbb{N}, k \leq n$.
Man beobachtet, dass anfangs die Prämieneinnahmen pro Jahr höher sind als die zu erwartenden Ausgaben pro Jahr. Dies führt zum Aufbau einer **Prämienreserve**.
Gegen Ende sind die zu erwartenden Leistungen pro Jahr höher als die Prämien pro Jahr. Diese werden durch die aufgebaute Prämienreserve finanziert.
Der Deckungskapitalverlauf spiegelt den Auf- und Abbau der Prämienreserve wieder.

## 2.11 Definition ((prospektives) Deckungskapital)

Gegeben sei eine allgemeine Personenversicherung $\Gamma = (t, s, b, T)$. Sei $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ und $(I(n))_{n \in \mathbb{N}}$ der Zahlungsstrom der Ausgaben bzw Einnahmen.
Das nach $m$ Jahren gebildete **Deckungskapital** $D(m)$ ist definiert als die Differenz der Barwerte der

dann zukünftigen Ausgaben und Einnahmen, wobei die Diskontierung auf das Ende des $m$-ten Jahres vorgenommen wird, d.h.:

$$D(m) = \mathbb{E}(V_m(A)|T > m) - \mathbb{E}(V_m(I)|T > m) \qquad \forall m \in \mathbb{N}_0$$

Dies ist die Definition des s.g. **prospektiven Deckungskapitals** (vorausschauende Methode).
Für $m = 0$ ist $D(0)$ der Barwert der Versicherung.
Bei einer fairen Versicherung ist $D(0) = 0$.

## 2.12 Bemerkung:

$$\begin{aligned}
-\mathbb{E}(V_m(A)|T > m) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} A(m+k)\underbrace{B(m,m+k)}_{\sim v^k}\middle| T > m\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} t(k+m)B(m,m+k)\mathbb{P}(m+k-1 < T \leq m+k|T > m)\\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} s(k+m)B(m,m+k)\mathbb{P}(T > m+k|T > m)
\end{aligned}$$

$$- \mathbb{E}(V_m(I)|T > m) = \sum_{k=0}^{\infty} b(m+k)B(m,m+k)\mathbb{P}(T > m+k|T > m)$$

## 2.13 Beispiele

### 2.13.1 Todesfallversicherung

- Eintrittalter $x$
- VS $M = 1$
- Laufzeit $n$ Jahre
- $A(k) = \mathbb{1}_{\{k-1<T_x\leq k\}} \qquad k = 1, ..., n$
- $I(k) = p\mathbb{1}_{\{T_x>k\}} \qquad k = 0, ..., n-1$ mit $p = \frac{{}_{|m}A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$ konstante Prämie

$$\begin{aligned}
D_x(m) &= \sum_{k=1}^{n-m} v^k\mathbb{P}(m+k-1 < T_x \leq m+k|T_x > m)\\
&- \sum_{k=0}^{n-m-1} pv^k\mathbb{P}(T_x > m+k|T_x > m)\\
&= \sum_{k=1}^{n-m} v^k\mathbb{P}(k-1 < T_{x+m} \leq k) - p\sum_{k=0}^{n-m-1} v^k\mathbb{P}(T_{x+m} > k)\\
&= {}_{|n-m}A_{x+m} - p\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m|}}
\end{aligned}$$

### 2.13.2 Todesfall mit unbegrenzter Laufzeit

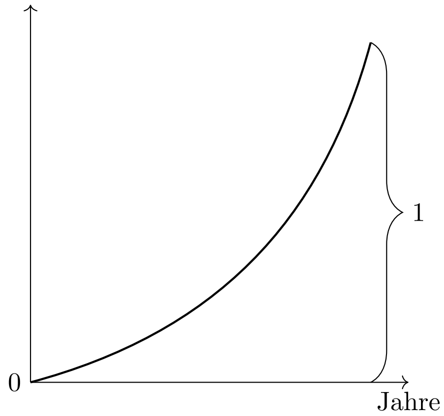
$$\begin{aligned}
D_x(m) &= \sum_{k=1}^{\infty} v^k\mathbb{P}(m+k-1 < T_x \leq m+k|T_x > m)\\
&- \sum_{k=0}^{\infty} pv^k\mathbb{P}(T_x > m+k|T_x > m)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} v^k\mathbb{P}(k-1 < T_{x+m} \leq k) - p\sum_{k=0}^{\infty} v^k\mathbb{P}(T_{x+m} > k)\\
&= A_{x+m} - p\ddot{a}_{x+m} \qquad m = 0, 1, 2, ...
\end{aligned}$$

### 2.13.3 Erlebensfallversicherung

- Eintrittsalter $x$
- Laufzeit von $n$ Jahren
- VS 1
- $A(k) = \mathbb{1}_{\{T_x>k\}} \qquad k = n$
- $A(k) = 0 \qquad$ sonst
- $I(k) = p\mathbb{1}_{\{T_x>k\}} \qquad k = 0, ..., n-1$
- $I(K) = 0 \qquad$ sonst

Fair, wenn $p\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_n E_x$.
Deckungskapitalverlauf:

$$\begin{aligned} D_x(m) &= v^{n-m}\mathbb{P}(T_x > n | T_x > m) - p\sum_{k=0}^{n-m-1} v^k \mathbb{P}(T_x > m+k | T_x > m) \\ &\overset{\text{Station-}}{\underset{\text{arität}}{=}} v^{n-m}\mathbb{P}(T_{x+m} > n-m) - p\sum_{k=0}^{n-m-1} v^k \mathbb{P}(T_{x+m} > k) \\ &= {}_{n-m}E_{x+m} - p\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|} \end{aligned}$$

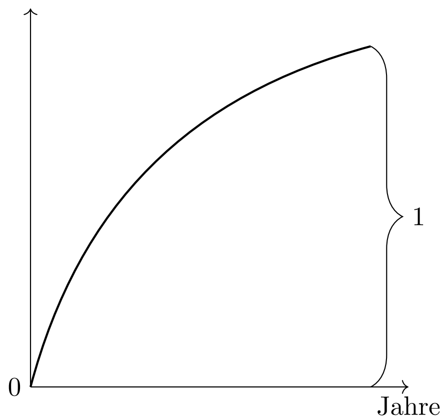



### 2.13.4 gemischte Versicherung

Das ist eine Todesfall- und Erlebensfallversicherung. Deshalb ergibt sich der Deckungskapitalverlauf aus der Summe der Deckungskapitalien der einzelnen Versicherungen:

- Laufzeit $n$ Jahre
- Eintrittsalter $x$

  $D_x(m) = A_{x+m:\overline{n-m}|} - p\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}$ mit $p\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}$




### 2.13.5 aufgeschobene Rentenversicherung

- Eintrittsalter $x$
- Aufschubzeit $n$ Jahre
- Rentenbezugszeit bis zum Tod
- Rentenhöhe 1

Ausgaben:

- $A(n+k) = \mathbb{1}_{\{T_x > n+k\}} \qquad k = 0, 1, \ldots$

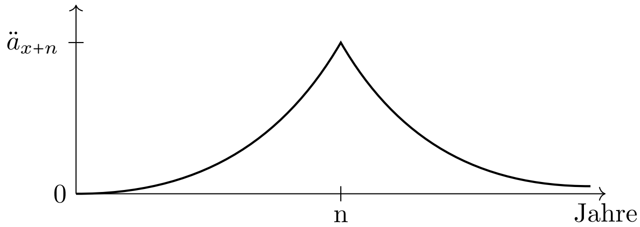
Einnahmen:

- $I(k) = p\mathbb{1}_{\{T_x > k\}} \qquad k = 0, \ldots, n-1$

Fair, wenn $p\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_{|n}\ddot{a}_x$

Deckungskapitalverlauf:

- Für $m = 0, ..., n-1$:
  $$\begin{aligned} D_x(m) &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{n-m+k}\mathbb{P}(T_{x+m} > n-m+k) - p\sum_{k=0}^{n-m-1} v^k \mathbb{P}(T_{x+m} > k) \\ &= {}_{|n-m}\ddot{a}_{x+m} - p\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|} \end{aligned}$$
- Für $m = n$:
  $D_x(m) = \ddot{a}_{x+m} = \ddot{a}_{x+n}$
- Für $m > n$:
  $D_x(m) = \ddot{a}_{x+m}$




Weitere Beispiele für Personenversicherungen, bei denen die Ausfallzeit nicht durch die Restlebenszeit einer einzelnen Person gegeben ist:

## 2.14 Personengemeinschaften/ Verbundene Leben

Wir betrachten $n$ Personen mit Restlebensdauern $T_1, ..., T_n$. Aus diesen wird eine Ausfallzeit der Gemeinschaft definiert durch
$$T = f(T_1, ..., T_n)$$
für eine geeignete Funktion $f$.

## 2.15 Beispiel:

Für $n = 2$: $\quad T = \min(T_1, T_2) = T_1 \wedge T_2$ oder
$T = \max(T_1, T_2) = T_1 \vee T_2$

## 2.16 Bemerkung:

Bei unabhängigen $T_1, ..., T_n$ kann die Verteilung von $\max(T_1, ..., T_n)$ und $\min(T_1, ..., T_n)$ ausgerechnet werden:
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\max(T_1, ..., T_n) \le t) &= \mathbb{P}(T_1 \le t, ..., T_n \le t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T_i \le t) \\ \mathbb{P}(\min(T_1, ..., T_n) > t) &= \mathbb{P}(T_1 > t, ..., T_n > t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T_i > t) \end{aligned}$$

## 2.17 Beispiel:

Todesfallversicherung eines Ehepaars:

- Eintrittsalter Person 1: $x$
- Eintrittsalter Person 2: $y$
- Laufzeit $n$ Jahre
- VS $M$ wird fällig, wenn einer der beiden stirbt (also beim ersten Tod)
- Prämie $p$ wird solange bezahlt, wie beide leben

Modellierung:

- Setze $T_{xy} = T_x \wedge T_y$
- $t(k) = M \qquad k = 1, ...n$
- $t(k) = 0 \qquad$ sonst
- $s(k) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0$
- $b(k) = p \qquad k = 0, ..., n-1$
- $b(k) = 0 \qquad$ sonst

Dann beschreibt $\Gamma = (t, s, b, T_{xy})$ eine Versicherung für verbundene Leben auf den ersten Tod.
Zahlungsströme:

- $A(k) = M\mathbb{1}_{\{k-1<T-xy\leq k\}} \qquad k = 1, ..., n$
- $I(k) = p\mathbb{1}_{\{T_{xy}>k\}}$

Die Versicherung ist fair, wenn

$$p\sum_{k=0}^{n-1} v^k \mathbb{P}(T_{xy} > k) = M\sum_{k=1}^{n} v^k \mathbb{P}(k-1 < T_{xy} \leq k)$$

$$\begin{aligned}
\text{Es gilt: } \mathbb{P}(T_{xy} > k) &= \mathbb{P}(T_{xy} > k | T_{xy} > k-1)\mathbb{P}(T_{xy} > k-1) \\
&= \mathbb{P}(T_{x+k-1,y+k-1} > 1)\mathbb{P}(T_{xy} > k-1) \\
&= \mathbb{P}(T_{x+k-1} > 1)\mathbb{P}(T_{y+k-1} > 1)\mathbb{P}(T_{xy} > k-1) \\
&\vdots \\
&= \mathbb{P}(T_{x+k-1} > 1)\mathbb{P}(T_{y+k-1} > 1) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(T_x > 1)\mathbb{P}(T_y > 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{und } \mathbb{P}(k-1 < T_{xy} \leq k) &= \mathbb{P}(T_{xy} \leq k | T_{xy} > k-1)\mathbb{P}(T_{xy} > k-1) \\
&= \mathbb{P}(T_{x+k-1,y+k-1} \leq 1)\mathbb{P}(T_{xy} > k-1) \\
&= (1 - \mathbb{P}(T_{x+k-1,y+k-1} > 1))\mathbb{P}(T_{xy} > k-1) \\
&= (1 - \mathbb{P}(T_{x+k-1} > 1)\mathbb{P}(T_{y+k-1} > 1))\,\mathbb{P}(T_{xy} > k-1)
\end{aligned}$$

## 2.18 Konkurrierende Ausscheideursachen

- Ausfallzeit $T$
- mehrere konkurrierende Ausscheideursachen. Welche Ursache zum Ausscheiden führt, ist zufällig und wird durch eine $\{1, ..., m\}$-wertige ZV $J$ beschrieben.
- Leistung bei Ausfall hängt von der Ausscheideursache ab.

Die Modellierung erfolgt dadurch, dass die Todesfallleistung ersetzt, bzw. modifiziert, wird durch eine Familie von Ausfallleistungen.

## 2.19 Definition (Personenversicherung unter $m$ konkurrierenden Risiken)

Sei $T$ eine $(0, \infty)$-wertige ZV und $J$ eine $\{1, ..., m\}$-wertige ZV. Seien $(t_j)_{j=1,...,m}$, $s$ und $b$ Zahlungsströme. Dann heißt $\Gamma = ((t_j)_{j=1,...,m}, s, b, T, J)$ **Personenversicherung unter $m$ konkurrierenden Risiken**.

## 2.20 Interpretation

Anfangszustand:

- $T \mathrel{\hat{=}}$ Verweilzeit im Anfangszustand
- $J \mathrel{\hat{=}}$ zufälligen Wahl einer Ausscheideursache
- $t_j(n) \mathrel{\hat{=}}$ Leistung bei Ausfall in der $n$-ten Periode wegen Ursache $j$
- $s(n) \mathrel{\hat{=}}$ Leistung bei einer Verweildauer größer $n$
- $b(n) \mathrel{\hat{=}}$ Beitrag bei Ausfall nach $n$.

Zahlungsströme:

- $A(k) = \sum_{j=1}^m t_j(k)\mathbb{1}_{\{k-1<T\le k, J=j\}} + s(k)\mathbb{1}_{\{T>k\}}$
- $I(k) = b(k)\mathbb{1}_{\{T>k\}}$

Bewertung:

- $\mathbb{E}(V_0(A)) = \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^m t_j(k)v^k\mathbb{P}(k-1<T\le k, J=j) + \sum_{k=0}^\infty s(k)v^k\mathbb{P}(T>k)$
- $\mathbb{E}(V_0(I)) = \sum_{k=0}^\infty b(k)v^k\mathbb{P}(T>k)$

Für eine praktische Berechnung der Wahrscheinlichkeiten muss die Sationaritätsannahme modifiziert werden:

## 2.21 Definition (stationär)

Eine Familie $(T_x)_{x\in\mathbb{N}_0}$ von Ausfallzeiten zusammen mit einer $\{1,\cdots,m\}$-wertigen Zufallsvariablen $J$ heißt stationär, wenn

$$\mathbb{P}(T_x \le n+k, J=j | T_x > n)) = \mathbb{P}(T_{x+n} \le k, J=j)$$

für alle $n\in\mathbb{N}_0, k\in\mathbb{N}, j\in\{1,...,m\}$

## 2.22 Lemma

Ist $((T_x)_{x\in\mathbb{N}_0}, J)$ stationär, so auch $(T_x)_{x\in\mathbb{N}_0}$.

*Beweis.*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_x \le n+k | T_x > n) &= \sum_{j=1}^m \mathbb{P}(T_x \le n+k, J=j | T_x > n) \\ &= \sum_{j=1}^m \mathbb{P}(T_{x+n} \le k, J=j) \\ &= \mathbb{P}(T_{x+n} \le k)\end{aligned}$$

□

Setze $q_{x,j} := \mathbb{P}(T_x \le 1, J=j)$ als Wahrscheinlichkeitkeit eines $x$-Jährigen im folgenden Jahr wegen der Ursache $j$ auszuscheiden.
$q_x := \mathbb{P}(T_x \le 1) = \sum_{j=1}^m q_{x,j}$ einjährige Ausscheidewahrscheinlichkeit eines $x$-jährigen.
$p_x := 1 - q_x$ einjährige Verweilwahrscheinlichkeit eines $x$-Jährigen.
Wegen der Stationarität gilt dann:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_x > n) &= \mathbb{P}(T_x > n | T_x > n-1)\cdot\ldots\cdot\mathbb{P}(T_x > 1) \\ &= p_{x+n-1}\cdot\ldots\cdot p_x\end{aligned}$$

bzw:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(n-1 < T_x \le n, J=j) &= \mathbb{P}(n-1<T_x\le n, J=j | T_x > n-1)\mathbb{P}(T_x > n-1) \\ &= \mathbb{P}(T_{x+n-1} \le 1, J=j)\mathbb{P}(T_x > n-1) \\ &= q_{x+n-1,j}\mathbb{P}(T_x > n-1)\end{aligned}$$

Für eine Berechnung der Barwerte genügt es also, die $q_{x,j}$ zu spezifizieren.

## 2.23 Beispiel: Invalidenrente

- Eintrittsalter $x$
- Grundzustand: aktiv a
- Mögliche Ausscheideursachen:
  - Invalidität
  - Tod

  Bei Invalidität wird eine lebenslange Rente der Höhe $R$ gezahlt.

Modell:

- $T_x$ entspricht der Verweilzeit im Zustand $a$
- $\mathbb{P}(T_x > k)$ bedeutet als Aktiver $k$ Jahre zu überleben

- $J = 1$ entspricht Invalidität
- $J = 2$ entspricht Tod
- Laufzeit $n$ (Restlaufzeit bis zur gesetzlichen Rente)
- $t_1(k) = R\ddot{a}_{x+k}$ entspricht der Leistung bei Invalidität im $k$-ten Jahr; Barwert des Rentenanspruchs $k = 1, ..., n$
- $t_2(k) = 0 \qquad k \in \mathbb{N}_0$
- $s(k) = 0 \qquad k \in \mathbb{N}_0$
- $b(k) = p \qquad k = 0, ..., n-1$

Bewertung:

- $\mathbb{E}(V(A)) = \sum_{k=1}^{n} Ra_{x+k}v^k\mathbb{P}(k-1 \leq T_x < k, J = j) = R\sum_{k=1}^{n} a_{x+k}v^k q_{x+k-1,1}\mathbb{P}(T_x > k-1)$
- $\mathbb{E}(V(I)) = p\sum_{k=0}^{n-1} v^k\mathbb{P}(T_x > k)$

Notation:

- $i(y) := q_{y,1}$ einjährige Invalidisierungswahrscheinlichkeit eines $y$-Jährigen Aktiven
- $q_y^a := q_{y,2}$ einjährige Sterbewahrscheinlichkeit eines $y$-Jährigen Aktiven
- $q_y := q_y^a + i(y)$ Wahrscheinlichkeit eines aktiven $y$-Jährigen im nächsten Jahr auszuscheiden

# 3 Exkurs: stochastische Prozesse

## 3.1 Definitionen

## 3.2 Definition (Wahrscheinlichkeitsraum, Zeitparameter, Zustandstraum, stochastischer Prozess, Filtration, Informationsverlauf, Information, adaptiert)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein **Wahrscheinlichkeitsraum**.

Sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine **Zeitparametermenge**.

Sei $(E, \mathcal{E})$ ein messbarer Raum als **Zustandsraum**.

Eine Familie $(X_t)_{t\in T}$ von $E$-wertigen ZV heißt **stochastischer Prozess**.

Eine Familie von Unter-$\sigma$-Algebren $\mathcal{F}$ heißt **Filtration**, wenn $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ für alle $s \leq t$ und $s, t \in T$.

$(F_t)_{t\in T}$ gibt einen **Informationsverlauf** wieder.

$\mathcal{F}_t$ entspricht einer **Information**, die bis zum Zeitpunkt $t$ verfügbar ist.

$(X_t)_{t\in T}$ heißt **adaptiert** bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, falls gilt: $X_t$ ist messbar bzgl. $\mathcal{F}_t$ $\forall t \in T$.

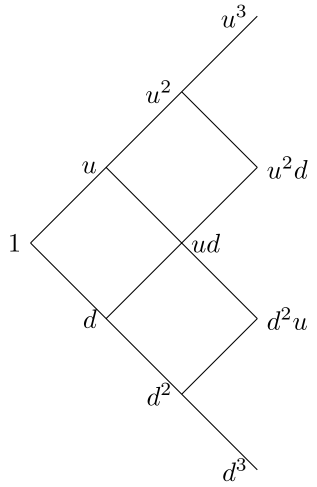
In der Regel: $T \subseteq \mathbb{N}_0$ oder $T \subseteq [0, \infty), E = \mathbb{R}^d, \mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

Beispiel: Die Preisentwicklung von $d$ Finanzgütern kann man durch einen stochastischen Prozess $(X_t)_{t\in T}$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$ beschrieben werden:

## 3.3 Das $N$-Perioden-CRR Modell (Cox-Ross-Rubinstein Modell)

$$\Omega = \{0,1\}^N, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), 0 < d < u, Y_n : \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & u^{\omega_n} \cdot d^{1-\omega_n} \end{array}$$

$S_n = Y_1 \cdot Y_2 \cdot \ldots \cdot Y_n$ der Preis nach $n$ Perioden:




$S(n)_{n=0,\ldots,N}$ Verlauf einer Aktie über $N$ Perioden. Zusätzlich zur Aktie betrachtet man ein Geldmarktkonto: $\begin{pmatrix} (1+r)^n \\ S(n) \end{pmatrix}$ beschreibt im CRR Modell den Verlauf der Preise dieser beiden Basisfinanzgüter.

## 3.4 (geometrischer) Random Walk

Sei $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von iid ZV. Sei $Y_0$ unabhängig von $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Durch $S_n := Y_0 + \sum_{k=1}^n Y_k \qquad n \in \mathbb{N}_0$ wird ein sogenannter **Random Walk** definiert.

Durch $S_n = Y_0 \cdot \prod_{i=1}^n Y_i \qquad n \in \mathbb{N}_0$ wird ein **geometrischer Random Walk** definiert.

Die Aktie im CRR Modell ist ein geometrischer Random Walk.

## 3.5 Bedingter Erwartungswert

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{G}$ eine Unter-$\sigma$-Algebra von $\mathcal{F}$. Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar bzgl $\mathcal{F}$ und $\mathbb{E}X$ existiere.

Dann heißt $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ eine **Version des bedingten Erwartungswertes von $X$ bzgl $\mathcal{G}$**, wenn gilt:

i) $Z$ ist messbar bzgl $\mathcal{G}$

ii) $\int_A Z d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P} \qquad \forall A \in \mathcal{G}$

Schreibweise: $Z = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$

Ist $\mathcal{G} = \sigma(Y)$ für eine ZV $Y$, so schreib man auch $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\sigma(Y)) = \mathbb{E}(X|Y)$.

## 3.6 Existenz und Eindeutigkeit

Gegeben seien die Bezeichnungen wie in 3.5.

Dann existiert der bedingte Erwartungswert von $X$ bzgl $\mathcal{G}$ und ist $\mathbb{P}$-f.s. eindeutig bestimmt, d.h. erfüllen $Z_1, Z_2$ die Bedingungen aus 3.5, so gilt:

$$Z_1 = Z_2 \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

*Beweis.*

*Existenz:*

1. Fall: $X \geq 0$

$\mu(A) = \int_A X d\mathbb{P}$, $A \in \mathcal{G}$ definiert ein $\sigma$-endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{G})$ mit $\mu << \mathbb{P}$.

Satz von Radon-Nikodym liefert ein $\mathcal{G}$-messbares $Z$ mit $\mu(A) = \int_A Z d\mathbb{P}$ für alle $A \in \mathcal{G}$.

Also $Z = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$

2. Fall: $X$ beliebig

Zerlege $X = X^+ - X^-$

$\mathbb{E}(X^+|\mathcal{G}), \mathbb{E}(X^-|\mathcal{G})$ existierten nach Fall 1.

$$\begin{aligned}\int_A X d\mathbb{P} &= \int_A X^+ d\mathbb{P} - \int_A X^- d\mathbb{P} \\ &= \int_A \mathbb{E}(X^+|\mathcal{G}) d\mathbb{P} - \int_A \mathbb{E}(X^-|\mathcal{G}) d\mathbb{P} \\ &= \int_A \mathbb{E}(X^+|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(X^-|\mathcal{G}) d\mathbb{P} \qquad \forall A \in \mathcal{G}\end{aligned}$$

Also ist $E(X^+|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(X^-|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$

*Eindeutigkeit:*

Seien $Z_1, Z_2$ bedingte Erwartungswerte.

$\int_{\{Z_1 - Z_2 > \frac{1}{n}\}} Z_1 - Z_2 d\mathbb{P} = \int_{\{Z_1 - Z_2 > \frac{1}{n}\}} X d\mathbb{P} - \int_{\{Z_1 - Z_2 > \frac{1}{n}\}} X d\mathbb{P} = 0$

$\Rightarrow \mathbb{P}(Z_1 - Z_2 > \frac{1}{n}) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \mathbb{P}(Z_1 - Z_2 > 0) = 0 \\ \overset{\text{analog}}{\Rightarrow} \mathbb{P}(Z_2 - Z_1 > 0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Z_1 = Z_2 \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

□

## 3.7 Beispiel:

Seien $X_1, ..., X_n$ iid, $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. Sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$
$\Rightarrow$ Frage: $\mathbb{E}(X_1|S_n)$?
$\Rightarrow$ Vermutung: $\mathbb{E}(X_1|S_n) = \mathbb{E}(X_2|S_n) = ... = \mathbb{E}(X_n|S_n)$
Dann gilt: $n\mathbb{E}(X_1|S_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i|S_n) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^n |S_n) = \mathbb{E}(S_n|S_n) = S_n$
$\Rightarrow \mathbb{E}(X_1|S_n) = \frac{1}{n} S_n$
Wieso ist $\mathbb{E}(X_1|S_n) = \mathbb{E}(X_k|S_n)$?

*Beweis.* zu zeigen: $\int_{\{S_n \in B\}} X_1 d\mathbb{P} = \int_{\{S_n \in B\}} X_k d\mathbb{P} \qquad \forall B \in \mathcal{B}$

$\int_{\{S_n \in B\}} X_1 d\mathbb{P} \quad = \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i \in B\}} x_1 \mathbb{P}^{(X_1, ..., X_n)}(dx_1, ..., dx_n)$

Da $X_1, ..., X_n$ stochastisch unabhängig sind, ist $\mathbb{P}^{(X_1, ..., X_n)} = \mathbb{P}^{(X_{\pi(1)}, ..., X_{\pi(n)})}$

$= \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i \in B\}} x_1 \mathbb{P}^{(X_{\pi(1)}, ..., X_{\pi(n)})}(dx_1, ..., dx_n)$ □

Betrachte die Permutation $\pi$ mit $\pi(1) = k$

$= \int_{\{S_n \in B\}} X_k d\mathbb{P}$

## 3.8 Faktorisierter bedingter Erwartungswert

Sei $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ eine ZV und sein $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{E})$ messbar. Sei $\mathcal{G} = \sigma(Y)$. Dann gilt: Eine ZV $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ ist $\mathcal{G}$-messbar genau dann, wenn es eine $\mathcal{E}$-messbare Abbildung $h : E \to \mathbb{R}$ gibt, mit $Z = h \circ Y$.

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "Y"] \arrow[dr, "\mathbb{E}(X|Y)"'] & (E, \mathcal{E}) \arrow[d, "h"] \\ & (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \end{tikzcd}$$

$\longrightarrow h(y) = \mathbb{E}(X|Y = y)$

Falls $Z$ eine Version der bedingten Erwartung von $X$, gegeben $Y$, ist, so gibt es also ein $h : E \to \mathbb{R}$ mit

$$Z = h \circ Y.$$

Schreibweise: $h(y) = \mathbb{E}(X|Y = y)$.
$h$ heißt **Version der faktorisierten bedingten Erwartung von $X$, gegeben $Y$.**
Sind $h_1$ und $h_2$ Versionen der bedingten Erwartungen von $X$, gegeben $Y$, so gilt:

$$h_1(y) = h_2(y) \qquad \text{für } \mathbb{P}^Y\text{-f.a. } y \in E.$$

$y \mapsto \mathbb{E}(X|Y=y)$ ist eindeutig festgelegt für $\mathbb{P}^Y$-f.a. $y$ durch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X\mathbb{1}_{\{Y\in B\}} &= \int_{\{Y\in B\}} \mathbb{E}(X|Y)d\mathbb{P} \\ &= \int_{\{Y\in B\}} h\circ Y d\mathbb{P} \\ &= \int_B h(y)\mathbb{P}^Y(dy) \qquad \forall B\in\mathcal{B} \end{aligned}$$

Ausrechnen des bedingten Erwartungswerts erfolgt häufig durch Spezifikation der bedingten Verteilung:

## 3.9 Stochastischer Kern

Seien $(\Omega,\mathcal{F})$ und $(E,\mathcal{E})$ messbare Räume.
Ein **stochastischer Kern** $K$ ist eine Abbildung $K: E\times\mathcal{F}\to[0,1]$ für die gilt:

i) $K(y,\cdot)$ ist ein WMaß für alle $y\in E$

ii) $K(\cdot,A)$ ist messbar für alle $A\in\mathcal{F}$

## 3.10 bedingte Wahrscheinlichkeiten und bedingte Verteilungen

Sei $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ ein WRaum und $\mathcal{G}$ eine Unter-$\sigma$-Algebra von $\mathcal{F}$.
Für jedes $\Gamma\in\mathcal{F}$ heißt

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_\Gamma|\mathcal{G})$$

**bedingte Wahrscheinlichkeit** von $\Gamma$ gegeben $\mathcal{G}$.
Schreibweise: $\mathbb{P}(\Gamma|\mathcal{G}) := \mathbb{E}(\mathbb{1}_\Gamma|\mathcal{G})$

Seien $X:(\Omega,\mathcal{F})\to(E_1,\mathcal{E}_1)$ und $Y:(\Omega,\mathcal{F})\to(E_2,\mathcal{E}_2)$ messbare Abbildungen.

Die **bedingte Verteilung** von $X$, gegeben $Y$, ist ein stochastischer Kern $K: E_2\times\mathcal{E}_1\to[0,1]$ derart, dass $y\mapsto K(y,A)$ eine Version der faktorisierten bedingten Erwartung von $\mathbb{P}(X\in A|Y)$ ist für alle $A\in\mathcal{E}_1$.
Schreibweise: $K(y,A) := \mathbb{P}(X\in A|Y=y)$.
Durch Erweiterungsschluss kann man zeigen:

$$\mathbb{E}(f(X)|Y=y) = \int f(x)K(y,dx)$$

für jedes messbare $f: E_1\to(\mathbb{R},\mathcal{B})$ für welches $\mathbb{E}(f(X))$ existiert.

## 3.11 Beispiel: Diskrete Zufallsvariablen

Sei $(E_1,\mathcal{E}_1)$ messbar und $E_2$ abzählbar mit $\mathcal{E}_2=\mathcal{P}(E_2)$. Seien $X:(\Omega,\mathcal{F})\to(E_1,\mathcal{E}_1)$ und $Y:(\Omega,\mathcal{F})\to(E_2,\mathcal{E}_2)$ messbar.
Die bedingte Verteilung von $X$, gegeben $Y=y$, ist bestimmt durch

$$\mathbb{P}(X\in A|Y=y) = \frac{\mathbb{P}(X\in A, Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)} \qquad \forall y\in E_2 \text{ mit } \mathbb{P}(Y=y)>0$$

Definiere den stochastischen Kern $K: E_2\times\mathcal{E}_1\to[0,1]$ durch

$$K(y,A) := \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(X\in A,Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)} & \forall y\in E_2 \text{ mit } \mathbb{P}(Y=y)>0 \\ \text{irgendwie, d.h. wähle beliebiges WMaß } \mu \text{ auf } (E_1,\mathcal{E}_1) \text{ und setze } K(y,A)=\mu(A) \text{ f.a. } A\in\mathcal{E}_1 \end{cases}$$

Damit ist $K$ die bedingte Verteilung von $X$, gegeben $Y$.

## 3.12 Lebesgue-Dichten

Sei $(X,Y)$ ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit Lebesgue Dichte $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, d.h.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X\in A, Y\in B) &= \int_{A\times B} h(x,y)\lambda^2(dx,dy) \\ &\underset{\text{Fubini}}{=} \int_A\int_B h(x,y)\lambda(dy)\lambda(dx) \qquad \forall A,B\in\mathcal{B} \end{aligned}$$

Setze $f(y) = \int_{\mathbb{R}} h(x,y)dx$.
Dann ist $f$ messbar wegen Fubini und die Lebesgue Dichte von $Y$, denn

$$\mathbb{P}(Y\in B) = \mathbb{P}(Y\in B, X\in\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}\times B} h(x,y)d(x,y) = \int_B \underbrace{\int_{\mathbb{R}} h(x,y)dx}_{=f(y)}\,dy \qquad \forall B\in\mathcal{B}$$

Definiere einen stochastischen Kern $K : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \to [0,1]$ durch

$$K(y,A) := \begin{cases} \int_A \frac{h(x,y)}{f(y)} \lambda(dx) & \text{falls } f(y) > 0 \\ \text{irgendwie} \end{cases}$$

Dann ist $K$ eine bedingte Verteilung von $X$, gegeben $Y$, denn

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in A, y \in B) &= \int_{A\times B} h(x,y)\lambda^2(dx,dy) \\ &= \int_B \int_A h(x,y)dxdy \\ &= \int_{B\cap\{f>0\}} \int_A \frac{h(x,y)}{f(y)} dx f(y)dy \\ &= \int_{B\cap\{f>0\}} K(y,A)f(y)dy \\ &= \int_B K(y,A)\mathbb{P}^Y(dy) \end{aligned}$$

Also gilt $\omega \mapsto K(Y(\omega),A)$ ist eine Version von $\mathbb{P}(X \in A|Y)$
$\Rightarrow y \mapsto K(y,A)$ ist eine Version von $y \mapsto \mathbb{P}(X \in A|Y = y)$.

## 3.13 Eigenschaften der bedingten Erwartung

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein WRaum, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ eine Unter-$\sigma$-Algebra. Seien $X, X_1, X_2$ integrierbare ZV. Dann gilt:

i) $\mathbb{E}(\alpha X_1 + \beta X_2|\mathcal{G}) = \alpha\mathbb{E}(X_1|\mathcal{G}) + \beta\mathbb{E}(X_2|\mathcal{G})$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ii) $X_1 \leq X_2 \Rightarrow \mathbb{E}(X_1|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(X_2|\mathcal{G})$

iii) Sei $Z$ eine $\mathcal{G}$-messbare ZV, derart dass $\mathbb{E}ZX$ existiert. Dann gilt:

$$\mathbb{E}(ZX|\mathcal{G}) = Z\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$$

iv) Sind $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{F}$ Unter-$\sigma$-Algebren, so folgt:

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)|G_1)$$

"Tower Property"

v) Sind $\mathcal{G}$ und $X$ stochastisch unabhängig, so gilt:

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}X$$

vi) Sind $Z_1, Z_2$ stochastisch unabhängige ZV mit Werten in $(E_1, \mathcal{E}_1)$ bzw. $(E_2, \mathcal{E}_2)$ und ist $h : E_1 \times E_2 \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ messbar mit existierenden $\mathbb{E}h(Z_1, Z_2)$, so gilt:

$$\mathbb{E}(h(Z_1,Z_2)|Z_2 = z_2) = \mathbb{E}h(Z_1, z_2) \qquad \text{für} \mathbb{P}^{Z_2}\text{-f.a. } z_2 \in E_2$$

vii) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) = \mathbb{E}X$

*Beweis.* $(i), (ii)$ einfach
$(iii)$

1. Fall: $Z \geq 0, X \geq 0$
Ist $Z = \mathbb{1}_G$ mit $G \in \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} \int_A ZX d\mathbb{P} &= \int_A \mathbb{1}_G X d\mathbb{P} = \int_{\underbrace{A\cap G}_{\in G}} X d\mathbb{P} \\ &= \int_{A\cap G} \mathbb{E}(X|G)d\mathbb{P} = \int_A Z\mathbb{E}(X|G)d\mathbb{P} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}(ZX|\mathcal{G}) = Z\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$

Ist $Z = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{G_i} \qquad G_i \in \mathcal{G}, \alpha_i \geq 0$, so gilt wegen $(i)$

$$\mathbb{E}(ZX|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{G_i} X|\mathcal{G}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{E}(\mathbb{1}_{G_i} X|\mathcal{G}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{G_i} \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = Z\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$$

Ist $Z \geq 0$,so existiert eine Folge von Treppenfunktionen $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $0 \leq Z_1 \leq Z_2 \leq \dots \uparrow Z \Rightarrow Z_n X \uparrow ZX$
Für jedes $A \in \mathcal{G}$ folgt mit der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned}\int_A ZX d\mathbb{P} &= \mathbb{E}(ZX\mathbb{1}_A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Z_n X \mathbb{1}_A)\\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z_n A|\mathcal{G})\mathbb{1}_A)\\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Z_n \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathbb{1}_A)\\ &= \mathbb{E}(Z\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathbb{1}_A)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}(ZX|\mathcal{G}) = Z\mathbb{E}(X|G)$

2. Fall $X, Z$ beliebig

$$ZX = U - V \text{ mit } \begin{aligned} U &= Z^+X^+ + Z^-X^- \geq 0\\ V &= Z^+X^- + Z^-X^+ \geq 0\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(ZX|\mathcal{G}) &= \mathbb{E}(U|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(V|\mathcal{G})\\ &= \mathbb{E}(Z^+X^+|\mathcal{G}) + \mathbb{E}(Z^-X^-|\mathcal{G}) - (\mathbb{E}(Z^+X^-|\mathcal{G}) + \mathbb{E}(Z^-X^+|\mathcal{G}))\\ &= Z^+\mathbb{E}(X^+|\mathcal{G}) - Z^-\mathbb{E}(X^+|\mathcal{G}) - (Z^+\mathbb{E}(X^-|\mathcal{G}) - Z^-\mathbb{E}(X^-|\mathcal{G}))\\ &= Z(\mathbb{E}(X^+|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(X^-|\mathcal{G}))\\ &= Z\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\end{aligned}$$

$(iv)$

Sei $A \in \mathcal{G}_1 \subseteq G_2$

$$\int_A \mathbb{E}(X|G_2)d\mathbb{P} \overset{A\in\mathcal{G}_2}{=} \int_A X d\mathbb{P} \overset{A\in\mathcal{G}_1}{=} \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1)d\mathbb{P}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)|G_1) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1)$

$(vi)$

zu zeigen: $\mathbb{E}(h(Z_1, Z_2)|Z_2 = z_2) = \mathbb{E}h(Z_1, z_2)$
Für $B \in \mathcal{E}_2$ gilt:

$$\begin{aligned}\int_{\{Z_1\in B\}} h(Z_1, Z_2)d\mathbb{P} &= \mathbb{E}h(Z_1, Z_2)\mathbb{1}_{\{Z_2\in B, Z_1\in E_1\}}\\ &= \int_B \underbrace{\int_{E_1} h(z_1, z_2)\mathbb{P}^{Z_1}(dz_1)}_{\mathbb{E}h(Z_1,z_2) \text{ für } \mathbb{P}^{Z_2}\text{-f.a. } z_2\in E_2} \mathbb{P}^{Z_2}(dz_2)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}(h(Z_1, Z_2)|Z_2 = z_2) = \mathbb{E}h(Z_1, z_2)$ für $\mathbb{P}^{Z_2}$-f.a. $z_2 \in E_2$

□

## 3.14 Bestapproximation

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein WRaum, $X$ eine ZV mit $\mathbb{E}X^2 < \infty$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ Unter-$\sigma$-Algebra
$L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := \{Y : \Omega \to \mathbb{R} : Y \text{ ist } \mathcal{F}\text{-messbar und } \mathbb{E}Y^2 < \infty\}$
$L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}) := \{Y : \Omega \to \mathbb{R} : Y \text{ ist } \mathcal{G}\text{-messbar und } \mathbb{E}Y^2 < \infty\}$
Also $L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}) \subseteq L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
Durch $< Y, Z >:= \mathbb{E}YZ$ wird ein Skalarprodukt auf $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert.
$||Y||_2^2 :=< Y, Y >$ ist die durch das Skalarprodukt induzierte Norm.
$L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ ist ein abgeschlossener Teilraum.

Für $X \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist $\widehat{X} := \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ die Orthogonalprojektion auf $L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, d.h. $\widehat{X} \in L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ und es gilt

$$||X - \widehat{X}||_2^2 = \inf_{Z\in L_2(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})} ||X - Z||_2^2.$$

*Beweis.* $X = \widehat{X} + X - \widehat{X}$
zu zeigen: $X - \widehat{X} \perp Z \quad \forall Z \in L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$
Die Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes implizieren:

$$< \mathbb{1}_A, X >= \int_A \mathbb{1}_A X d\mathbb{P} = \int \mathbb{1}_A \widehat{X} d\mathbb{P} =< \mathbb{1}_A, \widehat{X} >$$

für jedes $A \in \mathcal{G}$.

$\Rightarrow < \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}, X > = < \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}, \widehat{X} > \qquad \forall A_1, ..., A_n \in \mathcal{G}, \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow < Z, X > = < Z, \widehat{X} > \qquad Z \in L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, da $< \cdot, X >$ und $< \cdot, \widehat{X} >$ stetig sind
$\Rightarrow X - \widehat{X} \perp L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$
Mit Pythagoras folgt dann

$$\begin{aligned} \|X - Z\|_2^2 &= \|X - \hat{X} + \widehat{X} - Z\|_2^2 \\ &= \|X - \widehat{X}\|_2^2 + \|\widehat{X} - Z\|_2^2 \\ &\geq \|X - \widehat{X}\|_2^2 \end{aligned}$$

□

## 3.15 Martingale

Sei $T$ eine Zeitparametermenge, $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ eine Filtration und $(M_t)_{t\in T}$ ein adaptierter stochastischer Prozess.
$M$ heißt **Martingal**, falls gilt:

i) $\mathbb{E}|M_t| < \infty \qquad \forall t \in T$

ii) $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s \qquad s, t \in T, s \leq t$

$M$ heißt **Submartingal**, falls gilt:

i) $\mathbb{E}|M_t| < \infty \qquad \forall t \in T$

ii) $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) \geq M_s \qquad s, t \in T, s \leq t$

$M$ heißt **Supermartingal**, falls gilt:

i) $\mathbb{E}|M_t| < \infty \qquad \forall t \in T$

ii) $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) \leq M_s \qquad s, t \in T, s \leq t$

## 3.16 Beispiele

## 3.17 Random Walk

$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n X_i$, $S_0$ unabhängig von $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{E}|X_i| < \infty, \mathbb{E}|S_0| < \infty, (X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid und $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, ..., S_n) = \sigma(S_0, X_1, ..., X_n)$
Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(S_n + X_{n+1}|S_n) \\ &= \mathbb{E}(S_n|S_n) + \mathbb{E}(X_{n+1}|S_n) \\ &\underset{X_{n+1} \text{ unab. von } \mathcal{F}_n}{\overset{S_n \text{ ist } \mathcal{F}_n \text{ mb}}{=}} S_n + \mathbb{E}X_{n+1} \overset{\geq}{\underset{<}{=}} S_n \Leftrightarrow \mathbb{E}X_{n+1} \overset{\geq}{\underset{<}{=}} 0 \end{aligned}$$

Also ist ein Random Walk ein Martingal genau dann, wenn $\mathbb{E}X_1 = 0$ gilt. Er ist ein Submartingal genau dann, wenn $\mathbb{E}X_1 > 0$ ist und ein Supermartingal genau dann, wenn $\mathbb{E}X_1 < 0$ gilt.

## 3.18 geometrischer Random Walk

$S_n = S_0 \prod_{i=1}^n X_i$, $\mathbb{E}|X_i| < \infty, \mathbb{E}|S_0| < \infty, (X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid und $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, ..., S_n) = \sigma(S_0, X_1, ..., X_n)$
Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(S_n X_{n+1}|S_0, ..., S_n) \\ &\underset{S_n \text{ ist } \mathcal{F}_n \text{ mb}}{=} S_n \mathbb{E}(X_{n+1}|S_0, ..., S_n) \\ &\underset{X_{n+1} \text{ unab. von } \mathcal{F}_n}{=} S_n \mathbb{E}X_{n+1} \end{aligned}$$

Also $S_n$ ist ein Martingal $\Leftrightarrow \mathbb{E}X_i = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$

## 3.19 Stoppzeit

Sei $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ eine Filtration.

$$\tau : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$$

heißt **Stoppzeit**, falls

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \qquad \forall t \in T.$$

Stoppzeiten kann man als Verkaufsoption interpretieren:

”Die Entscheidung, über $t$ hinaus fortzusetzen”

$\{\tau \le t\}$ darf nur von den bis $t$ verfügbaren Informationen abhängen.

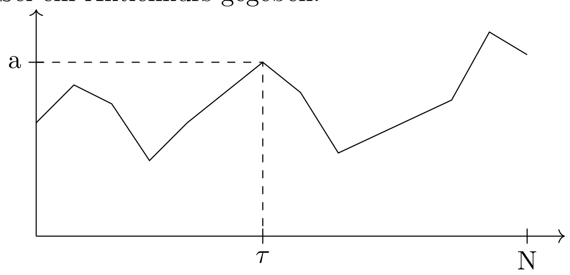
## 3.20 Beispiel:

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reellwertiger stochastischer Prozess, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, ..., S_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$.
$\tau := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n > a\}$ ist eine Stoppzeit, denn

$$\{\tau \le n\} = \{S_0 \le a, S_1 \le a, ..., S_n \le a\} \in \mathcal{F}_n$$

## 3.21 Gegenbeispiel:

Sei ein Aktienkurs gegeben:




$\tau = \inf\{0 \le k \le N : S_k = \max\{S_0, ..., S_N\}\}$ ist <u>keine</u> Stoppzeit, da zur Stoppentscheidung in die Zukunft geschaut werden muss.

## 3.22 Martingal als Glücksspiel

Sei $(\mathcal{F}_n)_{n\in N_0}$ eine Filtration und $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein adaptierter stochastischer Prozess mit $\mathbb{E}|M_n| < \infty, \forall n \in \mathbb{N}_0$.
$M_n$ entspricht der Auszahlung, die ein Spieler enthält, wenn er das Spiel zum Zeitpunkt $n$ beendet.
Die Stoppzeiten entsprechen den Strategien, die ein Spieler verwirklichen kann.

## 3.23 Definition (beschränkte Stoppzeit)

$\tau$ ist eine **beschränkte Stoppzeit**, falls es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $\tau \le N$.
Beschränkte Stoppzeiten entsprechen real einsetzbaren Strategien.

## 3.24 Satz

Es gilt: $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal genau dann, wenn

$$\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0 \qquad \forall \text{beschränkte Stoppzeiten } \tau$$

d.h. durch Spielen des Glückspiels kann sich ein Spieler im Mittel weder verbessern, noch verschlechtern (”faires Glücksspiel”).

*Beweis.* ”$\Rightarrow$”
Sei $\tau$ beschränkte Stoppzeit mit $\tau \le N$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}M_\tau &= \mathbb{E}\textstyle\sum_{n=0}^N M_\tau \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \\
&= \mathbb{E}\textstyle\sum_{n=0}^N M_n \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \\
&= \textstyle\sum_{n=0}^N \mathbb{E}M_n \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \\
&\overset{M_n}{\underset{\text{Martingal}}{=}} \textstyle\sum_{n=0}^N \mathbb{E}\mathbb{E}(M_N|\mathcal{F}_n)\mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \\
&\overset{\{\tau=n\}\in\mathcal{F}_n}{=} \textstyle\sum_{n=0}^N \mathbb{E}\mathbb{E}(M_N \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}|\mathcal{F}_n) \\
&= \textstyle\sum_{n=0}^N \mathbb{E}(M_N \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}) \\
&= \mathbb{E}\textstyle\sum_{n=0}^N M_N \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \\
&= \mathbb{E}M_N \overset{\tau=0}{=} \mathbb{E}M_0
\end{aligned}$$

Also $\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0$.
”$\Leftarrow$”: Sei $m > n$

zum Inhaltsverzeichnis

zu zeigen: $\mathbb{E}(M_m|\mathcal{F}_n) = M_n$, d.h.

$$\int_A M_m d\mathbb{P} = \int_A M_n d\mathbb{P} \qquad \forall A \in \mathcal{F}_n$$

Zu $A \in \mathcal{F}_n$ definiere Stoppzeit

$$\tau_A(\omega) := \begin{cases} m & \text{falls } \omega \in A \\ n & \text{falls } \omega \in A^c \end{cases}$$

Also $\tau_A = m\mathbb{1}_A + n\mathbb{1}_{A^c}$.
$\tau$ ist eine beschränke Stoppzeit. Es gilt also

$$\begin{aligned} \mathbb{E}M_0 = \mathbb{E}M_{\tau_A} &= \mathbb{E}M_m\mathbb{1}_A + \mathbb{E}M_n\mathbb{1}_{A^c} \\ &= \mathbb{E}M_m\mathbb{1}_A + \mathbb{E}M_n - \mathbb{E}M_n\mathbb{1}_A \end{aligned}$$

Weiter gilt mit $\tau = n$:

$$\mathbb{E}M_0 = \mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_n$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}M_m\mathbb{1}_A &= \mathbb{E}M_n\mathbb{1}_A \\ \Leftrightarrow \int_A M_m d\mathbb{P} &= \int_A M_n d\mathbb{P} \end{aligned}$$

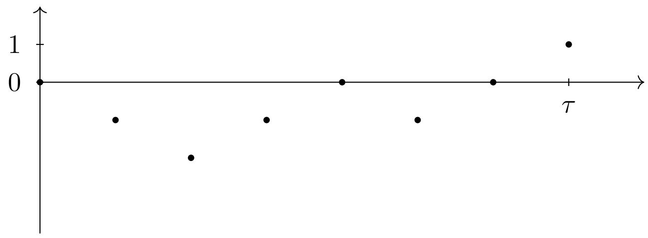
□

## 3.25 Optional Sampling

Frage: Wann gilt $\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0$, wenn $M$ ein Martingal ist?
⇝ Für beschränkte Stoppzeiten klar.
⇝ Für **un**beschränkte Stoppzeiten braucht man Voraussetzungen.

## 3.26 Beispiel: Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$

$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $(X_i)$ iid,
$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_i = -1), \tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n = 1\}, S_0 = 0.$




Es gilt: $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ $\mathbb{P}$-f.s. und $S_\tau = 1 \Rightarrow \mathbb{E}S_\tau = 1 \neq 0 = \mathbb{E}S_0$

Antwort liefert das Optional-Sampling-Theorem:

## 3.27 Satz (Optional-Sampling-Theorem)

Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bezüglich eiuner Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Sei $\tau$ eine Stoppzeit mit den folgenden Eigenschaften:

i) $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$

ii) $\mathbb{E}|M_\tau| < \infty$

iii) $\mathbb{E}|M_n|\mathbb{1}_{\{\tau > n\}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Dann gilt:

$$\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0$$

*Beweis.* Approximiere $\tau$ durch beschränkte Stoppzeiten $\tau \wedge n$. Es gilt: $\mathbb{E}M_{\tau\wedge n} = \mathbb{E}M_0$.
Also:

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}M_\tau - \mathbb{E}M_0| &= |\mathbb{E}M_\tau - \mathbb{E}M_{\tau\wedge n}| \\
&= |\mathbb{E}M_\tau - \mathbb{E}M_\tau \mathbb{1}_{\{\tau\le n\}} - \mathbb{E}M_n \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}| \\
&= |\mathbb{E}M_\tau \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} - \mathbb{E}M_n \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}| \\
&\le \mathbb{E}|M_\tau|\mathbb{1}_{\{\tau>n\}} + \mathbb{E}|M_n|\mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \\
&\underset{\substack{\text{wegen } (i),(ii) \\ \text{und einer} \\ \text{Anwendung der} \\ \text{majorisierten Konvergenz}}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} 0
\end{aligned}$$

□

## 3.28 Anwendung

Berechnung von Ruinwahrscheinlichkeiten.
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid mit $\mathbb{P}(X_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = -1), S_n = \sum_{i=1}^n X_i \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.
Anfangskapital von $k$ Euro:

$$S_n^{(k)} = k + S_n = k + \sum_{i=1}^n X_i$$

Vermögen nach $n$ Spielen bei Anfanskapital $k$. Wir spielen solange, bis wir ein Vermögen von $l > k$ Euro erreicht haben, oder ruiniert sind.
$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n^{(k)} = 0 \text{ oder } S_n^{(k)} = l\} = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = -k \text{ oder } S_n = l - k\}$ entspricht der Strategie.
$\{S_\tau = -k\} = \{S_\tau^{(k)} = 0\}$ entspricht dem Ruin und
$\{S_\tau = l - k\} = \{S_\tau^{(k)} = l\}$ entspricht dem Gewinn.
Man kann zeigen, dass

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1 \text{ und } \mathbb{E}\tau < \infty$$

(i) der faire Fall $p = \frac{1}{2}$:
Dann ist $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Matringal

$$\mathbb{E}|S_\tau| \le \max(k, l-k) < \infty$$

$$\mathbb{E}|S_n|\mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \le \max(k, l-k)\mathbb{P}(\tau > n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Optional Sampling liefert:

$$\mathbb{E}S_\tau = -k\mathbb{P}(S_\tau = -k) + (l-k)\mathbb{P}(S_\tau = l-k)$$

Zusammen mit $\mathbb{P}(S_\tau = -k) + \mathbb{P}(S_\tau = l-k) = 1$
folgt:

$$\mathbb{P}(S_\tau = -k) = \frac{l-k}{l} \text{ Ruinwahrscheinlichkeit}$$

$$\mathbb{P}(S_\tau = l-k) = \frac{k}{l} \text{ Gewinnwahrscheinlichkeit}$$

(ii) der unfaire Fall $p \ne \frac{1}{2}$ Betrachte den geometrischen Random-Walk

$$M_n = a^{S_n} = \prod_{i=1}^n a^{X_i} \qquad \text{mit } a > 0$$

$$\begin{aligned}
(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ ist ein Martingal} \quad &\Leftrightarrow \mathbb{E}a^{X-1} = 1 \\
&\Leftrightarrow ap + \tfrac{1}{a}(1-p) = 1 \\
&\Leftrightarrow a = 1 \text{ oder } a = \tfrac{1-p}{p}
\end{aligned}$$

Für $p \ne \frac{1}{2}$ ist $a \ne 1$
Weiter gilt: $\quad \mathbb{E}|M_\tau| \le \max(a^{-k}, a^{l-k}) < \infty$
$\mathbb{E}|M_n|\mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \le \max(a^{-k}, a^{l-k})\mathbb{P}(\tau > n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
Optional Sampling liefert

$$1 = \mathbb{E}M_\tau = a^{-k}\mathbb{P}(S_\tau = -k) + a^{l-k}\mathbb{P}(S_\tau = l-k)$$

Zusammen mit $\mathbb{P}(S_\tau = -k) + \mathbb{P}(S_\tau = l-k) = 1$
folgt:

$$\mathbb{P}(S_\tau = -k) = \frac{a^k - a^l}{1-a^l}$$
$$\mathbb{P}(S_\tau = l-k) = \frac{1-a^k}{1-a^l}$$

Es fehlt noch der Nachweis, dass

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$$

Betrachte dazu für $b \in \mathbb{Z} : \tau_b = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n = b\}$

(i) Der Fall $p \geq \frac{1}{2}$

Dann gilt:
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_b < \infty) &= \mathbb{P}(\tau_1 < \infty)\mathbb{P}(\tau_{b-1} < \infty) \\
&= \mathbb{P}(\tau_1 < \infty)^b \\
\mathbb{P}(\tau_a < \infty) &= \mathbb{P}(\tau_{-1} < \infty)^a \qquad \forall a, b \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Weiter ist:
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) &= \mathbb{P}(\tau_1 < \infty, X_1 = 1) + \mathbb{P}(\tau_1 < \infty, X_1 = -1) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = -1)\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) \\
&= p + (1-p)\mathbb{P}(\tau_1 < \infty)
\end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty)$ Lösung von

$$(1-p)x^2 - (x+p) = 0$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\tau_1 < +\infty) = 1$ oder $\mathbb{P}(\tau_1 < +\infty) = \frac{p}{1-p}$

Ist $p \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{p}{1-p} \geq 1 \Rightarrow \mathbb{P}(\tau_1 < +\infty) = 1$

(ii) Der Fall $p < \frac{1}{2}$

Dann ist $\frac{p}{1-p} < 1$

SLLN $\Rightarrow \frac{S_n}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}X_1 = 2p-1 < 0$

$\Rightarrow S_n \longrightarrow -\infty \qquad \mathbb{P}$-f.s.

$\Rightarrow \mathbb{P}(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n = +\infty) = 0$

Wäre $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = 1$, so wäre $\mathbb{P}(\tau_b < \infty) = 1 \ \forall b \in \mathbb{N}$
und damit:

$$\mathbb{P}(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n = +\infty) = \lim_{b\to\infty} \mathbb{P}(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n \geq b) = \lim_{b\to\infty} \mathbb{P}(\tau_b < \infty) = 1 \lightning$$

Also gilt $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = \frac{p}{1-p}$ für $p < \frac{1}{2}$.

Analog kann man schließen, dass

$$\mathbb{P}(\tau_{-1} < \infty) = \begin{cases} 1 & p \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1-p}{p} & p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Insgesamt folgt somit für $a < 0 < b$ und

$$\tau_{ab} := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n = a \text{ oder } S_n = b\}$$

$\mathbb{P}(\tau_{ab} < \infty) = \mathbb{P}(\tau_a < \infty \text{ oder } \tau_b < \infty) = 1$

Berechnung von $\mathbb{E}\tau_{ab}$:

(i) Der unfaire Fall $p \neq \frac{1}{2}$:

$S_n - n\mathbb{E}X_1 = S_n - n(2p-1) \qquad n \in \mathbb{N}_0$

ist ein zentrierter Random-Walk und deshalb ein Martingal.

Optional Sampling liefert

$$\mathbb{E}(S_{\tau\wedge n} - (\tau \wedge n)(2p-1)) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}(\tau \wedge n)(2p-1) = \mathbb{E}S_{\tau\wedge n}$$

$\mathbb{E}(\tau \wedge n) \uparrow \mathbb{E}\tau$ monotone Konvergenz

$\mathbb{E}S_{\tau\wedge n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}S_\tau$ majorisierte Konvergenz, da $S_{\tau\wedge n} \leq \max(|a|, b)$

$$\Rightarrow \mathbb{E}S_\tau = (2p-1)\mathbb{E}\tau \Leftrightarrow a\mathbb{P}(S_tau = a) + b\mathbb{P}(S_\tau = b) = (2p-1)\mathbb{E}\tau$$

Also folgt:

$$\mathbb{E}\tau_{ab} = \frac{1}{2p-1}\left[a\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{|a|} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{|a|+b}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{|a|+b}} + b\frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{|a|}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{|a|+b}}\right]$$

(ii) Der faire Fall $p = \frac{1}{2}$:
$(S_n^2 - n\mathbb{E}X_1^2)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal, denn

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}((S_n + X_{n+1})^2|\mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{E}(S_n^2|\mathcal{F}_n) + 2\mathbb{E}(X_{n+1}S_n|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) \\
&\overset{X_{n+1}\text{ unab.}}{\underset{\text{von }\mathcal{F}_n}{=}} S_n^2 + 2S_n\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}X_{n+1}^2 \\
&\overset{X_{n+1}\text{ unab.}}{\underset{\text{von }\mathcal{F}_n}{=}} S_n^2 + 2S_n\mathbb{E}X_{n+1} + \mathbb{E}X_{n+1}^2 \\
&= S_n^2 + \mathbb{E}X_1^2
\end{aligned}$$

Hierraus folgt die Martingaleigenschaft.
Optional Sampling liefert $\tau = \tau_{ab}$

$$\mathbb{E}(S_{\tau\wedge n}^2 - (\tau\wedge n)\mathbb{E}X_1^2) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}(S_{\tau\wedge n}^2) = \underbrace{\mathbb{E}X_1^2}_{=1}\mathbb{E}(\tau\wedge n)$$

$\mathbb{E}(\tau\wedge n) \uparrow \mathbb{E}\tau$ monotone Konvergenz
$\mathbb{E}S_{\tau\wedge n}^2 \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}S_\tau^2$ majorisierte Konvergenz

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbb{E}\tau = \mathbb{E}S_\tau^2 &= a^2\mathbb{P}(S_\tau = a) + b^2\mathbb{P}(S_\tau = b) \\
&= a^2\tfrac{b}{|a|+b} + b^2\tfrac{|a|}{|a|+b} \\
&= \tfrac{|a|b(|a|+b)}{|a|+b} = |a|b
\end{aligned}$$

## 3.29 Vorhersehbare Prozesse

Sei $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration. Ein stochastischer Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt **vorhersehbar**, wenn gilt:

$$X_n \text{ ist } \mathcal{F}_{n-1} \text{ messbar für alle } n\in\mathbb{N}_0.$$

## 3.30 Doob-Meyer Zerlegung

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein, zu einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ adaptierter Prozess, mit $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$.
Dann existiert genau eine Zerlegung der Form

$$X_n = Y + M_n + \Lambda_n \qquad \mathbb{P}\text{-f.s. für f.a. } n\in\mathbb{N}_0,$$

wobei $Y$ ist $\mathcal{F}_0$-messbar Startvariable
$(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Martingal mit $M_0 = 0$
$(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist vorhersehbar mit $\Lambda_0 = 0$

Eindeutigkeit bedeutet:
Ist $X_n = Y + M_n + \Lambda = Y' + M_n' + \Lambda'$, so folgt $Y = Y', M_n = M_n', \Lambda_n = \Lambda_n'$.

*Beweis.* Existenz:
Setze $M_0 = \Lambda_0 = 0$.
$M_1 = X_1 - \mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}_0), \quad \Lambda_1 = \mathbb{E}(X_1|\mathcal{F}_0) - X_0$
$M_{n+1} = M_n + X_{n+1} - \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$
$\Lambda_{n+1} = \Lambda_n + \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) - X_n \qquad \forall n\in\mathbb{N}_0$
Dann gilt: $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist vorhersehbar und $M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal, denn

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(M_n + X_{n+1} - \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_n) \\
&= M_n + \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\
&= M_n
\end{aligned}$$

Dann ist $X_n = X_0 + M_n + \Lambda_n \qquad \mathbb{P}$-f.s. für f.a. $n\in\mathbb{N}_0$: Beweis durch Induktion nach $n$:
$n = 0$: klar
$n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
X_{n+1} &= X_{n+1} - X_n + X_n \\
&\overset{\text{IV}}{=} X_{n+1} - X_n + X_0 + M_n + \Lambda_n \\
&= X_0 + M_n + X_{n+1} - \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) + \Lambda_n + \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) - X_n \\
&= X_0 + M_{n+1} + \Lambda_{n+1}
\end{aligned}$$

Eindeutigkeit:

Folgt aus der Tatsache, dass ein vorhersehbares Martingal konstant sein muss, d.h. $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Martingal und vorhersehbar

$\Rightarrow$ Es existiert eine $\mathcal{F}_0$-mb ZV $Y$ mit $Z_n = Y\mathbb{P}$-f.s. $\forall n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{E}(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) & \overset{\text{Martin-}}{\underset{\text{gal}}{=}} & \mathbb{Z}_n & = & \dots & = & Z_1 \\ {\scriptstyle\text{vorher-}\atop\scriptstyle\text{sehbar}} \parallel & & & & & & \parallel \\ Z_{n+1} & & & & & & Y \end{array}$$

Es ist also:

$Y_0 + M_n + \Lambda_n = Y_0' + M_n' + \Lambda_n'$

$\Rightarrow Y_0 = Y_0'$, da $M_0 = M_0' = \Lambda_0 = \Lambda_0' = 0$

$\Rightarrow M_n + \Lambda_n = M_n' + \Lambda_n'$

$\Rightarrow M_n - M_n' = \Lambda_n' - \Lambda_n$

$\Rightarrow (M_n - M_n')_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein vorhersehbares Martingal.

$\Rightarrow M_n - M_n' = Y \;\; \forall n \in \mathbb{N}_0$ für eine $\mathcal{F}_0$-messbare ZV $Y$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}(M_1 - M_1'|\mathcal{F}_0) & \overset{\text{Martin-}}{\underset{\text{gal}}{=}} & M_0 - M_0' \\ \parallel & & \parallel \\ Y & & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow M_n = M_n'$

$\Rightarrow \Lambda_n = \Lambda_n'$ $\square$

# 4 Diskrete Finanzmarktmodelle

Ziel:

- Modellierung von Finanzmärkten in diskreter Zeit
- Formulierung des Arbitragebegriffes
- Arbitragefreies Bewerten von Derivaten
- Zusammenhang zur Wahrscheinlichkeitstheorie: Das No-Arbitrage Theorem

## 4.1 Beschreibung des Finanzmarktes

- periodische Sichtweise
- $N$ Perioden
- $N$ **Handelszeitpunkte** $0, 1, ..., N-1$
- Der Informationsverlauf wird gegeben durch eine Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n=0,...,N}$. Dabei ist $\mathcal{F}_0$ eine triviale $\sigma-$Algebra, die also Ereignissen nur die Wahrscheinlichkeiten 0 oder 1 zuordnet. Diese Annahme wird dadurch begründet, dass Anfangspreise sowohl der Basisgüter als auch von Derivaten fest stehen und nicht zufällig sind.
- $d$ risikobehaftete Finanzgüter (**risky assets**) mit zu $(\mathcal{F}_n)_{n=0,...,N}$ adaptierten Preisprozessen $S_1(n), ..., S_d(n)$, $n = 0, ..., N$.
  $S = (S_1, ..., S_d)$ beschreibt die Entwicklung der risky assets.
  $S(n)$ ist der zufällige Vektor der Preise nach $n$ Perioden für die risky assets.
- ein **Numeraire Asset** (**Verrechnungsgut**) mit Preisprozess $S_0(n)$, $n = 0, ..., N$, wobei vorausgesetzt wird, dass $S_0(n) > 0$ für alle $n = 0, ..., N$.
  $S_0$ ist adaptiert bzgl $(\mathcal{F}_n)_{n=0,...,N}$.
  Das Numeraire Asset dient zur Verrechnung. Häufig wird ein Geldmarktkonto $\beta$ hierzu benutzt, d.h.
  $$S_0(n) = \beta(n) = (1 + \varrho(1))(1 + \varrho(2)) \cdot ... \cdot (1 + \varrho(n)) \qquad n = 1, ..., N, \beta(0) = 1$$
  wobei $(\varrho(n))_{n=1,...,N}$ ein vorhersehbarer Prozess ist mit $\varrho(n) > -1$ $\mathbb{P}$-f.s. für alle $n = 1, ..., N$.
  $\varrho(n)$ beschreibt die zufällige **Zinsrate** in der $n$-ten Periode.

- gehandelt werden kann durch Erwerb bzw. Verkauf von Anteilen an den $(d+1)$ Basisfinanzgütern in den Handelszeitpunkten.
  Die Entwicklung der Anzahl an Anteilen an Basisfinanzgütern entspricht dabei vorhersehbaren Prozessen $(\varphi, H)$ (da am Anfang einer Periode das Portfolio zusammengestellt wird), mit

  $\varphi(n)$ entspricht der Anzahl an Anteilen des Numeraire Assets in der $n$-ten Periode

  $H_j(n)$ entspricht der Anzahl an Anteilen im $j$-ten Basisfinanzgut in der $n$-ten Periode

  $H = (H_1, ..., H_d)$
  Ein solches Paar $(\varphi, H)$ heißt **Handelsstrategie**.

Eine Handelsstrategie $(\varphi, H)$ induziert eine **Vermögensentwicklung**.
Der Wert nach $n$ Perioden, <u>vor</u> der Umschichtung des Portfolios ist

$$V(n) = \varphi(n)S_0(n) + \sum_{j=1}^{d} H_j(n)S_j(n) \qquad n = 1, ..., N$$

Das Anfangsvermögen, welches ein Investor einsetzen muss, um die Handelsstrategie $(\varphi, H)$ durchführen zu können, ist gerade

$$V(0) = \varphi(1)S_0(0) + \sum_{j=1}^{d} H_j(1)S_j(0)$$

Setze $< H(n), S(n) >:= \sum_{j=1}^{d} H_j(n)S_j(n)$, Dies ist das **Skalarprodukt** der Vektoren.

## 4.2 Selbstfinanzierung

Wird beim Handel in den Handelszeitpunkten $1, ..., N-1$ kein Kapital hinzugefügt oder entnommen, so nennt man diese Handelsstrategie **selbstfinanzierend**.
Formal: $(\varphi, H)$ heißt selbstfinanzierend, wenn

$$\begin{aligned} V(n) &= \varphi(n)S_0(n) + < H(n), S(n) > \\ &= \varphi(n+1)S_0(n) + < H(n+1), S(n) > \end{aligned}$$

für alle $n = 1, ..., N-1$.

### 4.2.1 Beispiele für selbstfinanzierende Strategien

**Buy and hold Strategie** Ein Anfangskapital $x > 0$ wird in das erste risky asset investiert und bis zum Schluss gehalten:
$H_1(1) = \frac{x}{S_1(0)}$ entspricht dem Kaufen am Anfang
$H_1(n) = \frac{x}{S_1(0)}$ für $n = 2, ..., N$ entspricht dem Halten über die Perioden.
$H_j \equiv 0$ für $j \neq 1$.
Wertentwicklung:
$V(n) = H_1(n)S_1(n) = \frac{x}{S_1(0)}S_1(n)$

**short selling and hold Strategie** $H_1(1) = -1$ entspricht dem short selling der Aktie, das dem Verkauf am Anfang entspricht.
$H_1(n) = -1$ enspricht dem Halten der Verkaufsposition von $n = 2, ..., N$
Anfangskapital:

$$-S_1(0) < 0$$

Wertentwicklung:

$$-S_1(n)$$

**Kaufe Aktie 1, halte diese $k$ Perioden und tausche danach in Aktie 2, falls $S_2(k) < S_1(k)$ und halte diese bis zum Ende**

Zu Beginn:

$H_1(n) = 1$ für $n = 1, ..., k$

$H_2(n) = 0$ für $n = 1, ..., k$

Am Anfang der $(k+1)$-ten Periode:

$H_1(k+1) = \mathbb{1}_{\{S_2(k) \geq S_1(k)\}}$

$H_2(k+1) = \frac{V(k)}{S_2(k)} \mathbb{1}_{\{S_2(k) < S_1(k)\}} = \frac{S_1(k)}{S_2(k)} \mathbb{1}_{\{S_2(k) < S_1(k)\}}$ entspricht der zufälligen Umschichtung in Aktie 2.

Halten bis zum Ende:

$H_1(n) = \mathbb{1}_{\{S_2(k) \geq S_1(k)\}}$ für $n = k+2, ..., N$

$H_2(n) = \frac{S_1(k)}{S_2(k)} \mathbb{1}_{\{S_2(k) < S_1(k)\}}$ für $n = k+2, ..., N$

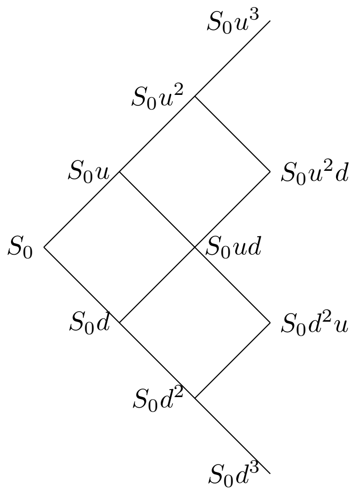
$H$ ist vorhersehbar und selbstfinanzierend da

$$\begin{aligned} V(k) = H_1(k) S_1(k) = S_1(k) &= \frac{S_1(k)}{S_2(k)} \mathbb{1}_{\{S_2(k) < S_1(k)\}} S_2(k) + \mathbb{1}_{\{S_2(k) \geq S_1(k)\}} S_1(k) \\ &= H_2(k+1) S_2(k) + H_2(k+1) S_1(k) \end{aligned}$$

## 4.3 Beispiele

### 4.3.1 Das $N$-Perioden CRR Modell

- $N$ Perioden, $n = 0, ..., N$
- $S_0 > 0$ Anfangskurs
- Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n=0,...,N}$
- $(Z_n)_{n=1,...,N}$ mit $Z_n$ zählt die Anzahl der Aufwärtssprünge in den ersten $n$ Perioden.
  Annahme: $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ mit iid ZV $Y_1, ..., Y_N$
  $$\mathbb{P}(Y_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(Y_i = 0).$$
- $(Y_i)_{i=1,...,N}$ adaptiert bzgl der Filtration.
- Sprunghöhen $0 < d < u$
- Preisprozess des risky assets der Form
  $$S_n = S_0 u^{Z_n} d^{n-Z_n} \qquad \text{f.a. } n = 1, ..., N$$




$\rightsquigarrow S_{n+1} = S_n u^{Y_{n+1}} d^{1-Y_{n+1}}$

Bemerkung: $(S_n)_{n=0,...,N}$ ist ein geometrischer Random Walk, startend aus $S_0 > 0$.

Andere Darstellung:

$$S_n = S_0 \prod_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{mit } X_i = u^{Y_i} d^{1-Y_i}$$

-Numeraire Asset ist ein Geldmarktkonto $\beta$ mit konstanter, periodischer Zinsrate $\varrho > -1$, dh:

$$\beta(n) = (1+\varrho)^n \qquad \text{f.a. } n = 0, ..., N$$

### 4.3.2 Mehrdimensionales CRR Modell

- $l$ Aktien
- $l$ Aktienpreisprozesse entsprechend dem einfachen CRR Modell

$$S_j(n) = S_j(0) u_j^{Z_j(n)} d_j^{n-Z_j(n)} \qquad n = 1, ..., N, j = 1, ..., l$$

- Filtration $(\mathcal{F}_n)_{0,...,N}$
- $(Z_j(n))_{n=1,...,N}$ $l$-dimensionaler Random Walk mit $Z(n) = \sum_{i=1}^n Y(i)$
  $Y(i) = (Y_1(i), ..., Y_l(i))$ mit $\mathbb{P}(Y_j(i) = 1) = p_j = 1 - \mathbb{P}(Y_j(i) = 0)$, $Y(1), ..., Y(N)$ iid
- In einer Periode können die $Y_1(i), ..., Y_l(i)$ abhängig (von einander) sein.
- Numeraire Asset wie beim CRR Modell

$$\beta(n) = \prod_{i=1}^n (1 + \varrho) = (1 + \varrho)^n$$

### 4.3.3 Das verallgemeinerte CRR Modell (Markov-Prozess)

Idee: Ersetze den Random Walk $(Z_n)$, der die Aufwärtssprünge zählt, durch eine zeitlich inhomogene Markov-Kette.
Genauer:

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum
- Filtration $(\mathcal{F}_n)_{0,...,N}$
- Sei $(Z_n)_{n=0,...,N}$ ein **Markov-Prozess**, adaptiert bzgl. $(\mathcal{F}_n)$ mit
  (i) $Z_0 = 0$
  (ii) Übergangswahrscheinlichkeiten, d.h. Wahrscheinlichkeit, dass der Kurs in der $(n+1)$-ten Periode springt oder nicht, gegeben, dass er bisher schon $k$ mal gesprungen ist

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = k + 1 | Z_n = k) = p_n(k) = 1 - \mathbb{P}(Z_{n+1} = k | Z_n = k) \qquad \forall k = 0, ..., n$$

- Markov Eigenschaft:

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = k | \mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(Z_{n+1} = k | Z_n)$$

  insbesondere folgt daraus:

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = k | Z_n = k_n, Z_{n-1} = k_{n-1}, ..., Z_1 = k_1, Z_0 = 0) = \mathbb{P}(Z_{n+1} = k | Z_n = k_n)$$

- $(Z_n)$ zählt die Anzahl der Aufwärtssprünge während der ersten $n$ Perioden. Setze als Preisprozess für das risky asset

$$S(n) = S_0 \cdot u^{Z(n)} \cdot d^{n-Z(n)} \qquad \text{mit } 0 < d < u$$

- Für die Entwicklung des Geldmarkkontos wird angenommen, dass die Zinsrate in einer Periode von der bis dahin erfolgten Anzahl der Aufwärtssprünge abhängt, d.h.

$$\varrho(n) = r(n, Z_{n-1}) \qquad \text{für alle } n = 1, ..., N$$

  mit $r : \mathbb{N} \times \{0, ..., N\} \to (-1, \infty)$
- $\varrho(n)$ ist dann die zufällige Zinsrate in der $n$-ten Periode.
  $\varrho(n)$ ist $\mathcal{F}_{n-1}$ messbar, also vorhersehbar für alle $n = 1, ..., N$

## 4.4 Das diskontierte Finanzmarktmodell

Gegeben sei ein Modell entsprechend 4.1 mit $S = (S_1, ..., S_d)$ als Preisprozess für die risky assets und $S_0$ als Prozess für das Numeraire Asset.
Alle Preise sind hier im Geldmarktkonto (in Euro) notiert. Eine weitere Möglichkeit, Preise zu notieren, besteht darin, diese in Anzahl an Anteilen des Numeraire Assets anzugeben:

$$x \text{ Geldeinheiten zum Zeitpunkt } t \text{ entsprechen } \tfrac{x}{S_0(t)} \text{ Anteilen des Numeraire Assets}$$

Für den Fall, dass $S_0$ das Geldmarktkonto $\beta$ ist, also $S_0(n) = \beta(n)$, ist dies der übliche Diskontierungsvorgang.
Dies drückt aus, wieviel Geld vom Zeitpunkt $t$ heute wert ist:

$$x€ \text{ zum Zeitpunkt } t \text{ entsprechen } \tfrac{x}{\beta(t)} € \text{ heute}$$

Führt man diese 'Diskontierung' für die Basisfinanzgüter durch, erhält man ein Finanzmarktmodell, dessen Preise in Anteilen des Numeraire Assets notiert sind.
Definiere

$$S_j^\star(t) := \frac{S_j(t)}{S_0(t)} \qquad t = 0, ..., N, 1 \leq j \leq d$$

$S_j^\star$ ist dann der Preisprozess des $j$-ten risky assets, ausgedrückt in Anteilen am Numeraire Asset.
$(S_1^\star, ..., S_d^\star)$ ist dann das **abdiskontierte Finanzmarktmodell**.
Für eine Handelsstrategie $(\varphi, H)$ ist der Wertprozess, in Anteilen des Numeraire Assets ausgedrückt, gegeben durch

$$V^\star(n) = \varphi(n) + \sum_{j=1}^{d} H_j(n) S_j^\star(n)$$

## 4.5 Charakterisierung der Selbstfinanzierung

Eine Handelsstrategie $(\varphi, H)$ ist **selbstfinanzierend**, wenn sich ihre Vermögensentwicklung aus dem Anfangskapital und den Periodengewinnen bzw -verlusten ergibt.
Genauer: Für eine Handelsstrategie $(\varphi, H)$ sind äquivalent:

(i) $(\varphi, H)$ ist selbstfinanzierend

(ii) $V(n) = V(0) + \sum_{k=1}^n \varphi(k)\Delta S_0(k) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^d H_j(k)\Delta S_j(k)$ für alle $n = 1, ..., N$

(iii) $V^\star(n) = V^\star(0) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^d H_j(k)\Delta S_j^\star(k)$ für alle $n = 1, ..., N$

Für einen stochastischen Prozess $(X(n))_n$ bezeichnet dabei

$$\Delta X(n) = X(n) - X(n-1)$$

den **Prozess der Periodenzuwächse**.

*Beweis.* Für jede Handelsstrategie $(\varphi, H)$ gilt:

$$\begin{aligned} V(1) - V(0) &= \varphi(1)S_0(1) - \varphi(1)S_0(0) + < H(1), S(1) > - < H(1), S(0) > \\ &= \varphi(1)\Delta S_0(1) + < H(1), \Delta S(1) > \end{aligned}$$

Deshalb gilt:

$$\begin{aligned} \text{(ii) ist erfüllt} \quad &\Leftrightarrow \Delta V(k) = \varphi(k)\Delta S_0(k) + < H(k), \Delta S(k) > \qquad \forall k = 2, ..., N \\ &\Leftrightarrow \varphi(k)S_0(k) + < H(k), S(k) > - \varphi(k-1)S_0(k-1) - < H(k-1), S(k-1) > \\ &= \varphi(k)S_0(k) - \varphi(k)S_0(k-1) + < H(k), S(k) > - < H(k), S(k-1) > \qquad \forall k = 2, ..., N \\ &\overset{l=k-1}{\Leftrightarrow} < H(l+1), S(l) > + \varphi(l+1)S_0(l) = < H(l), S(l) > + \varphi(l)S_0(l) \qquad \forall l = 1, ..., N-1 \\ &\Leftrightarrow (\varphi, H) \text{ ist selbstfinanzierend} \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \text{(iii) ist erfüllt} \quad &\Leftrightarrow \Delta V^\star(k) = < H(k), \Delta S^\star(k) > \qquad \forall k = 2, ..., N \\ &\Leftrightarrow \varphi(k) + < H(k), S(k) > \tfrac{1}{S_0(k)} \varphi(k-1) - < H(k-1), S(k-1) > \tfrac{1}{S_0(k-1)} \\ &= \tfrac{1}{S_0(k)} < H(k), S(k) > - \tfrac{1}{S_0(k-1)} < H(k), S(k-1) > \qquad \forall k = 2, ..., N \\ &\Leftrightarrow \varphi(k)S_0(k-1) + < H(k), S(k-1) > \\ &= \varphi(k-1)S_0(k-1) + < H(k-1), S(k-1) > \qquad \forall k = 2, ..., N \\ &\Leftrightarrow (\varphi, H) \text{ ist selbstfinanzierend} \end{aligned}$$

$\square$

Wichtig ist, dass ein Handel in den risky assets durch Aufbau einer geeigneten Position im Numeraire Asset zu einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie gemacht werden kann.

## 4.6 Satz zur Selbstfinanzierung

Zu jedem $\mathbb{R}^d$-wertigen vorhersehbaren Prozess $H$ und jedem Anfangskapital $V_0$ existiert genau ein vorhersehbarer Prozess $\varphi$, so dass $(\varphi, H)$ selbstfinanzierend ist und

$$V^\star(n) = V_0^\star + \sum_{k=1}^{n} < H(k), \Delta S^\star(k) > \qquad \forall n = 1, ..., N$$

*Beweis.* Wegen $V_0 = \varphi(1)S_0(0) + < H(1), S(0) >$ folgt

$$\varphi(1) = \frac{< H(1), S(0) > - V_0}{S_0(0)}$$

Bestimmung von $\varphi(n)$ für $n \geq 2$:
Wegen

$$V^\star(0) + \sum_{k=1}^{n} < H(k), S^\star(k) >= V^\star(n) = \varphi(n) + < H(n), S^\star(n) >$$

erhält man

$$V_0^\star + \sum_{k=1}^{n} < H(k), \Delta S^\star(k) > + < H(n), S^\star(n) > - < H(n), S^\star(n-1) >= \varphi(n) + < H(n), S^\star(n) >$$

Also setzt man

$$\varphi(n) = V_0^\star + \sum_{k=1}^{n} < H(k), \Delta S^\star(k) > - < H(n), S^\star(n-1) >$$

$\square$

Bezeichne mit $\mathcal{H}$ die Menge aller $\mathbb{R}^d$-wertigen vorhersehbaren stochastischen Prozessen.
Definiere den stochastischen Prozess $H \cdot S^\star$ durch

$$(H \cdot S^\star)(n) := \sum_{k=1}^{n} < H(k), \Delta S^\star(k) > \quad \forall n = 0, ..., N \text{ und } (H \cdot S^\star)(0) := 0$$

$(H \cdot S^\star)(n)$ ist die Summe der Periodengewinne bzgl $S^\star$ über die ersten $n$ Perioden.
$H \cdot S^\star$ wird als diskreter stochastischer **Integralprozess** bezeichnet.

## 4.7 Arbitrage

Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $(\varphi, H)$ heißt **Arbitrage**, wenn für den zugehörigen Wertprozess $V$ gilt

$$V_0 \leq 0, V_N \geq 0 \text{ und } \mathbb{P}(V_N - V_0 > 0) > 0$$

Ausgedrückt in Anteilen des Numeraire Assets ist dies äquivalent zu

$$V_0 \leq 0, V^\star(N) = \frac{V(N)}{S_0(N)} \geq 0 \text{ und } \mathbb{P}(V^\star(N) - V_0^\star > 0) > 0.$$

Da $V^\star(N) - V_0^\star = (H \cdot S^\star)(N)$ ist, gibt es eine Arbitragemöglichkeit genau dann, wenn es ein Anfangskapital $V_0 \leq 0$ und ein $H \in \mathcal{H}$ gibt mit

$$V_0^\star + (H \cdot S^\star)(N) \geq 0 \text{ und } \mathbb{P}((H \cdot S^\star)(N) > 0) > 0$$

### 4.7.1 Bemerkung

Existiert ein Arbitrage, so existiert auch ein Arbitrage zum Anfangskapital 0.

*Beweis.* Sei $(\varphi, H)$ ein Arbitrage mit

$$V(0) = \varphi(1)S_0(0) + < H(1), S_0(0) > < 0$$

Dann ist

$$V^\star(N) = V^\star(0) + (H \cdot S^\star)(N) \geq 0 \text{ und } \mathbb{P}((H \cdot S^\star)(N) > 0) > 0$$

Zum Anfangskapital 0 existiert eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $(\psi, H)$ mit

$$V^\star_{(\psi,H)}(N) = 0 + (H \cdot S^\star)(N) \geq -V^\star(0) > 0$$

□

### 4.7.2 Folgerung

Es gibt ein Arbitrage genau dann, wenn es ein $H \in \mathcal{H}$ gibt mit $(H \cdot S^\star)(N) \geq 0$ und $\mathbb{P}((H \cdot S^\star)(N) > 0) > 0$. Gibt es eine selbstfinanzierende Handelsstrategie, die einen risikolosen Gewinn durch Handeln über $N$ Perioden erzielt, so muss ein risikoloser Gewinn auch in nur einer Periode erzielbar sein. Dies ist die Aussage des folgenden Satzes.

### 4.7.3 Satz

Folgende Aussagen sind äquivalent

(i) Es existiert ein Arbitrage

(ii) Es gibt eine Periode $n$ und einen $\mathcal{F}_{n-1}$-messbaren Zufallsvektor $K$ mit $< K, \Delta S^\star(n) > \geq 0$ sowie $\mathbb{P}(< K, \Delta S^\star(n) > 0) > 0$.

## 4.8 Beispiele

### 4.8.1 Satz

Das CRR Modell ist genau dann arbitragefrei, wenn $d < 1 + \varrho < u$ gilt.

*Beweis.* '⇒': per Kontraposition

1. Fall: $1 + \varrho \leq d < u$: In diesem Fall ist die Aktie immer besser als das Bankkonto. Die buy and hold Strategie für die Aktie liefert dann ein Arbitrage.
   Setze $H = 1$. Dann existiert zum Anfangskapital 0 eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $(\varphi, H)$ mit Wertprozess
   $$V^\star(n) = 0 + (H \cdot S^\star)(n) \qquad \forall n = 0, ..., N$$
   also
   $$V^\star(N) = \sum_{k=1}^{n} H(k)\Delta S^\star(k) = S^\star(N) - S^\star(0) \geq S(0)\frac{d^N}{(1+\varrho)^N} - S(0) \geq 0$$
   und
   $$\mathbb{P}(V^\star(N) > 0) > 0$$

2. Fall: $d < u \leq 1 + \varrho$: Hier ist das Bankkonto immer besser als die Aktie und man kann durch eine short selling Strategie der Aktie ein Arbitrage konstruieren.
   Setze also $H(n) = -1$ für alle $n = 1, ..., N$.
   Dann existiert zum Anfangskapital 0 eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $(\varphi, H)$ mit Wertprozess
   $$V^\star(n) = 0 + (H \cdot S^\star)(n)$$
   also $V^\star(N) = (H \cdot S^\star)(N)$
   $$\begin{aligned} &= -(S^\star(N) - S(0)) \\ &= S(0) - S^\star(N) \\ &\geq S(0) - S(0)\tfrac{u^N}{(1+\varrho)^N} \\ &\geq S(0) - S(0) = 0 \end{aligned}$$
   und
   $$\mathbb{P}(V^\star(N) - V(0) > 0) > 0$$

'⇐': per Kontraposition

Sei das Modell nicht arbitragefrei. Wegen Satz 4.7.3 gibt es eine Periode $n$ und ein $\mathcal{F}_{n-1}$-messbares $K$ mit $K\Delta S^\star(n) \geq 0$ und $\mathbb{P}(K\Delta S^\star(n) > 0) > 0$.

Also auch
$$0 \leq K\frac{\Delta S^\star(n)}{S^\star(n-1)} = K\left(\frac{S^\star(n)}{S^\star(n-1)} - 1\right) = K\left(\frac{1}{1+\varrho}u^{X_n}d^{1-X_n} - 1\right)$$
$S(n) = u^{Z_n}d^{n-Z_n}S(0)$ mit $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i, \mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0)$
$S^\star(n) = \frac{S(n)}{(1+\varrho)^n}, \beta(n) = S_0(n) = (1+\varrho)^n$.
Setze $R(n) := \frac{1}{1+\varrho}u^{X_n}d^{1-X_n} - 1$
Annahme: $d < 1 + \rho < u$ Dann ist
$$\begin{aligned} 1 = \mathbb{P}(KR(n) \geq 0) \quad &= \mathbb{P}(K > 0, R(n) > 0) + \mathbb{P}(K < 0, R(n) < 0) + \mathbb{P}(K = 0) \\ &= \mathbb{P}(K > 0)\mathbb{P}(R(n) > 0) + \mathbb{P}(K < 0)\mathbb{P}(R(n) < 0) + \mathbb{P}(K = 0) \\ q := \mathbb{P}(K > 0), p := \mathbb{P}(R(n) > 0), r := \mathbb{P}(K < 0) \quad & \\ &= q \cdot p + r(1-p) + 1 - (q+r) \end{aligned}$$
Aus $\mathbb{P}(K = 0) < 1$ folgt $q > 0$ oder $r > 0$
$$\begin{aligned} \text{Wegen } 1 \quad &= q \cdot p + r(1-p) + 1 - (q+r) \\ &< q + r + 1 - (q+r) \qquad ↯ \text{ erhält man einen Widerspruch.} \\ &= 1 \end{aligned}$$
□

<u>Ziel:</u> No-Arbitrage Theorem
Charakterisierung von arbitragfreien Märkten im probabilistischen Sinne.

## 4.9 Äquivalente Maße

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.
$\mathcal{N}_\mathbb{P} := \{N \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(N) = 0\}$ ist das System der **$\mathbb{P}$-Nullmengen**.
Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ ist **absolut-stetig** bzgl. $\mathbb{P}$, wenn
$$\mathbb{Q} << \mathbb{P} :\Leftrightarrow \mathcal{N}_\mathbb{P} \subseteq \mathcal{N}_\mathbb{Q}$$
$\mathbb{Q}$ heißt **äquivalent** zu $\mathbb{P} :\Leftrightarrow \mathcal{N}_\mathbb{P} = \mathcal{N}_\mathbb{Q}$.
Ist $L \geq 0$ eine ZV mit $\mathbb{E}(L) = \int Ld\mathbb{P} = 1$, so wird durch
$$\mathbb{Q}(A) := \int_A Ld\mathbb{P} \qquad \forall A \in \mathcal{F}$$
ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ definiert mit $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$.
Dann ist $L$ die **$\mathbb{P}$-Dichte** von $\mathbb{Q}$.
Schreibweise: $L = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.
Gilt $\mathbb{P}(L > 0) = 1$ und $L = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, so ist
$$\mathbb{P} \sim \mathbb{Q} \text{ und } \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = \frac{1}{L}$$
Weiter: Sind $L$ und $L'$ Dichten von $\mathbb{Q}$ bzgl $\mathbb{P}$, so gilt
$$\mathbb{P}(L = L') = 1$$
Für jede ZV $X$ gilt:
$$\mathbb{E}_\mathbb{Q}(X) = \int Xd\mathbb{Q} = \int XLd\mathbb{P} = \mathbb{E}_\mathbb{P}(LX)$$
sofern obige Erwartungswerte existieren.
Zusammenhang zur Modellierung von Finanzmärkten:

- Ein Finanzmarktmodell wird im Wesentlichen bestimmt durch die zufällige Entwicklung der Basisfinanzgüter.

- Dabei ist nicht entscheidend, welche Verteilung ein Akteur im Finanzmarkt postuliert.

- Zwei Akteure sind im gleichen Finanzmarkt, wenn die beiden postulierten Verteilungen für die Basisfinanzgüter die gleichen Ereignisse mit positiver Wahrscheinlichkeit eintreten lassen können. Das bedeutet, dass die Verteilungen zueinander äquivalent sind.
- Ein Übergang zu einem äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß ändert den Finanzmarkt nicht, wohl aber die Verteilung der Basisfinanzgüter.
- Ein endliches Finanzmarktmodell, d.h. $|\Omega| < \infty$, wird nicht verändert, wenn die Menge der Elementarereignisse, die eine positive Wahrscheinlichkeit besitzen, unverändert bleibt.

## 4.10 Äquivalentes Martingalmaß

Gegeben sei ein Finanzmarktmodell mit Preisprozessen $S = (S_1, ..., S_d)$ der risky assets und Informationsverlauf $(\mathcal{F}_n)_{n=0,...,N}$ über $N$ Perioden. Sei $S_0$ das Numeraire Asset und

$$S_j^\star := \frac{S_j}{S_0}$$

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^\star$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ heißt **äquivalentes Martingal**, wenn gilt:

(i) $\mathbb{P}^\star \sim \mathbb{P}$

(ii) $(S_j^\star(n))_{n=0,...,N}$ ist ein $\mathbb{P}^\star$-Martingal für alle $j = 1, ..., d$

Kurz: Bzgl $\mathbb{P}^\star$ ist der Finanzmarkt fair.
Ziel: Arbitragefreier Markt $\Leftrightarrow$ Existenz eines äquivalenten Martingalmaß
'$\Leftarrow$': leicht
'$\Rightarrow$': schwieriger, mathematisches Argument ist der

## 4.11 Separationssatz von Minkouski

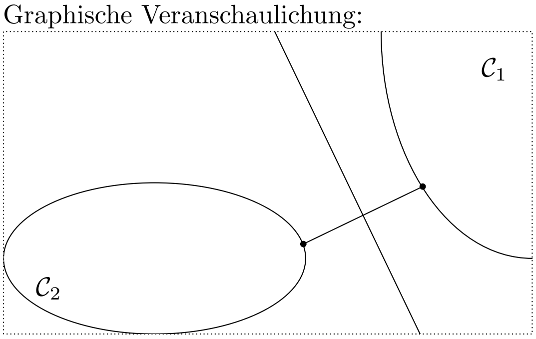
Seien $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ nichtleere konvexe Mengen im $\mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$.
Seien $\mathcal{C}_1$ abgeschlossen und $\mathcal{C}_2$ kompakt.
Dann gibt es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und reelle Zahlen $\beta_1 < \beta_2$ mit

$$\varphi(x) \leq \beta_1 < \beta_2 \leq \varphi(y) \qquad \forall x \in \mathcal{C}_2, y \in \mathcal{C}_1.$$

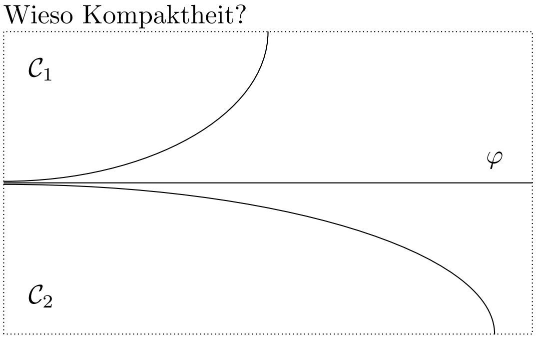
Es gilt also $\sup_{x\in\mathcal{C}_2} \varphi(x) < \inf_{y\in\mathcal{C}_1} \varphi(y)$.
Durch Übergang zu $-\varphi$ findet man auch eine lineare Abbildung $\psi$ mit

$$\sup_{y\in\mathcal{C}_1} \psi(y) < \inf_{x\in\mathcal{C}_2} \psi(x).$$

Graphische Veranschaulichung:




Wieso Kompaktheit?




$\mathcal{C}_1$ und $C_2$ lassen sich nicht strikt trennen.

*Beweis.* Sei für $x \in \mathcal{C}_2$

$$d(x) = \inf\{||x - y||^2 : y \in \mathcal{C}_1\}.$$

Der minimale quadratische Abstand eines Punktes $x \in \mathcal{C}_2$ zur Menge $\mathcal{C}_1$ wird also durch $d(x)$ gemessen. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{C}_1$ und der Disjunktheit von $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ ist $d(x) > 0$ für alle $x \in \mathcal{C}_2$. Die Abbildung $x \mapsto d(x)$ ist stetig und nimmt auf dem Kompaktum $\mathcal{C}_2$ ihr Minimum an. Es gibt also ein $x_0 \in \mathcal{C}_2$ mit

$$d(x) \geq d(x_0)$$

für alle $x \in \mathcal{C}_2$.
Wähle einen Radius $r$ so groß, dass

$$d(x_0) = \inf_{y \in \mathcal{C}_1 \cap K(x_0;r)} \|x_0 - y\|^2.$$

Da $\mathcal{C}_1 \cap K(x_0;r)$ kompakt ist, existiert ein $y_0 \in \mathcal{C}_1$ mit

$$d(x_0) = \|x_0 - y_0\|^2.$$

Also gilt für alle $x \in \mathcal{C}_2, y \in \mathcal{C}_1$

$$\|x - y\|^2 \geq \|x_0 - y_0\|^2 > 0$$

Setze

$$\eta = y_0 - x_0.$$

Wegen der Konvexität ist für $x \in \mathcal{C}_2$ auch $x_0 + \alpha(x - x_0) \in \mathcal{C}_2$ für alle $\alpha \in [0,1]$. Also gilt

$$\|x_0 - y_0\|^2 + 2\alpha < x - x_0, x_0 - y_0 > +\alpha^2 \|x - x_0\|^2 = \|x_0 + \alpha(x - x_0) - y_0\|^2 \geq \|x_0 - y_0\|^2,$$

was

$$2\alpha < x - x_0, x_0 - y_0 > +\alpha^2 \|x - x_0\|^2 \geq 0$$

impliziert. Für $\alpha \downarrow 0$ erhält man

$$< x - x_0, x_0 - y_0 > \geq 0$$

und damit

$$< x, \eta > \leq < x_0, \eta > .$$

Für $y \in \mathcal{C}_1$ ist wegen der Konvexität $y_0 + \alpha(y - y_0) \in \mathcal{C}_1$ für alle $\alpha \in [0,1]$. Also gilt

$$\|x_0 - y_0\|^2 + 2\alpha < y - y_0, y_0 - x_0 > +\alpha^2 \|y - y_0\|^2 = \|y_0 + \alpha(y - y_0) - x_0\|^2 \geq \|x_0 - y_0\|^2.$$

Für $\alpha \downarrow 0$ erhält man analog

$$< y - y_0, \eta > \geq 0$$

und damit

$$< y, \eta > \geq < y_0, \eta > .$$

Insgesamt folgt also

$$\sup_{x \in \mathcal{C}_2} < x, \eta > \leq < x_0, \eta >$$

und

$$\inf_{y \in \mathcal{C}_1} < y, \eta > \geq < y_0, \eta > .$$

Wegen

$$0 < \|y_0 - x_0\|^2 = < y_0 - x_0, y_0 - x_0 > = < y_0, \eta > - < x_0, \eta >$$

folgt die Behauptung, denn durch $z \mapsto < z, \eta >$ wird die zum Vektor $\eta$ gehörende lineare Abbildung $\varphi$ definiert.

□

Zur Bestimmung der zu trennenden konvexen Mengen wird die Arbitragefreiheit umformuliert:

## 4.12 Umformulierung der Arbitragefreiheit

- Finanzmarktmodell über $N$ Perioden mit $S = (S_1, ..., S_d)$ als Preisprozess der risky asstes
- Mit $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sei die Menge der messbaren Abbildungen von $\Omega$ nach $\mathbb{R}$ bezeichnet.
- $\mathcal{G}^\star := \{(H \cdot S^\star)(N) : H \in \mathcal{H}\}$ ist die Menge der möglichen Gewinne, notiert in Anteilen des Numeraire Assets, die beim Handel entsprechend einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie erzielt werden können.
  Dabei ist $\mathcal{H}$ die Menge der vorhersehbaren $\mathbb{R}^d$-wertigen Prozesse.

- Der Markt ist **arbitragefrei**, wenn

$$\mathcal{G}^\star \cap L^0_+(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) = \{0\}$$

wobei $L^0_+(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) = \{X \in L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) : X \geq 0\}$ .

- $\mathcal{G}^\star$ ist ein Vektorraum
- $\mathcal{K}^\star := \{C^\star \in L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) : \exists G^\star \in \mathcal{G}^\star \text{ mit } G^\star \geq C^\star\}$
- $\mathcal{K}^\star$ ist der Kegel von Elementen aus $L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, die unterhalb von $\mathcal{G}^\star$ liegen und kann interpretiert werden als diejenigen abdiskontierten terminalen Auszahlungen, die durch das abdiskontierte Vermögen einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie zum Anfangskapital 0 übertreffbar sind.
Es gilt:

$$\mathcal{G}^\star \cap L^0_+(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) = \{0\} \Leftrightarrow \mathcal{K}^\star \cap L^0_+(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) = \{0\}$$

Weiter:

$$\mathcal{K}^\star \cap (-\mathcal{K}^\star) = \mathcal{G}^\star$$

Mittels $\mathcal{G}^\star$ und $\mathcal{K}^\star$ können äquivalente Martingalmaße charakterisiert werden.

## 4.13 Äquivalenzen

Im folgenden werden wir die Endlichkeit des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraumes $\Omega$ annehmen. Es gibt also nur endlich viele Elemente in $\Omega$ und jedes dieser Elemente wird mit positiver Wahrscheinlichkeit angenommen. Dies macht durchaus Sinn, da in Modellen mit diskreter Zeit in der Regel eine Replikation von Derivaten nur in Modellen mit endlichem $\Omega$ durchführbar ist. Mathematisch bedeutet dies, dass alle Funktionen messbar sind und die Integrierbarkeit von auftretenden Zufallsvariablen immer gegeben ist. Weiter kann der Separationssatz von Minkowski für endlich dimensionale Räume angewendet werden und man muss nicht auf den allgemeinen Trennungssatz von Hahn-Banach zurückgreifen.
Sei $|\Omega| < \infty$. Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^\star$ sind äquivalent

i) $\mathbb{P}^\star$ ist ein Martingalmaß, d.h. $S^\star_j$ ist ein $\mathbb{P}^\star$-Martingal für alle $j = 1,...,d$.

ii) $\mathbb{E}^\star C^\star = 0$ für alle $C^\star \in \mathcal{G}^\star$

iii) $\mathbb{E}^\star K^\star \leq 0$ für alle $K^\star \in \mathcal{K}^\star$

*Beweis.*

$(i) \Rightarrow (ii)$
Für $H \in \mathcal{H}$ ist $V^\star(n) = (H \cdot S^\star)(n), n = 0,...,N$ ein $\mathbb{P}^\star$-Martingal, denn

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^\star(\Delta V^\star(k)|\mathcal{F}_{k-1}) &= \mathbb{E}^\star(V^\star(k) - V^\star(k-1)|\mathcal{F}_{k-1}) \\
&= \mathbb{E}^\star(< H(k), \Delta S^\star(k) > |\mathcal{F}_{k-1}) \\
&= \mathbb{E}^\star(\sum_{j=1}^d H_j(k)\Delta S^\star_j(k)|\mathcal{F}_{k-1}) \\
&= \sum_{j=1}^d \mathbb{E}^\star(H_j(k)\Delta S^\star_j(k)|\mathcal{F}_{k-1}) \\
&\overset{H_j \text{ vorh.}}{=} \sum_{j=1}^d H_j(k) \underbrace{\mathbb{E}^\star(\Delta S^\star_j(k)|\mathcal{F}_{k-1})}_{=0, \text{ da } S_j \text{ Martingal}} = 0 \qquad \forall k = 1,...,N
\end{aligned}$$

Für $C^\star = (H \cdot S^\star)(N)$ folgt also

$$\mathbb{E}^\star C^\star = \mathbb{E}^\star(H \cdot S^\star)(N) = \mathbb{E}^\star V^\star(N) \overset{\text{Martingal}}{=} \mathbb{E}^\star V^\star(0) = 0$$

Beachte, dass per Definitionem $V^\star(0) = 0$ gilt.

$(ii) \Rightarrow (i)$
Zeige die Martingaleigenschaft von $S_j^\star$ bzgl $\mathbb{P}^\star$ für alle $j = 1, ..., d$.

$$\begin{aligned}
&\text{z.z. } \mathbb{E}^\star(S_j^\star(k)|\mathcal{F}_{k-1}) = S_j^\star(k-1) \\
&\Leftrightarrow \mathbb{E}^\star(\Delta S_j^\star(k)|\mathcal{F}_{k-1}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \mathbb{E}^\star \mathbb{1}_A \Delta S_j^\star(k) = 0 \qquad \forall A \in \mathcal{F}_{k-1}
\end{aligned}$$

$\mathbb{1}_A \Delta S_j^\star(k)$ ist der Gewinn der Handelstrategie, der in der $k$-ten Periode long in $S_j$ geht, wenn $A$ eintritt, d.h.

$$H_j(k) = \mathbb{1}_A, H_j(n) = 0 \text{ sonst}, H_i \equiv 0 \quad \forall i \neq j$$

$(H \cdot S^\star)(N) = H_j(k)\Delta S_j^\star(k) = \mathbb{1}_A \Delta S_j^\star(k)$.
Wegen $(ii)$ folgt $\mathbb{E}^\star \mathbb{1}_A \Delta S_j^\star(k) = 0$ für jedes $A \in \mathcal{F}_{k-1}$.
Also ist $S_j^\star$ ein $\mathbb{P}^\star$ Martingal.

$(ii) \Rightarrow (iii)$
klar wegen der Monotonie des Erwartungswertes

$(iii) \Rightarrow (ii)$
Einerseits ist $C^\star \in \mathcal{G}^\star \Rightarrow C^\star \in \mathcal{K}^\star \Rightarrow \mathbb{E}^\star C^\star \leq 0$
Andererseits ist $\mathcal{G}^\star$ ein Vektorraum, also $\Rightarrow -C^\star \in \mathcal{G}^\star \Rightarrow -C^\star \in \mathcal{K}^\star$
$\Rightarrow \mathbb{E}^\star(-C^\star) \leq 0 \Rightarrow \mathbb{E}^\star C^\star \geq 0$

□

Zusammen mit dem Separationssatz kann man das No-Arbitrage Theorem beweisen.

## 4.14 1. Fundamentalsatz der Preistheorie: Das No Arbitrage Theorem

Gegeben sei ein Finanzmarkt $S$ über einem endlichen $\Omega$ mit Informationsverlauf $(\mathcal{F}_n)_{n=0,\ldots,N}$ bzgl. einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann sind äquivalent:

(i) Der Markt ist arbitragefrei, d.h. $\mathcal{G}^\star \cap L_+ = \{0\}$

(ii) Es existiert ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^\star$.

*Beweis.* $(ii) \Rightarrow (i)$
Sei $C^\star \in \mathcal{G}^\star \cap L^+$. Dann gilt nach Satz 4.13: $C^\star \geq 0$ und $\mathbb{E}^\star C^\star = 0$.
$\Rightarrow C^\star = 0 \qquad \mathbb{P}^\star$-f.s.
$\overset{\mathbb{P}^\star \sim \mathbb{P}}{\Rightarrow} C^\star = 0 \qquad \mathbb{P}$-f.s.

$(i) \Rightarrow (ii)$
OBdA. $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0 \qquad \forall \omega \in \Omega$
$\mathcal{G}^\star$ ist als Teilraum von $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ konvex und abgeschlossen. Die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ kann mit der Menge

$$\mathbb{P} = \{Q : \Omega \to \mathbb{R} : Q(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega : \sum_{\omega \in \Omega} Q(\omega) = 1\}$$

identifiziert werden, die konvex und kompakt ist.
Wegen $(i)$ ist $\mathcal{G}^\star \cap \mathbb{P} = \varnothing$.
Nach dem Separationssatz existiert eine lineare Abbildung

$$\varphi : L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$$

mit $\sup_{C^\star \in \mathcal{G}^\star} \varphi(C^\star) < \inf_{Q \in \mathbb{P}} \varphi(Q)$.
Da der Dualraum von $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ durch $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gegeben ist, kann $\varphi$ als Element aus $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ aufgefasst werden mittels

$$\varphi(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\varphi(\omega).$$

Da $\mathcal{G}^\star$ ein Teilraum ist und $\varphi(C^\star) \le \alpha$ für alle $C^\star \in \mathcal{G}^\star$ folgt $\varphi(C^\star) = 0$ für alle $C^\star \in \mathcal{G}^\star$.
Für $e_\omega = \mathbb{1}_{\{\omega\}}$ gilt $e_\omega \in \mathbb{P}$ und

$$0 \le \varphi(e_\omega) = \varphi(\omega)$$

Da dies für alle $\omega \in \Omega$ gilt, kann man ein $\mathbb{P}^\star$ durch

$$\mathbb{P}^\star(\omega) = \frac{\varphi(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} \varphi(\omega')} \qquad \forall \omega \in \Omega$$

definieren.
$\mathbb{P}^\star(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega \Rightarrow \mathbb{P}^\star \sim \mathbb{P}$
Wegen

$$\mathbb{E}^\star C^\star = \sum_{\omega \in \Omega} C^\star(\omega)\mathbb{P}^\star(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} C^\star(\omega) \frac{\varphi(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} \varphi(\omega')} = \frac{1}{\sum_{\omega' \in \Omega} \varphi(\omega')} \underbrace{\varphi(C^\star)}_{=0} = 0$$

liefert Satz 4.13, dass $\mathbb{P}^\star$ ein Martingalmaß ist.

□

## 4.15 Bestimmung von äquivalenten Martingalmaßen

### 4.15.1 CRR Modell

- $N$ Perioden
- $Z_n := \sum_{i=1}^N X_i$, für $X_1, ..., X_N$ iid mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0)$
- $S(n) := S_0 u^{Z_n} d^{n-Z_n}$
- $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, ..., X_N) = \sigma(Z_1, ..., Z_n)$
- $\beta(n) = \prod_{i=1}^n (1+\varrho), \varrho > -1$
- $S^\star(n) = \frac{S(n)}{\beta(n)} = S_0 u^{Z_n} d^{n-Z_n} \frac{1}{(1+\varrho)^n} = S_0 \prod_{i=1}^n \frac{u^{X_i} d^{1-X_i}}{1+\varrho}$ ist ein geometrischer Random Walk.
- $S^\star$ ist ein Martingal genau dann, wenn

$$\mathbb{E}^\star \frac{u^{X_i} d^{1-X_i}}{1+\varrho} = 1 \Leftrightarrow up^\star + d(1-p^\star) = 1+\varrho \Leftrightarrow p^\star = \frac{(1+\varrho)-d}{u-d} \in (0,1) \Leftrightarrow d < 1+\varrho < u$$

Durch $p \in (0,1)$ werden alle äquivalenten CRR Modelle parametrisiert und genau für den Parameter $p^\star = \frac{(1+\varrho)-d}{u-d}$ ist das Modell arbitragefrei/risikoneutral. Dies bedeutet, dass $S^\star$ ein Martingal ist bzgl. dem Parameter $p^\star$. Im folgenden wird gezeigt, wie ein Wechsel zu einem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{P}^\star$ durchgeführt werden kann. Hierzu wird die $\mathbb{P}$-Dichte bestimmt mit Hilfe der obigen Überlegungen.
Für alle $x \in \{0,1\}^N$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_N = x_N) &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i) \\
&= p^{\sum_{i=1}^N x_i}(1-p)^{N-\sum_{i=1}^N x_i} \\
&= p^{z_N}(1-p)^{N-z_N} \qquad \text{mit } z_N = \sum_{i=1}^N x_i
\end{aligned}$$

Für das gesuchte $\mathbb{P}^\star$ muss gelten:

$$\mathbb{P}^\star(X_1 = x_1, ..., X_N = x_N) = (p^\star)^{z_N}(1-p^\star)^{N-z_N} \qquad \text{mit } p^\star = \frac{1+\varrho-d}{u-d}$$

Wegen $\mathbb{P}^\star(X=x) = \frac{\mathbb{P}^\star(X=x)}{\mathbb{P}(X=x)}\mathbb{P}(X=x)$ für alle $x \in \{0,1\}^N$ ist die Dichte von $(\mathbb{P}^\star)^X$ bzgl $\mathbb{P}^X$ gegeben durch

$$l(x) = \frac{(p^\star)^{z_N}(1-p^\star)^{N-z_N}}{p^{z_N}(1-p)^{N-z_N}}$$

Hieraus erhält man durch

$$\begin{array}{rccl} L: & \Omega & \longrightarrow & (0,\infty) \\ & \omega & \mapsto & l(\underbrace{X_1(\omega),...,X_N(\omega)}_{X(\omega)}) = \dfrac{(p^\star)^{Z_N(\omega)}(1-p^\star)^{N-Z_N(\omega)}}{p^{Z_N(\omega)}(1-p)^{N-Z_N(\omega)}} \end{array}$$

die Dichte von $\mathbb{P}^\star$ bezüglich $\mathbb{P}$.
Definiere also $\mathbb{P}^\star$ mittels

$$\mathbb{P}^\star(A) = \int_A L d\mathbb{P} \qquad \forall A \in \mathcal{F}_N = \mathcal{F}$$

Dann ist $\mathbb{P}^\star$ äquivalent zu $\mathbb{P}$, da $L > 0$ $\mathbb{P}$-f.s. und es gilt

$$\mathbb{P}^\star(X = x) = \int_{\{X=x\}} L d\mathbb{P} = \left(\frac{p^\star}{p}\right)^{\sum_{i=1}^N x_i} \left(\frac{1-p^\star}{1-p}\right)^{N-\sum_{i=1}^N x_i} \mathbb{P}(X = x) = (p^\star)^{\sum_{i=1}^N x_i}(1-p^\star)^{N-\sum_{i=1}^N x_i}$$

Bezüglich des so definierten Maßes $\mathbb{P}^\star$ ist

$$S(n) = S_0 u^{Z_n} d^{n-Z_n} \qquad n = 0,...,N$$

ein geometrischer Random Walk mit $\mathbb{E}^\star S(1) = S_0(1+\varrho)$.
Daher ist $(S^\star(n))$ ein $\mathbb{P}^\star$-Martingal und $\mathbb{P}^\star$ damit ein äquivalentes Martingalmaß.

# 5 Bewerten von Derivaten

Auch in diesem Kapitel setzen wir ein endliches $\Omega$ voraus und betrachten ein Finanzmarktmodell über $N$ Perioden mit Preisprozess $(S_1,...,S_d)$ der risky assets und $S_0$ des Numeraire Assets. Weiter nehmen wir an, dass $S_0(0) = 1$ ist. Ist dies nicht erfüllt, kann man dies entweder durch Normalisierung erreichen oder beachten, dass in den betreffenden Aussagen das Anfangskapital in Einheiten des Numeraire Assets notiert wird.
Grundannahme: Der Finanzmarkt ist arbitragefrei $\Leftrightarrow$ Es existiert ein äquivalentes Martingalmaß
Bezeichne mit $\mathcal{P}$ die Menge aller äquivalenten Martingalmaße. Dann ist $\mathcal{P}$ eine konvexe Teilmenge aller zu $\mathbb{P}$ äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaße.

## 5.1 Claim und Hedge

Ein **Derivat** ist ein Wertpapier, dass eine Auszahlung am Ende der Laufzeit (hier: $N$) verbrieft. Dies bedeutet, dass dem Käufer des Derivats das Recht auf die im Derivat spezifizierte Auszahlung garantiert wird. Mathematisch gesehen entspricht dies einer $\mathcal{F}_n$ messbaren Abbildung $C$. Diese wird auch als **Claim** bezeichnet, z.B: $C = (S(N) - K)^+$. Der diskontierte Claim $C^\star = \frac{C}{S_0(N)}$ ist dann die Claimauszahlung, notiert in Einheiten des Numeraire Assets.
Denkt man an das Replikationsprinzip, so ist eine Strategie gesucht, die durch Handel am Finanzmarkt den Claim, also die Derivateauszahlung, repliziert. Im Finanzmarktmodell bedeutet dies:
Gesucht ist ein Anfangskapital $V_0$ und ein $H \in \mathcal{H}$ ($\mathcal{H}$ ist die Menge aller vorhersehbaren Prozesse) mit

$$V_0 + \sum_{i=1}^N < H(n), \Delta S^\star(n) > = V_0 + (H \cdot S^\star)(N) = C^\star.$$

$V_0$ und $H$ definieren dann eindeutig eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $(\varphi, H)$ mit $V_0((\varphi,H)) = V_0$ und $V_N((\varphi,H)) = C$.
Ist dies möglich, so heißt $C$ **hedgebar** und $(\varphi, H)$ bzw $V_0$ und $H$ definieren eine **Hedgestrategie**.
In Analogie zum Replikationsprinzip kann man sich nun fragen:

Ist $V_0$ der eindeutige arbitragefreie Anfangspreis für $C$?

Ein Anfangspreis $x > V_0$ liefert ein Arbitrage für den Verkäufer, denn:

- gehe short im Claim $\Rightarrow$ erhalte $x$.
- investiere $V_0$ in die selbstfinanzierende Handelsstrategie.
- $x - V_0$ ist dann der Gewinn am Anfang.

- Handel entsprechend der Strategie.
- Benutze den Gewinn der Handelsstrategie am Ende, um die short Position im Claim aufzulösen $\Rightarrow V_N(H) - C = 0$.
- $x - V_0$ ist der risikolose Gewinn.

Ein Anfangspreis $x < V_0$ liefert ein Arbitrage für den Käufer, denn:

- gehe short im Hedge $\Rightarrow$ erhalte $V_0$.
- investiere $x$ in den Claim.
- $V_0 - x$ ist dann der Gewinn am Anfang.
- Handel entsprechend der short Position im Hedge.
- Benutze den Claim am Ende, um die short Position im Hedge aufzulösen $\Rightarrow C - V_N(H) = 0$.
- $V_0 - x$ ist der risikolose Gewinn.

Diese Argumentation legt nahe, dass $x = V_0$ der eindeutige arbitragefreie Anfangspreis eines hedgebaren Claims $C$ ist. Im folgenden wird dies mathematisch präzisiert:

## 5.2 Satz

Seien $C$ ein hedgebarer Claim und $H, H' \in \mathcal{H}$ Hedgestrategien zu den Anfangspreisen $V_0$ und $V_0'$.
Dann gilt:

$$V_0 = V_0' = \mathbb{E}^\star C^\star \qquad \text{für jedes } \mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$$

und

$$V_0 + (H \cdot S^\star)(n) = V_H(n) = V_{H'}(n) = V_0' + (H' \cdot S^\star)(n) = \mathbb{E}^\star(C^\star | \mathcal{F}_n)$$

für alle $n = 1, ..., N$

*Beweis.* Dies folgt aus der Martingaleigenschaft von $S^\star$ bzw. $(H \cdot S^\star)$ bzgl. $\mathbb{P}^\star$:

$$V_0 + (H \cdot S^\star)(N) = C^\star = V_0' + (H' \cdot S^\star)(N)$$

Also gilt für jedes $\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$

$$V_0 \overset{\mathbb{E}^\star((H \cdot S^\star))=0}{=} \mathbb{E}^\star(V_0 + (H \cdot S^\star)(N)) = \mathbb{E}^\star C^\star = \mathbb{E}^\star(V_0' + (H' \cdot S^\star)(N)) = V_0'$$

Das gleiche Argument liefert:

$$\begin{aligned} V_H^\star(n) = V_0 + (H \cdot S^\star)(n) &= \mathbb{E}^\star(V_0 + (H \cdot S^\star)(N) | \mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}^\star(C^\star | \mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}^\star(V_0' + (H' \cdot S^\star)(N) | \mathcal{F}_n) \\ &= V_0' + (H' \cdot S^\star)(n) \\ &= V_{H'}^\star(n) \end{aligned}$$

□

## 5.3 Superreplizierbare Claims

Ein Claim heißt **upper hedgbebar** zum Anfangspreis $V_0$, falls es ein $H \in \mathcal{H}$ gibt mit

$$V_0 + (H \cdot S^\star)(N) \geq C^\star$$

Dies ist der Fall, wenn

$$C^\star - V_0 \in \mathcal{K}^\star$$

$\boxed{\text{Erinnerung: } \mathcal{G}^\star = \{(H \cdot S^\star)(N) : H \in \mathcal{H}\} \text{ und } \mathcal{K}^\star = \{C^\star : \exists G \in \mathcal{G}^\star \text{ mit } G \geq C^\star\}}$

$C$ heißt **strikt upper hedgebar** zum Anfangspreis $V_0$, falls es ein $H \in \mathcal{H}$ gibt mit

$$V_0 + (H \cdot S^\star)(N) \geq C^\star$$

und

$$\mathbb{P}(V_0 + (H \cdot S^\star)(N) > C^\star) > 0$$

Ein Claim heißt **lower hedgbebar** zum Anfangspreis $V_0$, falls es ein $H \in \mathcal{H}$ gibt mit

$$V_0 + (H \cdot S^\star)(N) \leq C^\star$$

$C$ heißt **strikt lower hedgebar** zum Anfangspreis $V_0$, falls es ein $H \in \mathcal{H}$ gibt mit

$$V_0 + (H \cdot S^\star)(N) \leq C^\star$$

und

$$\mathbb{P}(V_0 + (H \cdot S^\star)(N) < C^\star) > 0$$

Der Kegel $\mathcal{K}^\star$ der zum Anfangskapital 0 upper hedgebaren Claims lässt sich durch die erwarteten Auszahlungen bzgl. der äquivalenten Martingalmaße charakterisieren.

## 5.4 Satz

Für einen Claim $C$ sind äquivalent:

(a) $C^\star \in \mathcal{K}^\star$

(b) $\mathbb{E}^\star C^\star \leq 0$ für alle $\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$

*Beweis.* $\underline{(i) \Rightarrow (ii):}$

Ist $C^\star \in \mathcal{K}^\star \Rightarrow \exists H \in \mathcal{H}$ mit $(H \cdot S^\star)(N) \geq C^\star$
$\Rightarrow 0 = \mathbb{E}^\star((H \cdot S^\star)(N)) \geq \mathbb{E}^\star C^\star$ für alle $\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$

$\underline{(ii) \Rightarrow (i):}$

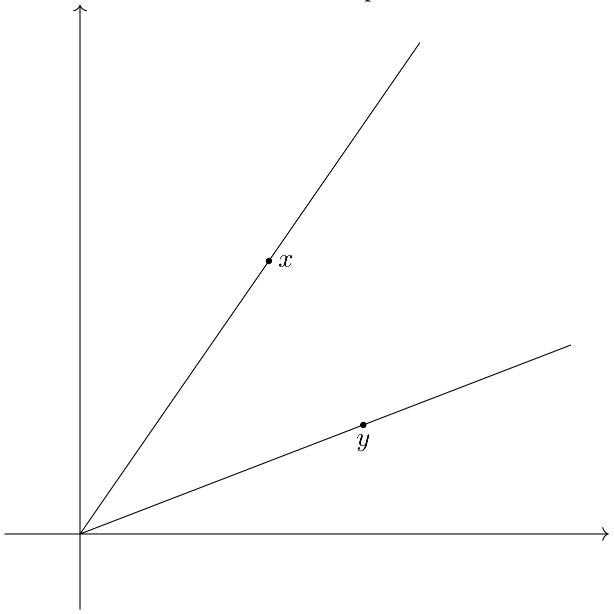
Dies ergibt sich aus dem Bipolartheorem

□

## 5.5 Das Bipolartheorem

### 5.5.1 Definition ((konvexer) Kegel, Bipolar)

Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit einem Skalarprodukt. Ein $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Kegel**, wenn $\lambda x \in \mathcal{C}$ für alle $\lambda > 0, x \in \mathcal{C}$.

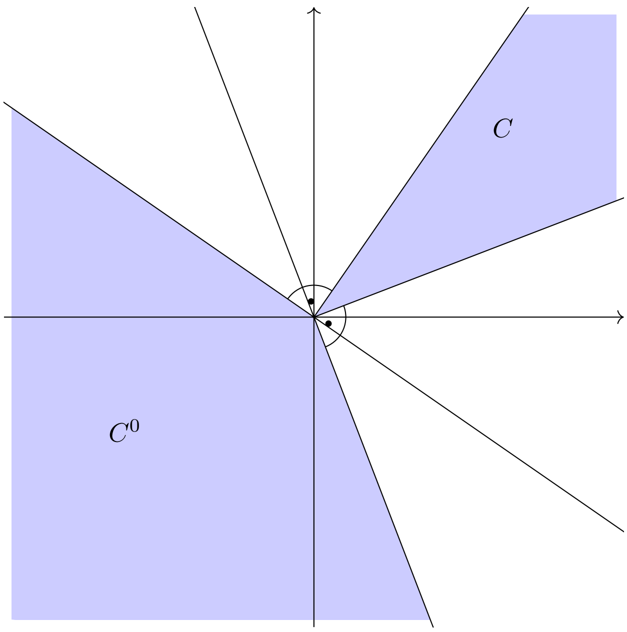



$\mathcal{C}$ heißt **konvexer Kegel**, wenn $\mathcal{C}$ konvex und ein Kegel ist, d.h. wenn gilt:

- $x \in \mathcal{C}, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in \mathcal{C}$
- $x, y \in \mathcal{C} \Rightarrow x + y \in \mathcal{C}$

Zu einem Kegel $\mathcal{C}$ ist die Polarmenge $\mathcal{C}^0$ definiert durch

$$\mathcal{C}^0 := \{y \in \mathbb{R}^n :< x, y >\leq 0 \text{ für alle } x \in \mathcal{C}\}$$




$\mathcal{C}^0$ ist ein abgeschlossener Kegel, denn

$$y \in \mathcal{C}^0, \lambda > 0 \Rightarrow < x, \lambda y >= \lambda < x, y >= 0 \Rightarrow \lambda y \in \mathcal{C} \forall x \in \mathcal{C}$$

Die Abgeschlossenheit folgt aus der Stetigkeit des Skalarprodukts.

### 5.5.2 Das Bipolartheorem

Ist $\mathcal{C}$ ein konvexer Kegel, so stimmt das **Bipolar** von $\mathcal{C}$ mit dem Abschluss von $\mathcal{C}$ überein:

$$\underbrace{(\mathcal{C}^0)^0}_{\text{Bipolar}} = \underbrace{\overline{\mathcal{C}}}_{\text{Abschluss}}$$

Anwendung in Satz 5.4 Für eine Menge $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}^n$ sei $cone(E)$ der von $E$ erzeugte Kegel:

$$cone(E) := \bigcap_{\substack{C \text{ Kegel} \\ E \subseteq C}} C = \{\lambda x : \lambda > 0, x \in E\}.$$

Die Menge der äquivalenten Martingalmaße entspricht einer konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, wenn $n = |\Omega|$ ist. Für den davon erzeugten Kegel behaupten wir zunächst, dass er mit der Polarmenge von $\mathcal{K}^*$ übereinstimmt.

$$(\mathcal{K}^*)^0 = \overline{cone(\mathcal{P})} = cone(\overline{\mathcal{P}})$$

*Beweis.* Die Inklusion von rechts nach links folgt einfach aus der Tatsache, dass

$$\mathbb{E}^\star C^* \leq 0$$

für alle $\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$ und $C^* \in \mathcal{K}^*$ gilt. Denn dies impliziert $\mathcal{P} \subset (\mathcal{K}^*)^0$. Damit folgt dies auch für den von $\mathcal{P}$ erzeugten Kegel. Wegen der Abgeschlossenheit der Polarmenge erhält man die behauptete Inklusion.
Für die Teilmengenbeziehung von links nach rechts, muss man sich zunächst überlegen, dass $L^+ \supset (\mathcal{K}^*)^0$. Dies folgt aus der Tatsache, dass $L^- \subset \mathcal{K}^*$ und $(L^-)^0 = L^+$ gilt. Hierbei bezeichnet $L^-$ die Menge der messbaren Abbildungen $X$, die keine positiven Werte annehmen können, für die also $X(\omega) \leq 0$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt. Jedes $C^* \leq 0$ wird vom hedgebaren Claim 0 übertroffen. Daher gilt $L^- \subset \mathcal{K}^*$. Die zweite Identität ist elementar nachweisbar. Da allgemein aus $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ folgt $\mathcal{C}_1^0 \supset \mathcal{C}_2^0$, erhält man $L^+ \supset (\mathcal{K}^*)^0$.
Ist $p : \Omega \to \mathbb{R} \in (\mathcal{K}^*)^0$, so hat also $p$ nur nichtnegative Funktionswerte. Ist $\sum_{i=1}^n p(\omega_i) = 0$, so ist $p = 0$ und damit in $\overline{cone(\mathbb{P})}$ enthalten. Ist $\sum_{i=1}^n p(\omega_i) > 0$, so kann durch $\mathbb{P}^*(\omega) = \frac{p(\omega)}{\sum_{i=1}^n p(\omega_i)}$ für alle $\omega \in \Omega$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert werden. Die Eigenschaft $p \in (\mathcal{K}^*)^0$ impliziert $\mathbb{E}^\star C^* \leq 0$ für alle $C^* \in \mathcal{K}^*$. Dies impliziert, dass $\mathbb{P}^*$ ein Martingalmaß ist und somit $\mathbb{P}^* \in \overline{\mathcal{P}}$ gilt. Daher folgt $p \in cone(\overline{\mathcal{P}}) = \overline{cone(\mathcal{P})}$. ☐

Auf die Identität $(\mathcal{K}^*)^0 = \overline{cone(\mathcal{P})}$ wird nun das Bipolartheorem angewandt. Es ergibt sich

$$\mathcal{K}^* = (\mathcal{K}^*)^{00} = \overline{cone(\mathcal{P})}^0 = (cone(\mathcal{P})^0.$$

Ist $\mathbb{E}^\star C^* \leq 0$ für alle $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$, so ist $C^* \in cone(\mathcal{P})^0$. Da $cone(\mathcal{P})^0 = \mathcal{K}^*$ gilt, folgt also $C^* \in \mathcal{K}^*$.

## 5.6 Beweis des Bipolartheorems

*Beweis.* Zeige die gegenseitigen Inklusionen. Ist $x \in \mathcal{C}$, so gilt $< x, y > \leq 0$ für alle $y \in \mathcal{C}^0$. Dies bedeutet aber, dass $x \in (\mathcal{C}^0)^0$ ist. Somit folgt $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}^{00}$. Wegen der Abgeschlossenheit der Polarmenge folgt $\overline{C} \subset \mathcal{C}^{00}$. Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion betrachten wir ein $x \in \mathcal{C}^{00}$ und nehmen an, dass $x \notin \overline{C}$ gilt. Dann können wir die kompakte Menge $\{x\}$ von der abgeschlossenen Menge $\overline{C}$ trennen. Es gibt also einen Vektor $\eta$ mit

$$\sup_{y \in \overline{C}} < y, \eta >= \beta << x, \eta > .$$

Wie beim Beweis des Satzes von Minkowski kann man sich leicht überlegen, dass $\beta = 0$ gelten muss. Dies impliziert $\eta \in \overline{\mathcal{C}}^0$, was zu einem Widerspruch führt, da $x \in \mathcal{C}^{00}$ und $< x, \eta >> 0$ gelten müssten. ☐

## 5.7 Upper und lower hedging Preise

Sei $C$ ein Claim.

$$p_+(C) := \inf\{x \in \mathbb{R} : C^\star \text{ ist upper hedgebar zum Anfangskapital } x\}$$

und

$$p_-(C) := \sup\{x \in \mathbb{R} : C^\star \text{ ist lower hedgebar zum Anfangskapital } x\}$$

Aus Satz 5.4 folgt, dass das Infimum bzw. Supremum angenommen wird.

### 5.7.1 Satz

(a) Die Menge der upper hedging Preise ist ein abgeschlossenes Intervall $[p_+(C), \infty)$

(b) Die Menge der lower hedging Preise ist ein abgeschlossenes Intervall $(-\infty, p_-(C)]$

(c) $p_-(C) \leq p_+(C)$

*Beweis.* $(i)$: Klar ist, dass die Menge der upper hedging Preise ein nach oben unbeschränktes Intervall bildet. Für die Abgeschlossenheit betrachte upper hedging Preise $a_n$ mit $a_n \downarrow a$.
Zu zeigen ist, dass $a$ ein upper hedging Preis ist.
Es gilt $C^\star - a_n \in \mathcal{K}^\star$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit wegen Satz 4.12

$$\mathbb{E}^\star(C^\star - a_n) \leq 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}.$$

Wegen $C^\star - a_n \longrightarrow C^\star - a$ folgt

$$0 \geq \mathbb{E}^\star(C^\star - a_n) \longrightarrow \mathbb{E}^\star(C^\star - a) \text{ für alle } \mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$$

Satz 5.4 liefert somit $C^\star - a \in \mathcal{K}^\star$.
Also ist $a$ ein upper hedging Preis.

$(ii)$: $(ii)$ geht wie $(i)$: $a$ ist ein lower hedging Preis genau dann, wenn es ein $K \in \mathcal{G}^\star$ gibt mit

$$\begin{aligned} a + K \leq C^\star &\Leftrightarrow -(C^\star - a) \leq K \\ &\Leftrightarrow -(C^\star - a) \in \mathcal{K}^\star \end{aligned}$$

Für eine Folge von lower hedging Preisen $(a_n)$ mit $a_n \uparrow a$ folgt also

$$\mathbb{E}^\star - (C^\star - a_n) \leq 0$$

für alle $\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$.
Wegen $C^\star - a_n \longrightarrow C^\star - a$ folgt somit

$$E^\star(-(C^\star - a)) \leq 0$$

für alle $\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$. Dies impliziert aber $-(C^\star - a) \in \mathcal{K}^\star$. Also ist $a$ ein lower hedging Preis.

$(iii)$: Ist $a$ ein lower hedging Preis und $b$ ein upper hedging Preis, so gilt:

$$\begin{aligned} (C^\star - b) \in \mathcal{K}^\star &\Leftrightarrow \mathbb{E}^\star(C^\star - b) \leq 0 \text{ für alle } \mathbb{P}^\star \in \mathcal{P} \\ &\Leftrightarrow \sup_{\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^\star C^\star \leq b \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -(C^\star - a) \in \mathcal{K}^\star &\Leftrightarrow E^\star(C^\star - a) \geq 0 \text{ für alle } \mathbb{P}^\star \in \mathcal{P} \\ &\Leftrightarrow \inf_{\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^\star C^\star \geq a \end{aligned}$$

□

Prinzipiell ergeben sich also zwei Fälle:

a) $p_-(C) = p_+(C)$

Dies ergibt sich, wenn $C$ hedgebar ist

b) $p_-(C) < p_+(C)$

Dies ergibt sich, wenn $C$ nicht hedgebar ist

## 5.8 Charakterisierung der arbitragefreien Preise

Sei $C$ ein Claim. Kann aus $x \in \mathbb{R}$ ein strikter $\substack{\text{upper} \\ \text{lower}}$ hedge finanziert werden, so ergibt sich ein Arbitrage für den $\substack{\text{Verkäufer} \\ \text{Käufer}}$.
Dies ist die Motivation für folgende Definition:

### 5.8.1 Definition (arbitragefreier Preis)

$x \in \mathbb{R}$ heißt **arbitragefreier Preis** für $C$, falls durch $x$ weder ein strikter upper, noch ein strikter lower hedge finanziert werden kann.
Mit $\Pi(C)$ bezeichne die Menge aller arbitragefreien Preise für $C$.

$\Pi(C)$ kann mittels des besten upper und lower hedging Preises charakterisiert werden:

### 5.8.2 Theorem

Für einen Claim $C$ gilt:

(a) $C$ ist hedgebar zum Anfangskapital $x$ genau dann, wenn

$$p_-(C) = x = p_+(C)$$

(b) Ist $C$ hedgebar zum Anfangskapital $x$, so ist

$$\mathbb{E}^\star C^\star = x \qquad \text{für alle } \mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$$

und

$$\Pi(C) = \{x\}$$

(c) Ist $C$ nicht hedgebar, so gilt

$$p_-(C) < p_+(C)$$

und

$$\Pi(C) = \big(p_-(C), p_+(C)\big) = \{\mathbb{E}^\star C^\star : \mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}\}$$

*Beweis.* $a$): '$\Rightarrow$': Sei $C$ hedgebar zum Anfangskapital $x$.
$\Rightarrow \exists H \in \mathcal{H} : x + (H \cdot S^\star)(N) = C^\star$
$\Rightarrow C^\star - x \in \mathcal{K}^\star$
$\Rightarrow x$ ist ein upper hedging Preis.
Auch gilt:
$x - (-(H \cdot S^\star)(N)) = C^\star$
$\Rightarrow -(C^\star - x) \in \mathcal{K}^\star$
$\Rightarrow x$ ist ein lower hedging Preis.
Also gilt:
$x \le p_-(C) \le p_+(C) \le x$
$\Rightarrow p_-(C) = p_+(C)$

'$\Leftarrow$': Sei $p_-(C) = x = p_+(C)$
Wegen Satz 5.7.1 ist $x$ ein upper und lower hedging Preis. Also ist $C^\star - x \in \mathcal{K}^\star$ und $-(C^\star - x) \in \mathcal{K}^\star$.
$\Rightarrow C^\star - x \in \mathcal{K}^\star \cap (-\mathcal{K}^\star) = \mathcal{G}^\star$
Das heißt, es existiert eine $H \in \mathcal{H}$ mit

$$C^\star = x + (H \cdot S^\star)(N)$$

Also ist $C$ hedgebar zum Anfangskatpital $x$.

$b$): Sei $C$ hedgebar zum Anfangskapital $x$. Damit ist $C^\star - x \in \mathcal{G}^\star$.
Somit ist $0 = \mathbb{E}^\star(C^\star - x) \Leftrightarrow \mathbb{E}^\star C^\star = x$ für alle $\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$
noch zu zeigen: $\Pi(C) = \{x\}$
"$\supseteq$": Es ist weder ein strikter upper, noch ein strikter lower hedge aus $x$ finanzierbar, denn $\mathbb{E}^\star C^\star = x = \mathbb{E}^\star(x + (H \cdot S^\star)(N))$ für alle $H \in \mathcal{H}$.
Also ist $x \in \Pi(C)$.
"$\subseteq$": $C^\star$ ist hedgebar zum Anfangskapital $x$, da

$$p_-(C) = x = p_+(C)$$

also existiert ein $H \in \mathcal{H}$ mit $x + (H \cdot S^\star)(N) = C^\star$.
Jedes $y > x$ kann man zur Finanzierung eines strikten upper hedge nutzen, denn

$$y + (H \cdot S^\star)(N) > x + (H \cdot S^\star)(N) = C^\star$$

Also ist $(x,\infty)\cap\Pi(C)=\varnothing$.
Jedes $y<x$ kann man zur Finanzierung eines strikten lower hedge nutzen, denn

$$y+(H\cdot S^\star)(N)<x+(H\cdot S^\star)(N)=C^\star$$

Also ist $(-\infty,x)\cap\Pi(C)=\varnothing$.
Da $x\in\Pi(C)$ ist also $\Pi(C)\subseteq\{x\}$

$c)$: Sei $C$ nicht hedgebar. Wegen $a)$ gilt $p_-(C)<p_+(C)$
"$\supseteq$": Gilt $p_-(C)<x<p_+(C)$, so kann weder ein strikter upper, noch ein strikter lower hedge aus $x$ finanziert werden.
Also ist $x\in\Pi(C)$.
"$\subseteq$": Ist $x\in\Pi(C)$, so kann weder ein strikter upper, noch ein strikter lower hedge aus $x$ finanziert werden.
Hieraus folgt:

$$x\in[p_-(C),p_+(C)]$$

Im Falle $p_-(C)<p_+(C)$ kann $x$ kein Randpunkt sein, da für $x=\begin{smallmatrix}p_+(C)\\p_-(C)\end{smallmatrix}$ ein strikter $\begin{smallmatrix}\text{upper}\\\text{lower}\end{smallmatrix}$ hedge finanziert werden kann.
Also ist $\Pi(C)\subseteq(p_-(C),p_+(C)$.
Begründung für den strikten upper hedge:
Wegen der Abgeschlossenheit existiert ein $H\in\mathcal{H}$ mit

$$p_+(C)+(H\cdot S^\star)(N)\geq C^\star$$

Es gilt: $\mathbb{P}^\star(p_+(C)+(H\cdot S^\star)(N)>C^\star)>0$, da sonst $H$ eine Hedgestrategie wäre, was $p_-(C)=p_+(C)$ implizieren würde.
Zeige weiter:

$$\sup_{\mathbb{P}^\star\in\mathcal{P}}\mathbb{E}^\star C^\star=p_+(C)$$

und

$$\inf_{\mathbb{P}^\star\in\mathcal{P}}\mathbb{E}^\star C^\star=p_-(C)$$

Ist $x<p_+(C)$, so existiert kein upper hedge für $C$ mit Anfangskapital $x\Rightarrow C^\star-x\notin\mathcal{K}^\star$.
Wegen Satz 5.4 existiert ein $\mathbb{P}^\star\in\mathcal{P}$ mit

$$\mathbb{E}^\star C^\star-x>0\Leftrightarrow\mathbb{E}^\star C^\star>x$$

Ist $x>p_-(C)$, so existiert kein lower hedge für $C$ mit Anfangskapital $x$. Also ist $-(C^\star-x)\notin\mathcal{K}^\star$.
Wegen Satz 5.4 existiert somit ein $\mathbb{P}^\star\in\mathcal{P}$ mit

$$\mathbb{E}^\star C^\star-x<0.$$

Also ist $x>\inf_{\mathbb{P}^\star\in\mathcal{P}}\mathbb{E}^\star C^\star$.
Bleibt noch zu zeigen: $(p_-(C),p_+(C))=\{\mathbb{E}^\star C^\star:\mathbb{P}^\star\in\mathcal{P}\}$
"$\subseteq$": klar, da $\inf\mathbb{E}^\star C^\star=p_-(C)$ und $\sup\mathbb{E}^\star C^\star=p_+(C)$.
"$\supseteq$": Für $x=p_+(C)$ existiert ein strikter upper hedge, also existiert ein $H\in\mathcal{H}$ mit

$$x+(H\cdot S^\star)(N)\geq C^\star$$

und

$$\mathbb{P}^\star(x+(H\cdot S^\star)(N)>C^\star)>0$$

und damit folgt

$$x>\mathbb{E}^\star C^\star\qquad\text{für alle }\mathbb{P}^\star\in\mathcal{P}$$

Für $x=p_-(C)$ existiert ein strikter lower hedge, also existiert ein $H\in\mathcal{H}$ mit

$$x+(H\cdot S^\star)(N)\leq C^\star$$

und

$$\mathbb{P}^\star(x+(H\cdot S^\star)(N)<C^\star)>0$$

und damit folgt

$$x<\mathbb{E}^\star C^\star\qquad\text{für alle }\mathbb{P}^\star\in\mathcal{P}$$

Also ist $p_-(C)<\mathbb{E}^\star C^\star<p_+(C)$ für alle $\mathbb{P}^\star\in\mathcal{P}$.

□

## 5.9 Erweitertes Finanzmarktmodell

Wir betrachten ein arbitragefreies Finanzmarktmodell mit $S = (S_1, ..., S_d)$ als Preisprozess der risky assets auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum. Mit $S_0$ bezeichne das Numeraire Asset und mit $(\mathcal{F}_n)_{n=0,...,N}$ den Informationsverlauf, wobei $\mathcal{F}_0$ trivial sei, d.h. $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$ für alle $A \in \mathcal{F}_0$. Im Markt sei $C$ die Auszahlung eines Derivates zum Zeitpunkt $N$. Das Konzept der arbitragefreien Bewertung ist bislang erklärt worden durch das Fehlen von strikten upper-hedge bzw. strikten lower-hedge Strategien, da solche zu Arbitragemöglichkeiten für den Verkäufer bzw. Käufer führen würden.
Alternativ kann man auch das Derivat bzw. dessen Auszahlung $C$ als neues Finanzgut interpretieren, dass in den Markt emittiert wird. Die Frage ist dann, welchen Anfangspreis bzw. Preisprozess man für dieses Derivat verlangen muss, damit der um den Handel mit $C$ erweiterte Finanzmarkt arbitragefrei ist. Wie wir im folgenden sehen werden, sind diese beiden Konzepte der arbitragfreien Bewertung konsistent in dem Sinne, dass sie die gleiche Menge an arbitragfeien Preisen generieren.
Das arbitragefreie Anfangspreisintervall für $C$ ist gegeben durch

$$\Pi(C) = (p_-(C), p_+(C)) \text{ bzw. } \Pi(C) = \{p(C)\} \text{ falls } p_-(C) = p_+(C)$$

Der Finanzmarkt soll um den Handel mit $C$ erweitert werden, so dass der erweiterte Finanzmarkt arbitragefrei bleibt.
Der Claim wird als $(d+1)$-tes risky asset angesehen. Bezeichne diesen Preisprozess mit $(S_{d+1}(n))_{n=0,...,N}$.
Ist $x \in \Pi(C)$, so existiert ein $\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$ mit $x = \mathbb{E}^\star C^\star$.
Durch $S_{d+1}(n) = S_0(n)\mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_n)$ für alle $n = 1, ..., N$ kann dann ein Preisprozess definiert werden, für den gilt

$$S_{d+1}(N) = S_0(N)C^\star = C$$

und

$$S_{d+1}(0) = \underbrace{S_0(0)}_{=1}\mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}^\star C^\star = x$$

Weiter ist $S^\star_{d+1}(n) = \mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_n)$ für $n = 0, ..., N$ ein $\mathbb{P}^\star$- Martingal und damit definiert $\mathbb{P}^\star$ ein äquivalentes Martingalmaß für das erweiterte Modell $(S_1, ..., S_d, S_{d+1})$.
Ist umgekehrt $(S_{d+1}(n))_{n=0,...,N}$ ein Preisprozess für $C$ mit $S_{d+1}(N) = C$ und ist das erweiterte Modell arbitragefrei, so exisitiert ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^\star$ für das erweiterte Modell.
Insbesondere gilt

$$S_{d+1}(n) = S_0(n)\mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_n) \qquad \text{für alle } n = 0, ..., N$$

Da $\mathbb{P}^\star$ auch ein äquivalentes Martingalmaß für das Ausgangsmodell ist und $S_{d+1}(0) = \mathbb{E}^\star C^\star$ ist, gilt

$$S_{d+1}(0) \in \Pi(C)$$

Insgesammt erhält man:

### 5.9.1 Theorem

Der Finanzmarkt ist um den Handel mit $C$ arbitragefrei erweiterbar genau dann, wenn es ein $\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$ gibt mit

$$S^\star_{d+1}(n) = \mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_n) \qquad \textbf{für alle } n = 0, ..., N$$

## 5.10 Vollständigkeit

Für hedgebare Claims ist der arbitragefreie Anfangspreis eindeutig bestimmt. Finanzmärkte, in denen jeder Claim hedgebar ist, nennt man vollständig.

### 5.10.1 Definition (vollständig)

Ein Finanzmarkt heißt **vollständig**, falls $p_-(C) = p_+(C)$ für alle Claims $C$ gilt.

## 5.11 2. Fundamentalsatz der Preistheorie

Für ein arbitragefreies Finanzmarktmodell mit äquivalentem Martingalmaß $\mathbb{P}^\star$ sind äquivalent:

(i) Das Modell ist vollständig

(ii) Das äquivalente Martingalmaß ist eindeutig, d.h.

$$\mathcal{P} = \{\mathbb{P}^\star\}$$

(iii) Zu jedem $\mathbb{P}^\star$-Martingal $M$ existiert eine Darstellung der Form

$$M_n = M_0 + (H \cdot S^\star)(n) \qquad \text{für alle } n = 0, ..., N$$

mit vorhersehbaren $H$.

*Beweis.* $(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $\mathbb{P}_1^\star$ ein weiteres äquivalentes Martingalmaß. Für $A \in \mathcal{F}_N$ ist $C = \mathbb{1}_A S_0(N)$ ein Claim mit $C^\star = \mathbb{1}_A$.
Also gilt:

$$\mathbb{P}_1^\star(A) = \mathbb{E}_1^\star C^\star \overset{C \text{ hedgebar}}{=} \mathbb{E}^\star C^\star = \mathbb{P}^\star(A)$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}_1^\star = \mathbb{P}^\star$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}^\star\} \Rightarrow p_+(C) = p_-(C)$ für alle $C$ und damit ist jedes $C$ hedgebar

$(i) \Rightarrow (iii)$: Sei $M$ ein $(\mathcal{F}_n)$-Martingal bzgl. $\mathbb{P}^\star$. Dann ist $C = M_N S_0(N)$ ein Claim mit $C^\star = M_N$. Wegen der Vollständigkeit ist $C$ hegebar. Also existiert ein $V_0 \in \mathbb{R}$ und ein vorhersehbares $H$ mit

$$V_0 + (H \cdot S^\star)(N) = \mathcal{C}^\star = M_N$$

Also gilt

$$V_0 = \mathbb{E}^\star(V_0 + (H \cdot S^\star)(N)) = \mathbb{E}^\star C^\star = \mathbb{E}^\star M_N = \mathbb{E}^\star M_0 = M_0$$

und

$$M_0 + (H \cdot S^\star)(n) = V_0 + (H \cdot S^\star)(n) = \mathbb{E}^\star(V_0 + (H \cdot S^\star)(N)|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^\star(M_N|\mathcal{F}_n) = M_n$$

$(iii) \Rightarrow (i)$: Ist $C$ ein Claim, so ist

$$M_n = \mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_n) \qquad \text{für alle } n = 0, ..., N$$

ein $\mathbb{P}^\star$-Martingal.
Wegen $(iii)$ gibt es zu $M_0 = \mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}^\star C^\star$ ein vorhersehbares $H$ mit

$$M_0 + (H \cdot S^\star)(N) = C^\star$$

Also ist $C$ hedgebar und der Finanzmarkt ist damit vollständig.

□

Man beachte, dass die Anfangsinformation durch eine triviale $\sigma$-Algebra $\mathcal{F}_0$ gegeben ist. Deshalb sind nur die Konstanten $\mathcal{F}_0$ messbar.

## 5.12 Satz

Das arbitragefreie CRR und das verallgemeinerte arbitragefreie CRR Modell sind vollständig.

*Beweis.* Dies folgt aus der Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes, kann aber auch direkt durch allgemeines Ausrechnen von Hedgestrategien bewiesen werden. □

## 5.13 Hedgen im CRR Modell

Für den Aktienpreisprozess im CRR Modell gilt:

$$S(n) = S(0)u^{Z_n}d^{n-Z_n} \qquad , \qquad Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Die Anzahl der Aufwärtssprünge in den ersten $n$ Perioden wird hierbei durch $Z_n$ gezählt. Gesucht ist ein vorhersehbares $H$ und Anfangskapital $V_0$ mit

$$V_0 + (H \cdot S^\star)(N) = C^\star = \frac{g(S(N))}{(1+\varrho)^N}$$

Für den Wert der Hedgestrategie nach $n$ Perioden gilt:

$$\begin{aligned}
V_n^\star &= V_0 + (H \cdot S^\star)(n) \\
&= \mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{E}^\star(\mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{E}^\star(V_{n+1}^\star|\mathcal{F}_n) \\
&\underset{\text{Eigenschaft}}{\overset{\text{Markov}}{=}} \mathbb{E}^\star(V_{n+1}^\star|S(n)) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}^\star(V_{n+1}^\star|Z(n)=k)\mathbb{1}_{\{S(n)=S(0)u^k d^{n-k}\}}
\end{aligned}$$

Setze

$$v^\star(n,k) = \mathbb{E}^\star(V^\star(n+1)|Z(n)=k) = \mathbb{E}^\star(C^\star|Z(n)=k) \qquad \text{für alle } n=0,...,N, k=0,...,n$$

$v^\star(n,k)$ beschreibt den diskontierten Preis des Claims zum Zeitpunkt $n$, wenn bis dahin $k$ Aufwärtssprünge erfolgt sind. Rekursiv kann $v^\star$ berechnet werden durch.
Initialisierung:

$$v^\star(N,k) = \frac{1}{(1+\varrho)^N} g(S(0)u^k d^{N-k}) \qquad k=0,...,N$$

Für $n = N-1$ bis $n=0$ ist

$$v^\star(n,k) = p^\star v^\star(n+1,k+1) + (1-p^\star)v^\star(n+1,k) \qquad k=0,...,n$$

Es gilt:

$$V_n^\star = \sum_{k=0}^{n} v^\star(n,k)\mathbb{1}_{\{Z(n)=k\}}$$

Damit ist der diskontierte Wertprozess der Hedgestrategie algorithmisch berechnet.
Berechnung der Hedge-Strategie im CRR Modell:

$$C = g(S(N))$$

Gesucht ist $(H_n)_{n=1,...,N}$ mit

$$V_0 + \sum_{k=1}^{N} H(k)\Delta S^\star(k) = C^\star$$

$$H(n) = \sum_{k=0}^{n-1} H(n)\mathbb{1}_{\{Z(n-1)=k\}} = \sum_{k=0}^{n-1} h(n,k)\mathbb{1}_{\{Z(n-1)=k\}}$$

$h(n,k)$ wird rekursiv berechnet:
$v^\star(n-1,k)$ ist der Preis in Einheiten des Numeraire Assets nach $n-1$ Perioden und $k$ Aufwärtssprüngen.
Für die $n$-te Periode ist dann $v^\star(n, k+X_n)$ zu hedgen.
Der Hedge berechnet sich aus

$$v^\star(n-1,k) + h(n,k)\Delta S^\star(n) = v^\star(n, Z_n) \qquad \text{auf } \{Z_{n-1}=k\}$$

Dies führt auf die Gleichungen

$$v^\star(n-1,k) + h(n,k)S^\star(n-1)(\frac{u}{1+\varrho} - 1) = v^\star(n,k+1)$$

$$v^\star(n-1,k) + h(n,k)S^\star(n-1)(\frac{d}{1+\varrho} - 1) = v^\star(n,k)$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} h(n,k) &= \frac{v^\star(n,k+1) - v^\star(n-1,k)}{S^\star(n-1)(\frac{u}{1+\varrho} - 1)} \\ &= \frac{v^\star(n,k) - v^\star(n-1,k)}{S^\star(n-1)(\frac{d}{1+\varrho} - 1)} \qquad \text{für alle } k = 0,...,n-1 \end{aligned}$$

Beachte: Auf $\{Z(n-1) = k\}$ ist

$$S^\star(n-1) = \frac{1}{1+\varrho} S(0)u^k d^{n-1-k}$$

Man erhält also den Wertprozess und Hedge für den Claim $C = g(S(N))$ durch folgenden Algorithmus:
Initialisierung:
$v^\star(N,k) = g(S_0 u^k d^{N-k})(\frac{1}{1+\rho})^N$ für $k = 0,\cdots,N$
Rekursionsschritt:
Für $n = N-1$ downto 0 und für $k = 0$ to $n$ do
$v^\star(n,k) = p^\star v^\star(n+1,k+1) + (1-p^\star)v^\star(n+1,k)$
$h(n+1,k) := \dfrac{v^\star(n+1,k+1) - v^\star(n,k)}{S^\star(n)(\frac{u}{1+\varrho} - 1)}$
$S^\star(n) = S(0)u^k d^{n-k}\frac{1}{1+\varrho}$
Der Wertprozess in Einheiten des Numeraire Assets für den Hedge erhält man durch

$$V_n^\star = \sum_{k=0}^{n} v^\star(n,k)\mathbb{1}_{\{Z(n)=k\}} \qquad n = 0,...,N,$$

die Hedgingstrategie durch

$$H(n) = \sum_{k=0}^{n-1} h(n,k)\mathbb{1}_{\{Z(n-1)=k\}}$$

## 5.14 Algorithmische Berechnung des upper und lower hedging Preises im Trinomialmodell

Prinzipiell kann wie im CRR Modell durch rückwärtige Berechnung in den jeweiligen Einperiodenmodellen die upper und lower hedge Strategie bestimmt werden.
1. Schritt: Einperiodenfall
$N = 1$, Anfangspreis $S_0$, Endkurse $\begin{pmatrix} uS_0 \\ mS_0 \\ dS_0 \end{pmatrix}$, Zinsrate $\varrho$ mit $d < 1+\varrho < u$.

$$\Delta S^\star(1) = S^\star(1) - S^\star(0) = \begin{pmatrix} \frac{uS_0}{1+\varrho} - S_0 \\ \frac{mS_0}{1+\varrho} - S_0 \\ \frac{dS_0}{1+\varrho} - S_0 \end{pmatrix} = S_0 \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{u}{1+\varrho} - 1 \\ \frac{m}{1+\varrho} - 1 \\ \frac{d}{1+\varrho} - 1 \end{pmatrix}}_{=:R} = S_0 R$$

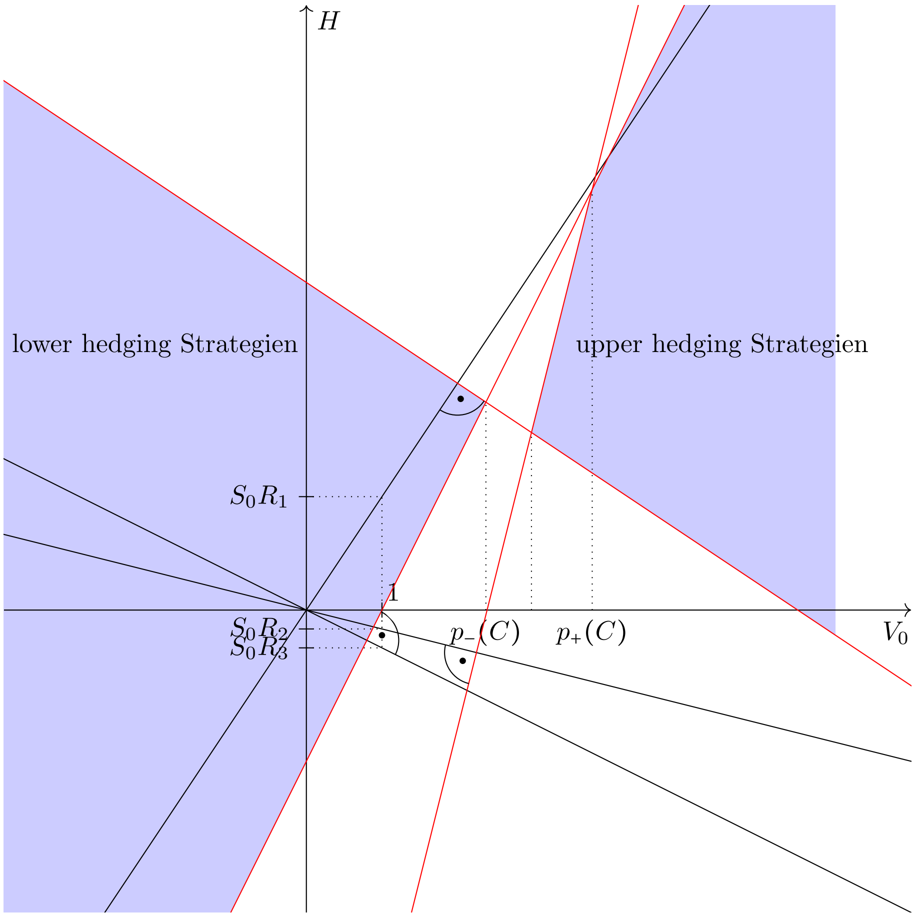
Ein Claim $C$ entspricht einem Vektor $C = (c_1, c_2, c_3)$

$$C^\star = \begin{pmatrix} c_1^\star \\ c_2^\star \\ c_3^\star \end{pmatrix} \qquad \text{mit } c_i^\star = \frac{c_i}{1+\varrho}$$

Ein Anfangskapital $V_0$ und $H$ Anteile im risky asset liefern einen upper Hedge, wenn

$$V_0 + H\Delta S^\star(1) \geq C^\star \Leftrightarrow \begin{pmatrix} V_0 + HS_0R_1 \\ V_0 + HS_0R_2 \\ V_0 + HS_0R_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} c_1^\star \\ c_2^\star \\ c_3^\star \end{pmatrix}$$

Der Durchschnitt der Halbräume $\{(V_0, H) : V_0 + HS_0R_i \geq c_i^\star \text{ mit } i = 1,2,3\}$ entspricht der Menge der upper hedgbaren Claims.




$V_0 + HS_0R_1 = c_1^\star \Leftrightarrow < \binom{V_0}{H}, \binom{1}{S_0R_1} >= c_1^\star$
$V_0 + HS_0R_2 = c_2^\star \Leftrightarrow < \binom{V_0}{H}, \binom{1}{S_0R_2} >= c_2^\star$
$V_0 + HS_0R_3 = c_3^\star \Leftrightarrow < \binom{V_0}{H}, \binom{1}{S_0R_3} >= c_3^\star$

Numerische Berechnung:
Berechnung der Schnittpunkte:

$$\begin{matrix} V_0^{(1)} + H^{(1)}S_0R_2 = c_2^\star \\ V_0^{(1)} + H^{(1)}S_0R_3 = c_3^\star \end{matrix} \Leftrightarrow H^{(1)} = \frac{c_3^\star - c_2^\star}{S_0(R_3 - R_2)} \Rightarrow V_0^{(1)} = c_2^\star - \frac{c-3^\star - c_2^\star}{R_3 - R_2} R_2$$

Entsprechend:

$$V_0^{(2)} + H^{(2)}S_0R_1 = c_1^\star$$
$$V_0^{(2)} + H^{(2)}S_0R_3 = c_3^\star$$

und:

$$V_0^{(3)} + H^{(3)}S_0R_1 = c_1^\star$$
$$V_0^{(3)} + H^{(3)}S_0R_2 = c_2^\star$$

Ist $V_0^{(1)} = V_0^{(2)} = V_0^{(3)}$, so ist $p_-(C) = p_+(C) = V_0^{(1)}$ und $H^- = H^+ = H = H^{(1)} = H^{(2)} = H^{(3)}$ der Hedge für $C$.
Andernfalls, bestimme l(inks), m(itte), r(echts), sodass $V_0^{(l)} \leq V_0^{(m)} \leq V_0^{(r)}$.
Entscheide, ob $(V_0^{(m)}, H^{(m)}$ ein upper Hedge ist, durch $V_0^{(m)} + H^{(m)}S_0R_m > c_m^\star$.
Ist dies der Fall, so ist $p_+(C) = V_0^{(m)}$ und $H^+ = H^{(m)}$ der upper Hedge und $p_-(C) = V_0^{(l)}$ mit $H^- = H^{(l)}$ der lower Hedge.
Ist dies nicht der Fall, so ist $p_-(C) = V_0^{(m)}$ und $H^- = H^{(m)}$ der lower Hedge und $p_+(C) = V_0^{(r)}$ mit $H^+ = H^{(r)}$ der upper Hedge.

2. Schritt Mehr-Perioden-Fall
$N$-Perioden
$S(n) = S_0 \prod_{i=1} Y_i, (Y_i)$ iid ($Y_i$ hat nur Werte in $\{m, u, d\}$)
$S_0 u^{Z_1(n)} d^{Z_2(n)} m^{n-(Z_1(n)+Z_2(n)}$
mit $Z_1(n) = \sum_{k=1} \mathbb{1}_{\{Y_k=n\}}, Z_2(n) = \sum_{k=1} \mathbb{1}_{\{Y_k=d\}}$
Der Claim hat die Form $C = g(S(N))$. Rekursiv wird die upper und lower hedging Strategie berechnet:
Initialisierung:
$v^+(N,(k,l)) = v^-(N,(k,l)) = (1+\varrho)^{-N} g(S_0 u^k d^l m^{N-(k+l)})$ für $k = 0, \cdots, N, l = 0, \cdots, N-k$
Rekursionsschritt
for $n = N - 1 donwto 0$:
for $k = 0, ..., n$ and for $l = 0, ..., n-k$
Berechne den upper hedging Preis, sowie den upper Hedge im Tinomialmodell mit Anfangskurs $S_0 u^k d^l m^{n-(k+l)}$ und Claim $C^\star = (v^+(n+1,(k+1,l)), v^+(n+1,(k,l)), v^+(n+1,(k,l+1)))$.
Setze: $v^+(n,(k,l)) = p_+(C)$ und $h^+(n+1,(k,l)) = H^+$.
Berechne den lower hedging Preis, sowie den lower Hedge im Trinomialmodell mit Anfangskurs $S_0 u^k d^l m^{n-(k+l)}$ und Claim $C^\star = (v^-(n+1,(k+1,l)), v^-(n+1,(k,l)), v^-(n+1,(k,l+1)))$.
Setze: $v^-(n,(k,l)) = p_-(C)$ und $h^-(n+1,(k,l)) = H^-$.
Es gilt:
$v^+(0,(0,0)) = p_+(C)$ ist das Anfangskapital des minimalen upper hedges und
$H_n^+ := \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1-k} h^+(n,(k,l)) \mathbb{1}_{\{Z_1(n-1)=k\}} \mathbb{1}_{\{Z_2(n-1)=l\}}$
die minimale upper hedge Strategie.
Insbesondere gilt damit:

$$p_+(C) + \sum_{k=1}^{N} H(k) \Delta S^\star(k) \geq C^\star$$

Entsprechend:
$v^-(0,(0,0)) = p_-(C)$ ist das Anfangskapital des maximalen lower hedges und
$H_n^- := \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1-k} h^-(n,(k,l)) \mathbb{1}_{\{Z_1(n-1)=k\}} \mathbb{1}_{\{Z_2(n-1)=l\}}$
die maximale lower hedge Strategie.
Insbesondere gilt damit:

$$p_-(C) + \sum_{k=1}^{N} H(k) \Delta S^\star(k) \leq C^\star$$

## 5.15 Allgemeine Call-Formel

Betrachte einen Finanzmarkt über $N$-Perioden mit $(S(n))_{n=0,\ldots,N}$ als Preisprozess für das risky asset mit $S(n) > 0$ für alle $n$. Sei $(\beta(n))_{n=0,\ldots,N}$ ein Geldmarktkonto und $(\mathcal{F}_n)_{n=0,\ldots,N}$ die Filtration.
$\beta(n) = \prod_{k=1}^{n} 1 + \varrho(k)$ mit vorhersehbaren Prozess $\varrho > -1$.
Wir betrachten einen Call mit Basis $K$, d.h. $C = (S(N) - K)^+$ ist die Claimauszahlung nach $N$ Perioden.
Annahme: $C$ ist hedgebar und das Modell ist arbitragefrei.
Dann gilt:
$\mathbb{E}^\star C^\star$ ist der eindeutige arbitragfreie Anfangspreis für $C$, wobei $\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$ beliebig gewählt werden kann.

$$\begin{aligned}
p(C) = E^\star C^\star &= \mathbb{E}^\star \left( \frac{(S(N) - K)^+}{\beta(N)} \right) \\
&= \mathbb{E}^\star \frac{S(N)}{\beta(N)} \mathbb{1}_{\{S(N)>K\}} - \mathbb{E}^\star \frac{K}{\beta(N)} \mathbb{1}_{\{S(N)>K\}} \\
&= \mathbb{E}^\star S^\star(N) \mathbb{1}_{\{S(N)>K\}} - K \mathbb{E}^\star \frac{1}{\beta(N)} \mathbb{1}_{\{S(N)>K\}} \\
&= S(0) \mathbb{E}^\star \frac{S^\star(N)}{S(0)} \mathbb{1}_{\{S(N)>K\}} - K B(0,N) \mathbb{E}^\star \frac{1}{\beta(N)} \frac{1}{B(0,N)} \mathbb{1}_{\{S(N)>K\}}
\end{aligned}$$

mit $B(0,N) = \mathbb{E}^\star \frac{1}{\beta(N)}$.
Definiere äquivalente Maße $\mathbb{P}_1^\star$ und $\mathbb{P}_2^\star$ durch

$$\left.\frac{d\mathbb{P}_1^\star}{d\mathbb{P}^\star}\right|_{\mathcal{F}_N} = \frac{S^\star(N)}{S(0)}$$

und

$$\frac{d\mathbb{P}_2^\star}{d\mathbb{P}^\star}\bigg|_{\mathcal{F}_N} = \frac{1}{\beta(N)}\frac{1}{B(0,N)}$$

Dann gilt: $p(C) = S(0)\mathbb{P}_1^\star(S(N) > K) - KB(0,N)\mathbb{P}_2^\star(S(N) > K)$
Im CRR Modell ist $\beta(N) = (1+\varrho)^N$, also $\mathbb{P}_2^\star = \mathbb{P}^\star$.
Somit folgt: $p(C) = S(0)\mathbb{P}_1^\star(S(N) > K) - K(1+\varrho)^{-N}\mathbb{P}^\star(S(N) > K)$
$\frac{S(N)}{S(0)} = u^{Z(N)}d^{N-Z(N)}$

$$S(N) > K \Leftrightarrow Z(N) > \underbrace{\frac{\ln(\frac{K}{S(0)}) - N\ln d}{\ln u - \ln d}}_{=:b_N}$$

Bezüglich $\mathbb{P}^\star$ ist $Z(N)$ eine $\mathrm{Bin}(N,p^\star)$ verteilte Zufallsvariable mit $p^\star = \frac{(1+\varrho)-d}{u-d}$.
Im CRR Modell ist bzgl. $\mathbb{P}_1^\star$ der Zählprozess $(Z(n))_{n=0,\dots,N}$ ein Random Walk:

$$Z(n) = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad \mathbb{P}_1^\star(X_k = 1) = p_1^\star = \frac{p^\star u}{1+\varrho}$$

Bezüglich $\mathbb{P}_1^\star$ ist $Z(N)$ eine $\mathrm{Bin}(N,p_1^\star)$ verteilte ZV.
Also gilt

$$p(C) = S(0)\mathrm{Bin}(N,p_1^\star)((b_N,\infty)) - K\frac{1}{(1+\varrho)^N}\mathrm{Bin}(N,p^\star)((b_N,\infty))$$

Dies ist die **diskrete Black-Scholes Formel**.

# 6 Das Black-Scholes Modell

Ziel: Modellierung von Finanzmärkten in stetiger Zeit.

## 6.1 Beschreibung des Modells

Der Finanzmarkt besteht aus:

- einem Geldmarktkonto
- einem risky asset
- der Laufzeit $T$

Geldmarktkonto:

- Annahme: deterministische, stetige Verzinsung mit Rate $r$. Daher entwickelt sich das Geldmarktkonto gemäß

$$\beta(t) = e^{rt} \qquad 0 \le t \le T$$

risky asset:

- Anfangskurs $S_0 > 0$
- Annahme:
  a) Die relativen Kursänderungen sind unabhängig und zeitlich stationär.
  b) Die Kursänderungen sind stetig.

Hieraus folgt, dass der Kursverlauf $(S(t))_{0\le t\le T}$ des risky assets durch einen stochastischen Prozess der Form

$$S(t) = S(0)\exp(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t)e^{\mu t} \qquad t \le T$$

mit $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ beschrieben werden kann.
$(W(t))_{t\ge 0}$ bezeichnet dabei den Wiener-Prozess. Dieser ist definiert durch die folgenden Bedingungen:

(i) $W(0) = 0$ $\mathbb{P}$-f.s.

(ii) Für beliebige $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$, $n \in \mathbb{N}$ sind

$$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

stochastisch unabhängig.

(iii) Für alle $0 \leq s, t > 0$ gilt:

$$W_{s+t} - W_s \sim W_t - W_0 = W_t \sim N(0,t)$$

(iv) $(W_t)_{t\geq 0}$ hat stetige Pfade

Wiso erfüllt das Modell die Annahmen?
Die relativen Kursänderungen in $t_1 < t_2 < ...t_{n-1} < t_n$ sind gegeben durch

$$\frac{S(t_1) - S(t_0)}{S(t_0)}, ..., \frac{S(t_n) - S(t_{n-1})}{S(t_{n-1})}$$

da

$$\frac{S(t_i) - S(t_{i-1})}{S(t_{i-1})} = \exp(\sigma(W(t_i) - W(t_{i-1})) - \frac{1}{2}\sigma^2(t_i - t_{i-1}))e^{\mu(t_i - t_{i-1})} - 1$$

folgt die Unabhängigkeit und zeitliche Stationarität der relativen Kursänderungen aus $(ii)$ und $(iii)$.
Die Annahme $b)$ ist erfüllt wegen $(iv)$.
Dass das Modell aus den Annahmen folgt, ist nicht ganz so einfach zu beweisen.
Dies folgt aus der Tatsache, dass ein stochastischer Prozess $X$ mit unabhängigen und stationären Zuwächsen, der stetige Pfade hat, notwendigerweise ein Wiener-Prozess mit Drift sein muss, d.h.

$$X(t) = \sigma W(t) + \nu t \qquad \text{mit } \sigma > 0 \text{ und } \nu \in \mathbb{R}$$

Nur aus der Annahme $a)$ ergeben sich sogenannte Levy-Prozess Modelle.

## 6.2 Approximation eines Black-Scholes Modells durch ein CRR Modell

Gegeben: Black-Scholes Modell mit den Parametern

$\sigma > 0$ für die Volatilität

$T > 0$ für die Laufzeit

$\mu > 0$ für den Trend

$r > 0$ für die Zinsrate

$$S(t) = S(0)e^{\mu t} \exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$$

Es soll in geeigneter Weise ein CRR Modell angepasst werden.
Teile hierzu den Zeitbereich in äquidistante Intervalle $[t_{i-1}, t_i]$ ein mit Intervalllänge $I_n = \Delta_n = \frac{T}{n}$.
Approximiere $S(t_j) = S(j\Delta)$ für $j = 1, ..., n$ durch

$$S_n(t_j) = S(0) u_n^{Z_n(j)} d_n^{j - Z_n(j)}$$

mit $Y_1, ..., Y_n$ iid, $\mathbb{P}(Y_i = u_n) = p_n = 1 - \mathbb{P}(Y_i = d_n)$.

$$Z_n(j) = \sum_{k=1}^{j} \mathbb{1}_{\{Y_k = u_n\}}$$

$(S_n(t_j))_{j=0,...,n}$ definiert einen Aktienpreisprozess in einem CRR Modell.
Frage: Wie kann man $u_n, d_n, p_n$ sinnvoll wählen?
Ansatz: Wähle $u_n, d_n, p_n$ so, dass der Erwartungswert und die Varianz der log Rendite bis $T$ übereinstimmen:
Es gilt:

$$\mathbb{E} \log \left( \frac{S(T)}{S(0)} \right) = \mathbb{E}(\mu T + \sigma W_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T$$

und

$$\text{Var}\ \log\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right) = \sigma^2 \text{Var}\ W_T = \sigma^2 T.$$

Im CRR Modell:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\log\frac{S_n(T)}{S_n(0)} &= \mathbb{E}\log\prod_{k=1}^{n} Y_k \\
&= \mathbb{E}\sum_{k=1}^{n}\log Y_k \\
&= n\mathbb{E}\log Y_1 \\
&= n((\log u_n)p_n + (\log d_n)(1-p_n))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}\ \log\frac{S_n(T)}{S_n(0)} &= \sum_{k=1}^{n}\text{Var}\ (\log(Y_1) \\
&= n\left(p_n(\log u_n)^2 + (1-p_n)(\log d_n)^2 - ((\log u_n)p_n + (\log d_n)(1-p_n))^2\right)
\end{aligned}$$

Dies führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned}
p_n\log u_n + (1-p_n)\log d_n &= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{T}{n} \\
p_n\log^2 u_n + (1-p_n)\log^2 d_n) &= \frac{\sigma^2 T}{n} + \left((\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)\frac{T}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

welche durch

$$\begin{aligned}
\log u_n &= \frac{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{n} + \left(\frac{1-p_n}{p_n}\cdot\frac{\sigma^2 T}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \\
\log d_n &= \frac{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{n} - \left(\frac{p_n}{1-p_n}\cdot\frac{\sigma^2 T}{n}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

gelöst werden.
Strebt $p_n \longrightarrow p \in (0,1)$, so ist $d_n < \underbrace{e^{r\frac{T}{n}}}_{=1+\varrho_n} < u_n$, denn

$$\begin{aligned}
\log u_n &\sim \left(\frac{1-p_n}{p_n}\cdot\frac{\sigma^2 T}{n}\right)^{\frac{1}{2}} > r\frac{T}{n} \\
\log d_n &\sim -\left(\frac{p_n}{1-p_n}\cdot\frac{\sigma^2)T}{n}\right)^{\frac{1}{2}} < r\frac{T}{n}
\end{aligned}$$

Im folgenden setze die Sprungwahrscheinlichkeit $p_n = p \in (0,1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Definiere mit dem diskreten CRR Aktienprozess $(S_n(t_j))_{j=0,\dots,n}$ einen stochastischen Prozess $(S_n(t))_{0\le t\le T}$ durch $S_n(t) = S_n(t_{i-1})$ für $t_{i-1} \le t < t_i$ für alle $1 \le i \le n$.
Sei $t \in [0,T]$ fest. Für $i_n = \lfloor \frac{t}{T} \rfloor$ gilt:

$$\begin{gathered}
i_n\frac{T}{n} \le t < i_{n+1}\frac{T}{n} \\
\frac{i_n}{n} \longrightarrow \frac{t}{T}
\end{gathered}$$

Mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes für Dreieckschemata gilt

$$\log\frac{S_n(t)}{S_n(0)} = \log\frac{S_n(i_n\frac{T}{n})}{S_n(0)} = \underbrace{\log\frac{S_n(i_n\frac{T}{n})}{S_n(0)} - i_n\frac{1}{n}(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)T}_{\longrightarrow N(0,\sigma^2 t)\text{ nach dem CLT}} + \underbrace{i_n\frac{1}{n}(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)T}_{\longrightarrow(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t}$$

da $\mathbb{E}\log\left(\frac{S_n(i_n\frac{T}{n})}{S_n(0)}\right) = i_n\frac{1}{n}(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)T$ und $\text{Var}\ \log\left(\frac{S_n(i_n\frac{T}{n})}{S_n(0)}\right) = i_n\frac{1}{n}\sigma^2 T$.
Also gilt:

$$\log\left(\frac{S_n(t)}{S_n(0)}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} N((\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t) \text{ in Verteilung}$$

Wegen $\log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) \sim N((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)$ folgt hieraus

$$S_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{d} S(t).$$

Für $0 < s_1 < s_2 < ... < s_k \le T$ folgt wegen der Unabhängigkeit und Stationarität von $\left(\log\left(\frac{S_n(j)}{S_n(0)}\right)\right)_{j=0,\dots,n}$ analog mit dem zentralen Grenzwertsatz

$$\left(\log\left(\frac{S_n(s_1)}{S_n(0)}\right), ..., \log\left(\frac{S_n(s_k)}{S_n(0)}\right)\right) \xrightarrow{d} \left(\log\left(\frac{S(s_1)}{S(0)}\right), ..., \log\left(\frac{S(s_k)}{S(0)}\right)\right)$$

hieraus erhält man, dass die Familie der endlich dimensionalen Verteilungen von $S_n$ gegen die Familie der endlich dimensionalen Verteilungen von $S$ konvergiert.
Genauer:
Für alle $0 < t_1 < t_2 < ... < t_k \le T, k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(S_n(t_1), ..., S_n(t_k)) \xrightarrow{d} (S(t_1), ..., S(t_k))$$

Zusammen mit einer Straffheitsbedingung folgt hieraus die schwache Konvergenz von $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $S$ in $\mathbb{D}[0,T]$, mit

$$\mathbb{D}[0,t] := \{x : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R} : x \text{ ist rechsseitig stetig und hat linksseitige Limiten}\}.$$

## 6.3 Eigenschaften des Wiener Prozesses

### 6.3.1 Definition (Wienerprozess bzgl $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ eine Filtration. Ein stochastischer Prozess $(W(t))_{t\ge0}$ heißt **Wiener-Prozess bzgl** $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$, wenn gilt:

(i) $W$ ist adaptiert bzgl $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$

(ii) $W(0) = 0$ $\mathbb{P}$-f.s.

(iii) $W(t) - W(s)$ ist stochastisch unabhängig von $\mathcal{F}_s$ für alle $0 \le s \le t$

(iv) $W(t) - W(s) \sim W(t-s) \sim N(0, t-s)$ für alle $0 \le s \le t$

(v) $W$ hat $\mathbb{P}$-f.s. stetige Pfade

Im folgenden sollen Martingale bestimmt werden:

### 6.3.2 Satz

Sei $W$ ein Wiener-Prozess bzgl $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$. Dann gilt:

(i) $W$ ist ein Martingal

(ii) $(W(t)^2 - t)_{t\ge0}$ ist ein Martingal

(iii) $(\exp(\vartheta W(t) - \frac{1}{2}\vartheta^2 t))_{t\ge0}$ ist ein Martingal für jedes $\theta \in \mathbb{R}$.

*Beweis.* Die Aussagen erhält man durch Ausnutzen der unabhängigen Zuwächse beim Wiener-Prozess.

(i)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W(t)|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(W(s) + W(t) - W(s)|\mathcal{F}_s)\\ &= \mathbb{E}(W(s)|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(W(t) - W(s)|\mathcal{F}_s)\\ &= W(s) + \underbrace{\mathbb{E}(W(t) - W(s))}_{\sim N(0,t-s)=0} \qquad \text{für alle } s \le t\end{aligned}$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(W(t)^2|F_s) &= \mathbb{E}((W(s)+W(t)-W(s))^2|F_s) \\
&= \mathbb{E}(W(s)^2 + 2W(s)(W(t)-W(s)) + (W(t)-W(s))^2|\mathcal{F}_s) \\
&= W(s)^2 + \mathbb{E}(2W(s)W(t)-W(s))|F_s) + \mathbb{E}((W(t)-W(s))^2|F_s) \\
&= W(s)^2 + 2W(s)\underbrace{\mathbb{E}(W(t)-W(s)|F_s)}_{=\mathbb{E}(W(t)-W(s))=0} + \mathbb{E}((W(t)-W(s))^2) \\
&= W(s)^2 + \mathbb{E}((W(t)-W(s))^2) \\
&= W(s)^2 + \mathbb{E}(W(t-s)^2) \\
&= W(s)^2 + (t-s) \\
\Leftrightarrow \mathbb{E}(W(t)^2 - t|F_s) &= W(s)^2 - s \qquad \text{für alle } s \le t
\end{aligned}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\exp(\vartheta W(t))|F_s) &= \mathbb{E}(\exp(\vartheta(W(s)+W(t)-W(s)))|F_s) \\
&= \mathbb{E}(\exp(\vartheta W(s))\exp(\vartheta(W(t)-W(s))|F_s) \\
&= \exp(\vartheta W(s))\mathbb{E}(\exp(\vartheta(W(t)-W(s)))|F_s) \\
&= \exp(\vartheta W(s))\mathbb{E}(\exp(\vartheta(W(t)-W(s)))) \\
&= \exp(\vartheta W(s))\mathbb{E}(\exp(\vartheta(W(t-s)))) \\
&= \exp(\vartheta W(s))\exp(\frac{1}{2}\vartheta^2(t-s)) \\
\Leftrightarrow \mathbb{E}(\exp(\vartheta W(t) - \frac{1}{2}\vartheta^2 t)|F_s) &= \exp(\vartheta W(s) - \frac{1}{2}\vartheta^2 s) \qquad \text{für alle } s \le t
\end{aligned}
$$

□

Ziel: Konstruktion des äquivalenten Martingalmaßes im Black-Scholes Modell

## 6.4 Maßwechsel

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ eine Filtration. Sei $(L_t)_{t\ge0}$ ein positives Martingal bzgl $\mathbb{P}$ und $\overline{\mathbb{P}}$ ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß aus $(\Omega, \mathcal{F})$ mit

$$\left.\frac{d\overline{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = L_t \qquad \text{für alle } t \ge 0$$

Dann gilt:

(i) Ist $Y \mathcal{F}_t$-messbar und existiert $\overline{\mathbb{E}}Y$, so gilt:

$$\overline{\mathbb{E}}(Y|\mathcal{F}_s) = \frac{\mathbb{E}(YL_t|\mathcal{F}_s)}{L_s} \qquad \text{für alle } s \le t.$$

Dabei ist $\overline{E}Y = \int Y d\overline{\mathbb{P}}$. $\overline{\mathbb{E}}(Y|\mathcal{F}_s)$ ist der bedingte Erwartungswert von $Y$ bzgl $\overline{\mathbb{P}}$.

(ii) $(M_t)_{t\ge0}$ ist ein $\overline{\mathbb{P}}$-Martingal genau dann, wenn $(M_tL_t)_{t\ge0}$ ein $\mathbb{P}$-Martingal ist.

(iii) Ist $(R_t)_{t\ge0}$ ein positives $\mathbb{P}$-Martingal mit $\mathbb{E}R_t = 1$ für alle $t \ge 0$, so kann auf jedem $\mathcal{F}_T$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q_T$ definiert werden, sodass

$$\left.\frac{dQ_T}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = R_t \qquad \text{für alle } t \le T$$

*Beweis.* zu (i): Sei $Y$ $\mathcal{F}_t$-messbar und $A \in \mathcal{F}_s$.

$$
\begin{aligned}
\int_A Y d\overline{\mathbb{P}} = \int_A YL_t d\mathbb{P} &= \int_A \mathbb{E}(YL_t|F_s)d\mathbb{P} \\
&= \int_A \frac{\mathbb{E}(YL_t|F_s)}{L_s} d\overline{\mathbb{P}}, \text{ da } \left.\frac{d\mathbb{P}}{d\overline{\mathbb{P}}}\right|_{\mathcal{F}_s} = \frac{1}{L_s}
\end{aligned}
$$

zu (ii):

$$\begin{aligned}(M_t) \text{ ist ein } \overline{\mathbb{P}}\text{-Martingal } &\Leftrightarrow \overline{E}(M_t|F_s) = M_s \qquad \text{für alle } s \le t\\ &\Leftrightarrow E(M_tL_t|F_s)\frac{1}{L_s} = M_s \qquad \text{für alle } s \le t\\ &\Leftrightarrow E(M_tL_t|F_s) = M_sL_s \qquad \text{für alle } s \le t\\ &\Leftrightarrow ML \text{ ist ein } \mathbb{P}\text{-Martingal}\end{aligned}$$

zu (iii): Wegen $\mathbb{E}R_T = 1$ definiert $Q_T(A) = \int_A R_T d\mathbb{P}$ für alle $A \in F_T$ ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$.
Für $A \in F_t$ mit $t \le T$ gilt:

$$\begin{aligned}Q_T(A) = \int_A R_T d\mathbb{P} &= \int_A \mathbb{E}(R_T|F_t)d\mathbb{P}\\ &= \int_A R_t d\mathbb{P}\end{aligned}$$

Also ist $R_t = \frac{dQ_T}{d\mathbb{P}}\Big|_{F_t}$

□

## 6.5 Girsanov Transformation (einfachster Fall)

Sei $(W(t))_{t\ge 0}$ ein Wiener-Prozess bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$. Sei für $\vartheta \in \mathbb{R}$ ein weiteres Maß $\mathbb{P}_\vartheta$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ gegeben, mit $\frac{d\mathbb{P}_\vartheta}{d\mathbb{P}}\Big|_{F_t} = \exp(\vartheta W(t) - \frac{1}{2}\vartheta^2 t)$ für alle $t \ge 0$.
$\mathcal{F}_\infty := \sigma(\bigcup_{t\ge 0} F_t)$
Dann gilt: $\overline{W}(t) = W(t) - \vartheta t$ für alle $t \ge 0$ ist ein Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{P}_\vartheta$.

*Beweis.* Zeige die definierenden Eigenschaften des Wiener-Proesses:

(i) $(\overline{W}(t))_{t\ge 0}$ hat stetige Pfade mit $\overline{W}(0) = 0$

(ii) $\overline{W}(t) - \overline{W}(s)$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_s$ und $N(0, t-s)$ verteilt.

zu (i): klar

zu (ii): Sei $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und messbar.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\vartheta(g(\overline{W}(t) - \overline{W}(s))|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(g(\overline{W}(t) - \overline{W}(s))L_t|F_s)\frac{1}{L_s}\\ &\quad \text{mit } L_t = \exp(\vartheta W(t) - \frac{1}{2}\vartheta^2 t)\\ &= \mathbb{E}(g(W(t) - W(s) - \vartheta(t-s))\frac{L_t}{L_s}|F_s)\\ &= \mathbb{E}(g(W(t) - W(s) - \vartheta(t-s)\exp(\vartheta(W(t) - W(s)) - \frac{1}{2}\vartheta^2(t-s))|\mathcal{F}_s)\\ &= \mathbb{E}g(W(t) - W(s) - \vartheta(t-s)\exp(\vartheta(W(t) - W(s)) - \frac{1}{2}\vartheta^2(t-s))\\ &= \mathbb{E}g(W(t-s) - \vartheta(t-s))\exp(\vartheta W(t-s) - \frac{1}{2}\vartheta^2(t-s))\\ &= \mathbb{E}_\vartheta g(\overline{W}(t-s))\end{aligned}$$

Hieraus folgt: $\overline{W}(t) - \overline{W}(s)$ ist stochastisch unabhängig von $\mathcal{F}_s$ und genau so verteilt wie $\overline{W}(t-s)$.

Dies ist eine $N(0, t-s)$ Verteilung, denn

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\vartheta g(\overline{W}(t)) &= \mathbb{E}g(W(t)-\vartheta t)\exp(\vartheta W8t) - \frac{1}{2}\vartheta^2 t) \\
&= \mathbb{E}g(W(t)-\vartheta t)\exp(\vartheta(W(t)-\vartheta t) + \frac{1}{2}\vartheta^2 t) \\
&= e^{\frac{1}{2}\vartheta^2 t}\int g(x)e^{\vartheta x}N(-\vartheta t, t)(dx) \\
&= e^{\frac{1}{2}\vartheta^2 t}\int g(x)e^{\vartheta x}\exp(-\frac{1}{2t}(x+\vartheta t)^2)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int g(x)e^{-\frac{1}{2t}x^2}dx \\
&= \int g(x)N(0,t)(dx)
\end{aligned}$$

Also ist $\overline{W}(t)N(0,t)$ verteilt bzgl $\mathbb{P}_\vartheta$.

□

## 6.6 Äquivalentes Martingalmaß im Black-Scholes Modell

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration. Sei $W$ ein Wiener-Prozess bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
Sei $[0,T]$ der Handelszeitraum eines Finanzmarktes. $S(t) = S(0)e^{\mu t}\exp(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t), 0 \leq t \leq T$ der Preisprozess eines risky assets mit

- $S(0) > 0$ Anfangspreis
- $\mu \in \mathbb{R}$ Trendparameter
- $\sigma$ Volatilität

Sei $\beta(t) = e^{rt}, t \geq 0$ der Preisprozess eines Geldmarktkontos mit Zinsrate $r$.

### 6.6.1 Definition (äquivalentes Martingalmaß)

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^\star$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ heißt **äquivalentes Martingalmaß** genau dann, wenn

(i) $\mathbb{P}^\star$ ist äquivalent zu $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{F}_T$

(ii) $S^\star(t) := \frac{S(t)}{\beta(t)} = e^{-rt}S(t), 0 \leq t \leq T$ ist ein $\mathbb{P}^\star$-Martingal.

Ansatz zur Bestimmung des äquivalenten Martingalmaßes

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^\star}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp(\vartheta W(t) - \frac{1}{2}\vartheta^2 t)$$

Zu bestimmten ist $\vartheta$:
Girsanov liefert

$$W^\star(t) = W(t) - \vartheta t, t \geq 0$$

ist ein Wiener-Prozess bzgl $\mathbb{P}^\star$.
Bzgl. $\mathbb{P}^\star$ gilt:

$$\begin{aligned}
S(t) &= S(0)e^{\mu t}\exp(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t) \\
&= S(0)e^{\mu t}\exp(\sigma(W^\star(t) + \vartheta t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t) \\
&= S(0)\exp(\sigma W^\star(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t)e^{(\mu+\sigma\vartheta)t}
\end{aligned}$$

Also
$S^\star(t) = e^{-rt}S(t) = S(0)\exp(\sigma W^\star(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t)e^{(\mu+\sigma\vartheta-r)t}$
und damit
$(S^\star(t))$ ist ein $\mathbb{P}^\star$-Martingal genau dann, wenn

$$\mu - r + \sigma\vartheta = 0 \Leftrightarrow \vartheta = -\frac{\mu - r}{\sigma}$$

Ergebnis: Für $\vartheta = -\frac{\mu-r}{\sigma}$ ist $\mathbb{P}^\star$ ein äquivalentes Martingalmaß.

### 6.6.2 Bemerkung:

Bezüglich $\mathbb{P}^\star$ gilt:

$$S(t) = S(0)e^{rt}\exp(\sigma W^\star(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t), t \geq 0$$

Also ist $S(t)$ ein geometrischer Wiener-Prozess mit Trend $r$ und Volatilität $\sigma$.
$\left(\frac{S^\star(t)}{S(0)}\right)_{t\geq 0}$ ist ein $\mathbb{P}^\star$-Martingal und damit ein positives Martingal mit

$$\mathbb{E}^\star \frac{S^\star(t)}{S(0)} = \frac{S^\star(0)}{S(0)} = 1$$

Deshalb kann ein Maßwechsel durchgeführt werden.

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^\star_\sigma}{d\mathbb{P}^\star}\right|_{\mathcal{F}_t} := \frac{S^\star(t)}{S(0)} = \exp(\sigma W^\star(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$$

Da $W^\star$ ein Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{P}^\star$ ist, gilt nach Girsanov

$$W^{\star\star}(t) = W^\star(t) - \sigma t, t \geq 0$$

ist ein Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{P}^\star_\sigma$.
Weiter ist

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0)\exp(\sigma W^\star(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t))e^{rt} \\ &= S(0)\exp(\sigma(W^{\star\star}(t) + \sigma t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t)e^{rt} \\ &= S(0)e^{(r+\sigma^2)t}\exp(\sigma W^{\star\star}(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t) \end{aligned}$$

Der Aktienpreisprozess $(S(t))_{t\geq 0}$ ist ein geometrischer Wiener-Prozess

| | | |
|---|---|---|
| mit Trend/Drift $\mu$ | Volatilität $\sigma$ | bzgl. $\mathbb{P}$. |
| mit Trend/Drift $r$ | Volatilität $\sigma$ | bzgl. $\mathbb{P}^\star$. |
| mit Trend/Drift $r + \sigma^2$ | Volatilität $\sigma$ | bzgl. $\mathbb{P}^\star_\sigma$. |

## 6.7 Bewertung von Claims

Ein Derivat ist ein Wertpapier, das eine zufällige Auszahlung $C$ zum Zeitpunkt $T$ garantiert.
Im mathematischen Modell entspricht dies einer $\mathcal{F}_T$ messbaren Zufallsvariable $C$.
Annahme: $\mathbb{E}^\star|C^\star| < \infty$, wobei $C^\star := e^{-rT}C$.
Klar ist: $\mathbb{E}^\star|C^\star| < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E}^\star|C| < \infty$
Es gilt: $C$ ist durch eine selbstfinanzierende Handelsstrategie replizierbar. Zum Nachweis hierfür benötigt man die stochastische Analysis.
Deshalb gibt es einen eindeutigen arbitragefreien Preisprozess $(p_t(C))_{0\leq t\leq T}$. Analog zum diskreten Black-Scholes Modell ist dieser gegeben durch

$$e^{-rt}p_t(C) = \mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_t) \qquad 0 \leq t \leq T$$

Insbesondere ist der Anfangspreis

$$p_0(C) = \mathbb{E}^\star(C^\star) = \mathbb{E}^\star(e^{-rT}C)$$

### 6.7.1 Black-Scholes Formel

Betrachtet wird eine Calloption

$$C = (S_T - K)^+$$

Zu bestimmen ist

$$\mathbb{E}^\star(e^{-rT}(S_T - K)^+|\mathcal{F}_t) = p_t(C)e^{-rt}$$

Sei zunächst $t = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^\star(e^{-rT}(S_T - K)^+|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}^\star e^{-rT} S_T \mathbb{1}_{\{S_T>K\}} - \mathbb{E}^\star e^{-rT} K \mathbb{1}_{\{S_t>K\}} \\
&= S(0)\mathbb{E}^\star \frac{S_T^\star}{S(0)} \mathbb{1}_{\{S_T>K\}} - e^{-rT} K \mathbb{E}^\star \mathbb{1}_{\{S_T>K\}} \\
&= S(0) \underbrace{\mathbb{P}_\sigma^\star(S_T > K)}_{(1)} - e^{-rT} K \underbrace{\mathbb{P}^\star(S_T > K)}_{(2)}
\end{aligned}$$

$S_T = S(0)\exp(\sigma W_T^{\star\star} - \frac{1}{2}\sigma^2 T)e^{(r+\sigma^2)T}$
zu (1):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\sigma^\star(S_T > K) &= \mathbb{P}_\sigma^\star\left(\log\left(\frac{S_T}{S(0)}\right) > \log\left(\frac{K}{S(0)}\right)\right) \\
&= \mathbb{P}_\sigma^\star\left(\sigma W_T^{\star\star} - \frac{1}{2}\sigma^2 T + (r+\sigma^2)T > \log\left(\frac{K}{S(0)} S\right)\right) \\
&= \mathbb{P}_\sigma^\star\left(\underbrace{\frac{W_T^{\star\star}}{\sqrt{T}}}_{\sim N(0,1)} > \frac{\log\left(\frac{K}{S(0)}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T - (r+\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \text{ mit } \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx
\end{aligned}$$

zu (2):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^\star(S_T > K) &= \mathbb{P}^\star\left(\log\left(\frac{S_T}{S(0)}\right) > \log\left(\frac{K}{S(0)}\right)\right) \\
&= \mathbb{P}^\star\left(\sigma W_T^\star - \frac{1}{2}\sigma^2 T + rT > \log\left(\frac{K}{S(0)}\right)\right) \\
&= \mathbb{P}^\star\left(\underbrace{\frac{W_T^\star}{\sqrt{T}}}_{\sim N(0,1)} > \frac{\log\left(\frac{K}{S(0)}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T - rT}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}$$

Ergebnis: Bezeichnet $c(S_0, T, K)$ den Anfangspreis einer Calloption mit Laufzeit $T$, Basis $K$ und Anfangsaktienkurs $S_0$, so gilt:

$$\begin{aligned}
c(S_0, T, K) &= S_0\Phi(h_1(S_0, T)) - Ke^{-rT}\Phi(h_2(S_0, T)) \\
\text{mit } h_1(S_0, T) &= \frac{\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\
\text{und } h_2(S_0, T) &= \frac{\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}
\end{aligned}$$

Da der Aktienpreisprozess, gegeben $\mathcal{F}_t$, sich verhält wie in einem Black-Scholes Modell mit Laufzeit $T - t$ und Anfangskurs $S_t$ ergibt sich für den Callpreis zum Zeitpunkt $t$

$$p_t(C) = c(S_t, T - t, K)$$

genauer kann man mit Hilfe der Markoveigenschaft zeigen:

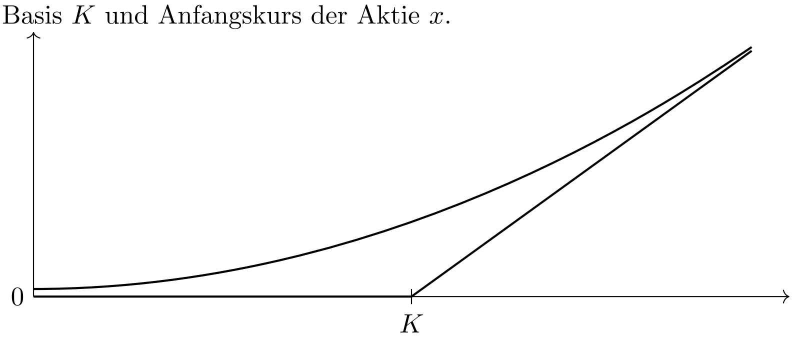
$$\begin{aligned}
p_t(C) &= \mathbb{E}^\star(e^{-rT}(S_T-K)^+|\mathcal{F}_t)e^{rt} = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^\star((S_T-K)^+|\mathcal{F}_t)\\
&= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^\star((S_T-K)^+|S_t)\\
&= \mathbb{E}^\star(e^{-r(T-t)}(S_T-K)^+|S_t)\\
&= c(S_t, T-t, K)
\end{aligned}$$

denn

$$\mathbb{E}^\star((S_T-K)^+|S_t=x) = \mathbb{E}^\star((S_{T-t}-K)^+|S_0=x)$$

### 6.7.2 Greeks

Eigenschaften des Callpreises: Sei $c(x,t,\sigma,K)$ der Preis einer Calloption mit Laufzeit $t$, Volatilität $\sigma$, Basis $K$ und Anfangskurs der Aktie $x$.




Eigenschaften für $c(x,t,\sigma,K) = x\Phi(h_1(x,t)) - Ke^{-rt}\Phi(h_2(x,t))$:

i) $\lim\limits_{t\searrow 0} = c(x,t,\sigma,K) = (x-K)^+$

ii) $\partial_t c + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_x^2 c + rx\partial_x = rc$ auf $(0,\infty)\times(0,\infty)$
die Black-Scholes Differentialgleichung. Diese folgt aus der Identität

$$x\varphi(h_1(x,t)) - Ke^{-rt}\varphi(h_2(x,t)) = 0$$

iii) Delta:
$c$ ist strikt wachsend als Funktion des Aktienanfangskurses mit

$$\Delta = \partial_x c = \Phi(h_1) > 0$$

Das Delta gibt den Aktienanteil in der Replikationsstrategie an. Setze

$$H(t) = \partial_x c(S_t, T-t), \Psi(t) = -Ke^{-rT}\Phi(h_2(S_t, T-t))$$

. Dann wird durch $(\Psi(t), H(t))_{0\le t\le T}$ eine selbstfinanzierenden Handelsstrategie definiert, welche die Calloption repliziert. Also

$$\begin{aligned}
V_t((H,\Psi)) &= H(t)S(t) + \Psi(t)\beta(t)\\
&= S(t)\Delta + \Psi(t)\beta(t)\\
&= S(t)\Phi(h_1(S(t), T-t)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(h_2(S(t), T-t))\\
&= c(S(t), K, T-t)
\end{aligned}$$

Preis der Calloption mit Fälligkeit $T$ in $t$ bei $S(t)$.

iv) Gamma:
$\Gamma := \partial_x^2 c = \varphi(h_1(x,t))\partial_x h_1(x,t) > 0$
$\Gamma$ ist ein Maß für die Änderung des $\Delta$ und gibt in der Anwendung an, wie sensitiv der $\Delta$-Hedge gegenüber einer Änderung im Aktienanteil ist. Deshalb ist das Gamma im Risikomanagement eine wichtige Kenngröße.

v) Theta:
$\Theta := \partial_t c = \frac{x\sigma}{2\sqrt{t}}\varphi(h_1(x,t)) + Kre^{-rt}\Phi(h_2(x,t)) > 0$
Der Preis der Option ist monoton wachsend in der Laufzeit.

vi) Lambda/Vega:
$\Lambda := \frac{\partial c}{\partial \sigma} = x\varphi(h_1(x,t))\sqrt{t} > 0$
Eine höhere Volatilität signalisiert eine erhöhte Unsicherheit im Markt, die zu höheren Optionspreisen führt.

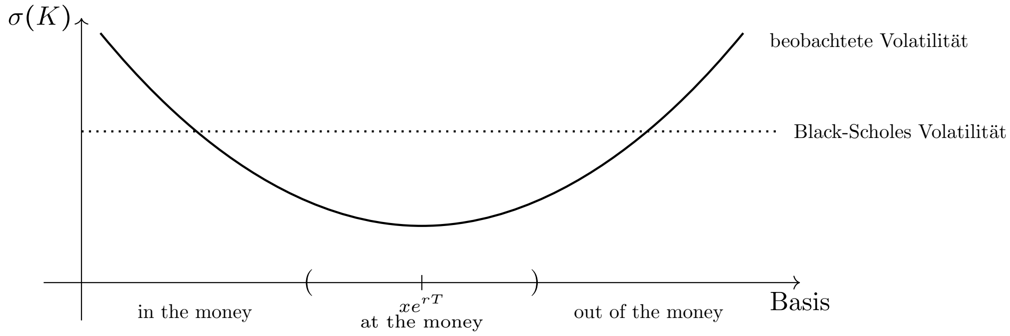
vii) Rho:
$\varrho := \frac{\partial c}{\partial r} = Kre^{-rt}\Phi(h_2(x,t)) > 0$
Der Optionspreis wächst mit der Zinsrate.

### 6.7.3 Smile-Effekt

Das Black-Scholes Modell ist ein sehr einfaches Modell zur Beschreibung von Aktienkursen.
Frage: Erklärt das Modell die empirischen Phänomene?
Antwort: Nein, da der beobachtbare Smile-Effekt im Black-Scholes Modell nicht vorkommt.
Fixiere hierzu eine Aktie mit Anfangskurs $x$, einer Laufzeit $T$ und die zur Laufzeit gehörende Zinsrate $r$.
Betrachte den Callpreis als Funktion der Basis.
Zu verschiedenen Basispreisen $K$ sind Marktpreise $c_{\text{Markt}}(K)$ der dazugehörigen Option abrufbar.
Zu jedem $K$ kann die Modellvolatilität $\sigma(K)$ so bestimmt werden, dass Modellpreis und Marktpreis übereinstimmen, d.h.

$$c(x,T,\sigma(K),K) = c_{\text{Markt}}(K)$$

$\sigma(K)$ heißt implizite Volatilität.
Wäre das Black-Scholes Modell exakt richtig, so müsste $\sigma(K)$ konstant sein. Man stellt jedoch fest, das $\sigma(K)$ folgenden Verlauf hat:




Verbesserung: Ersetze die globale Volatilität $\sigma$ durch eine lokale Volatilitätsfunktion $(t,x) \mapsto \sigma(t,x)$.
Es ergibt sich dann bzgl. eines äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^\star$ der Aktienpreisprozess

$$dS(t) = S(t)(rdt + \sigma(t,S(t))dW^\star(t))$$

Dieser wird gelöst durch

$$S(t) = S(0)e^{rt}\exp\left(\int_0^t \sigma(u,S(u))dW^\star(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(u,S(u))du\right)$$

### 6.7.4 Bewertung von Barriere Optionen

Eine Barriere Option ist ein Beispiel für ein Derivat, dessen Auszahlung am Ende auch durch dessen Verhalten während der Laufzeit bestimmt wird. Deshalb ist eine Bewertung dieser pfadabhängigen Auszahlungsverpflichtung schwieriger als die eines pfadunabhängigen Calls. Gegeben sei ein Black-Scholes Modell mit Handelszeitraum $[0,T]$ der Form

$$\begin{aligned} S(t) &= S_0 e^{\mu t}\exp(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t), \\ \beta(t) &= e^{rt} \end{aligned}$$

für alle $0 \le t \le T$.
Ein down and out Call mit Basis $K$, Laufzeit $T$ und Barriere $B < S_0$ ist ein Claim mit Auszahlung

$$C = (S(T) - K)^+ 1_{\{\inf_{t \le T} S(t) > B\}}.$$

Für die Bewertung kann eine analoge Vorgehensweise wie beim Call durchgeführt werden. Es ist die abdiskontierte Claimauszahlung bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ zu berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}
p_0(C) &= \mathbb{E}^* e^{-rT}(S(T)-K)^+ 1_{\{\inf_{t\le T} S(t)>B\}} \\
&= \mathbb{E}^* e^{-rT} S(T) 1_{\{S(T)>K, \inf_{t\le T} S(t)>B\}} - K e^{-rT} \mathbb{P}^*(S(T)>K, \inf_{t\le T} S(t)>B) \\
&= S_0 \mathbb{P}^*_\sigma(S(T)>K, \inf_{t\le T} S(t)>B) - K e^{-rT} \mathbb{P}^*(S(T)>K, \inf_{t\le T} S(t)>B),
\end{aligned}$$

wobei das Maß $\mathbb{P}^*_\sigma$ durch die $\mathbb{P}$-Dichte $\frac{1}{S_0} e^{-rT} S(T)$ definiert ist. Weiter erhält man durch elementare Umformungen

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^*(S(T)>K, \inf_{t\le T} S(t)>B) &= \mathbb{P}^*(-\log\frac{S(T)}{S_0} < \log\frac{S_0}{K}, -\inf_{t\le T}\log\frac{S(T)}{S_0} < \log\frac{S_0}{B}) \\
&= \mathbb{P}^*(X(T) < \frac{1}{\sigma}\log\frac{S_0}{K}, \sup_{t\le T} X(t) < \frac{1}{\sigma}\log\frac{S_0}{B})
\end{aligned}$$

mit $X(t) = -\frac{1}{\sigma}\log\frac{S(t)}{S_0} = -W^*(t) + (\frac{1}{2}\sigma - \frac{r}{\sigma})t$. Der Prozess $X$ ist ein Wiener-Prozess mit Drift $a = \frac{1}{2}\sigma - \frac{r}{\sigma}$ und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus folgender

### 6.7.5 Bemerkung:

Ist $X$ ein Wiener-Prozess mit Drift $a \in \mathbb{R}$ bezüglich einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}, z \ge x$

$$\mathbb{P}(X(T) \le x, \sup_{t\le T} X(t) \le z) = \Phi(\frac{x-aT}{\sqrt{T}}) - e^{2az}\Phi(\frac{x-2z-aT}{\sqrt{T}}). \tag{1}$$

Eine Anwendung dieser Bemerkung liefert also

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^*(S(T)>K, \inf_{t\le T} S(t)>B) &= \Phi(\frac{\frac{1}{\sigma}\log\frac{S_0}{K} - aT}{\sqrt{T}}) - \exp(2a\frac{1}{\sigma}\log\frac{S_0}{B})\Phi(\frac{\frac{1}{\sigma}\log\frac{S_0}{K} - \frac{2}{\sigma}\log\frac{S_0}{B} - aT}{\sqrt{T}}) \\
&= \Phi(\frac{\log\frac{S_0}{K} + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}) - (\frac{S_0}{B})^{\frac{2a}{\sigma}}\Phi(\frac{\log\frac{B^2}{S_0K} + (r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}})
\end{aligned}$$

Bezüglich $\mathbb{P}^*_\sigma$ kann analog argumentiert werden, da der Aktienkurs ein geometrischer Wiener-Prozess mit Trend $r+\sigma^2$ und Volatilität $\sigma$ ist. Es ergibt sich

$$\mathbb{P}^*_\sigma(S(T)>K, \inf_{t\le T} S(t)>B) = \Phi(\frac{\log\frac{S_0}{K} + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}) - (\frac{S_0}{B})^{\frac{2b}{\sigma}}\Phi(\frac{\log\frac{B^2}{S_0K} + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}})$$

mit $b = -\frac{r}{\sigma} - \frac{1}{2}\sigma$.
Fasst man alle Terme zusammen, erhält man für den Anfangspreis $p(C)$ der Barriere Option

$$p(C) = c(S_0,T,K) - (\frac{S_0}{B})^{2b}\sigma c(S_0,T,K\frac{S_0^2}{B^2}),$$

da $\frac{2a}{\sigma} = \frac{2b}{\sigma} + 2$ ist.
Es verbleibt, die Bemerkung zu beweisen.

*Beweis.* Die Aussage folgt aus dem Spiegelungsprinzip und einer Anwendung des Satzes von Girsanov. Zunächst betrachten wir den Fall einer Drift $a = 0$. Dann ist $X$ ein Wiener-Prozess $W$. Wir bezeichnen mit $M(t) = \sup_{s\le t} W(s)$ das sogenannte Running Maximum von $W$. Für $x \in \mathbb{R}$ und $z \ge x$ gilt unter Ausnutzung des Spiegelungsprinzips

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W(T) \le x, M(T) \ge z) &= \mathbb{P}(\hat{W}(T) \ge z + z - x, M(T) \ge z) \\
&= \mathbb{P}(\hat{W}(T) \ge 2z - x, \sup_{t\le T}\hat{W}(t) \ge z) = \mathbb{P}(\hat{W}(T) \ge 2z - x) \\
&= \Phi(\frac{x-2z}{\sqrt{T}})
\end{aligned}$$

Hierbei ist für

$$\tau = \inf\{t \ge 0 : W(t) = z\}$$

$$\hat{W}(t) = \begin{cases} W(t) & \text{für } t \le \tau \\ W(\tau) - (W(t) - W(\tau)) & \text{für } t \ge \tau \end{cases} \tag{2}$$

der an $\tau$ gespiegelte Prozess. Das Spiegelungsprinzip besagt, dass $\hat{W}$ wieder ein Wiener-Prozess definiert. Somit folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W(T) \le x, M(T) \le z) &= \mathbb{P}(W(T) \le x) - \mathbb{P}(W(T) \le x, M(T) \ge Z) \\ \Phi(\frac{x}{\sqrt{T}}) - \Phi(\frac{x-2z}{\sqrt{T}}). \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt wird Girsanov angewendet. Da $W(t) = X(t) - at, t \ge 0$ einen Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}$ definiert, kann mittels

$$\frac{d\mathbb{P}_a}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t} = \exp(aW(t) - \frac{1}{2}a^2 t)$$

für alle $t \ge 0$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_a$ auf $\Omega, \mathcal{F}_T)$ definiert werden. Girsanov liefert, dass $W(t) = W(t) - at + at$ ein Wiener-Prozess mit Drift $a$ bezüglich $\mathbb{P}_a$ ist. Somit gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X(T) \le x, \sup_{t \le T} X(t) \le z) &= \mathbb{P}_a(W(T) \le x, M(T) \le z) \\ &= \int_{\{W(T) \le x, M(T) \le z\}} \exp(aW(T) - \frac{1}{2}a^2 T) d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{E} g(W(T)) 1_{\{M(T) \le z\}} \end{aligned}$$

mit $g(y) = \exp(ay - \frac{1}{2}a^2 T) 1_{(-\infty,x]}(y)$. Zu bestimmen ist die bedingte Verteilung von $W(T)$ - gegeben $\{M(T) \le z\}$. Wegen des ersten Schrittes gilt für die bedingte Verteilungsfunktion

$$\mathbb{P}(W(T) \le x | M(T) \le z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \ge z \\ \frac{\Phi(\frac{x}{\sqrt{T}}) - \Phi(\frac{x-2z}{\sqrt{T}})}{\mathbb{P}(M(T) \le z)} & \text{falls } x \le z. \end{cases} \tag{3}$$

Durch Differentiation nach $x$ erhält man die bedingte Dichte

$$h(y) = \frac{1}{\sqrt{T}\mathbb{P}(M(T) \le z)} (\varphi(\frac{y}{\sqrt{T}}) - \varphi(\frac{y-2z}{\sqrt{T}})$$

für alle $y \le z$. Somit folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} g(W(T)) 1_{\{M(T) \le z\}} &= \mathbb{P}(M(T) \le z) \int_{-\infty}^{\infty} g(y) h(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{T}} (\varphi(\frac{y}{\sqrt{T}}) - \varphi(\frac{y-2z}{\sqrt{T}}) \exp(ay - \frac{1}{2}a^2 T) dy \\ &= \Phi(\frac{x-aT}{\sqrt{T}}) - e^{2az} \Phi(\frac{x-2z-aT}{\sqrt{T}}), \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty} \frac{1}{\sqrt{T}} \varphi(\frac{y}{\sqrt{T}}) dy \\ =\ & \mathbb{E} 1_{\{W(T) \le x\}} \exp(aW(T) - \frac{1}{2}a^2 T) \\ =\ & \mathbb{P}_a(W(T) \le x) = P_a(W(T) - aT \le x - aT) = \Phi(\frac{x-aT}{\sqrt{T}}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty} \frac{1}{\sqrt{T}} \varphi(\frac{y-2z}{\sqrt{T}}) dy \\ =\ & \mathbb{E} 1_{\{W(T)+2z \le x\}} \exp(a(W(T) + 2z) - \frac{1}{2}a^2 T) \\ =\ & \exp(2az) \mathbb{P}_a(W(T) + 2z \le x) \\ =\ & \exp(2az) \Phi(\frac{x-2z-aT}{\sqrt{T}}) \end{aligned}$$

$\square$

## 6.8 Das Black-Scholes Modell für 2 Aktien

- Handelszeitraum $[0,T]$
- Informationsverlauf $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$
- Geldmarktkonto $\beta(t) = e^{rt}$, $0 \le t \le T$
- Unabhängige Wiener-Prozesse $W_1, W_2$, die die Aktien treiben
- $S_1(t) = S_1(0)e^{\mu_1 t}\exp(\sigma(\varrho W_2(t) + \sqrt{1+\varrho^2}W_1(t) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t)$
  $S_2(t) = S_2(0)e^{\mu_2 t}\exp(\sigma W_2(t) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t)$
  mit

  $0 \le t \le T$

  $0 < S_1(0), S_2(0)$ Anfangskurse

  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ Trendparameter

  $\sigma_1, \sigma_2$ Volatilitäten

  $|\varrho| \le 1$ Korrelation zwischen den Wiener-Prozessen

### 6.8.1 Bemerkung:

$B(t) = \varrho W_2(t) + \sqrt{1-\varrho^2}W_1(t), 0 \le t \le T$ ist ein Wiener-Prozess bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$.
$Cov(B(t), W_2(t)) = Cov(\varrho W_2(t), W_2(t)) = \varrho t$.

Bestimmung des äquivalenten Martingalmaßes:
Ansatz: Zweimalige Anwendung des Satzes von Girsanov:
<u>1. Schritt:</u> Girsanov auf Aktie 2 anwenden:

$$\frac{d\mathbb{P}_{\vartheta_2}}{d\mathbb{P}}\bigg|_{\mathcal{F}_n} = \exp(\vartheta_2 W_2(t) - \frac{1}{2}\vartheta_2^2 t)$$

Dann ist nach Girsanov
$W_2^\star(t) = W_2(t) - \vartheta_2 t, \qquad t \ge 0$
ein Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{P}_{\vartheta_2}$.

Weiter sind $W_2^\star(t)$ und $W_1(t)$ unabhängige Wienerprozesse bzgl. $\mathbb{P}_{\vartheta_2}$.

*Beweis.* Für $h, g : C[0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ messbar und beschränkt.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\vartheta_2} h((W_2^\star(t))_{0\le t\le T} g((W_1(t))_{0\le t\le T}) &= \int h((W_2^\star(t))_{0\le t\le T}) g((W_1(t))_{0\le t\le T}) \underbrace{\exp(\vartheta_2 W_2(T) - \frac{1}{2}\vartheta_2^2 T)}_{\text{Dichte}} \, d\mathbb{P} \\
&= \int h((W_2^\star(t))_{0\le t\le T}) \exp(\vartheta_2 W_2(T) - \frac{1}{2}\vartheta_2^2 T) d\mathbb{P} \int g((W_1(t))_{0\le t\le T}) d\mathbb{P} \\
&= \mathbb{E}_{\vartheta_2} h((W_2^\star(t))_{0\le t\le T}) \mathbb{E}_{\vartheta_2} g((W_1(t))_{0\le t\le T})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{da } \mathbb{E}_{\vartheta_2} g((W_1(t))_{0\le t\le T}) &= \int g((W_1())_{0\le t\le T}) \exp(\vartheta_2 W_2(T) - \frac{1}{2}\vartheta_2^2 T) d\mathbb{P} \\
&= \mathbb{E} g((W_1(t))_{0\le t\le T}) \underbrace{\mathbb{E}\exp(\vartheta_2 W_2(T) - \frac{1}{2}\vartheta_2^2 T)}_{=1} \\
&= \mathbb{E} g((W_1(t))_{0\le t\le T})
\end{aligned}$$

$\Rightarrow W_2^\star$ und $W_1$ sind stochastisch unabhängig
$\Rightarrow W_1$ ist bzgl. $\mathbb{P}_{\vartheta_2}$ genauso verteilt wie bzgl $\mathbb{P}$.
$\Rightarrow$ Behauptung □

Bezüglich $\mathbb{P}_{\vartheta_2}$ ist:

$$\begin{aligned} S_2(t) &= S_2(0)e^{\mu_2 t}\exp(\sigma_2 W_2(t) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t) \\ &= S_2(0)e^{\mu_2 t}\exp(\sigma_2 W_2^\star(t) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t)e^{\vartheta_2\sigma_2 t} \end{aligned}$$

$e^{-rt}S(t) = S^\star(t)$ ist ein Martingal, genau dann wenn

$$\mu_2 + \vartheta_2\sigma_2 = r \Leftrightarrow \vartheta_2 = -\frac{\mu_2 - r}{\sigma_2}$$

2. Schritt Wende Girsanov auf Aktie 1 an (genauer: auf $W_1$):
Für $\vartheta_1 \in \mathbb{R}$ definiere:
$\frac{d\mathbb{P}_{(\vartheta_1,\vartheta_2)}}{d\mathbb{P}_{\vartheta_2}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp(\vartheta_1 W_1(t) - \frac{1}{2}\vartheta_1^2 t), \qquad 0 \le t \le T$
Girsanov liefert:
$W_1^\star(t) = W_1(t) - \vartheta_1 t, \qquad t \ge 0$
ist ein Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{P}_{(\vartheta_1,\vartheta_2)}$.
Analog zum 1. Schritt gilt:
$W_1^\star$ und $W_2^\star$ sind stochastisch unabhängige Wiener-Prozesse bzgl. $\mathbb{P}_{(\vartheta_1,\vartheta_2)}$.
Bezüglich $\mathbb{P}_{(\vartheta_1,\vartheta_2)}$ gilt:

$$\begin{aligned} S_2(t) &= S_2(0)e^{rt}\exp(\sigma_2 W_2^\star(t) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t) \quad \text{da } \vartheta_2 = -\frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} \\ S_1(t) &= S_1(0)e^{\mu_1 t}\exp(\sigma_1(\varrho W_2^\star(t) + \sqrt{1-\varrho^2}W_1(t)) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t) \\ &= S_1(0)e^{\mu_1 t}\exp(\sigma_1((\varrho W_2^\star(t) + \vartheta_2 t) + \sqrt{1-\varrho^2}(W_1^\star(t) + \vartheta_1 t)) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t) \\ &= S_1(0)e^{\mu_1 t}\exp(\sigma_1\varrho\vartheta_2 t + \sqrt{1-\varrho^2}\vartheta_1\sigma_1 t)\exp(\sigma_1(\varrho W_2^\star(t) + \sqrt{1-\varrho^2}W_1^\star(t) - \frac{1}{2}\sigma_1 t)) \end{aligned}$$

Also ist $(e^{-rt}S_1(t))_{t\ge 0} = (S^\star(t))_{t\ge 0}$ ein Martingal genau dann wenn

$$\begin{aligned} &\mu_1 + \sigma_1\vartheta_2\varrho + \sqrt{1+\varrho^2}\vartheta_1\sigma_1 = r \\ \Leftrightarrow \vartheta_1 &= -\frac{1}{\sqrt{1-\varrho^2}}\left(\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} - \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2}\varrho\right) \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{P}^\star = \mathbb{P}_{(\vartheta_1,\vartheta_2)}$ ein äquivalentes Martingalmaß.

### 6.8.2 Bemerkung:

$\mathbb{P}^\star$ ist eindeutig bestimmt.

### 6.8.3 Bewertung einer Exchange-Option

Claim $C = (S_2(T) - S_1(T))^+$
Bezüglich $\mathbb{P}^\star$ gilt:
$S_2(t) = S_2(0)e^{rt}\exp(\sigma_2 W_2^\star(t) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t)$
$S_1(t) = S_1(0)e^{rt}\exp(\sigma_1 B_1(t) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t)$
mit $B_1(t) = \varrho W_2^\star(t) + \sqrt{1-\varrho^2}W_1^\star(t)$ Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{P}^\star$.
Es gilt:
$\mathbb{E}^\star e^{-rT}(S_2(T) - S_1(T))^+$
$= \mathbb{E}^\star e^{-rT}S_2(T)\mathbb{1}_{\{S_2(T)>S_1(T)\}} - \mathbb{E}^\star e^{-rT}S_1(T)\mathbb{1}_{\{S_2(T)>S_1(T)\}}$
$= S_2(0)\mathbb{P}_2^\star(S_2(T) > S_1(T)) - S_1(0)\mathbb{P}_1^\star(S_2(T) > S_1(T))$
Mit $\frac{d\mathbb{P}_2^\star}{d\mathbb{P}^\star}\Big|_{\mathcal{F}_t} := \frac{S_2^\star(t)}{S_2(0)} = \exp(\sigma_2 W_2^\star(t) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t)$
und $\frac{d\mathbb{P}_1^\star}{d\mathbb{P}^\star}\Big|_{\mathcal{F}_t} := \frac{S_1^\star(t)}{S_1(0)} = \exp(\sigma_1 B_1(t) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t)$
Wegen

$$\begin{aligned} \log\frac{S_2(T)}{S_1(T)} &= \log\frac{S_2(0)}{S_1(0)} + \sigma_2 W_2^\star(T) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 T - \sigma_1 B_1(T) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 T \\ &= \log\frac{S_2(0)}{S_1(0)} + (\sigma_2 - \sigma_1\varrho)W_2^\star(T) - \sigma_1\sqrt{1-\varrho^2}W_1^\star(T) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)T \end{aligned}$$

gilt:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}_2^\star\left(S_2(T) > S_1(T)\right)\\
&= \mathbb{P}_2^\star\left(\log\tfrac{S_2(T)}{S_1(T)} > 0\right)\\
&= \mathbb{P}_2^\star\left((\sigma_2-\sigma_1\varrho)W_2^\star(T) - \sigma_1\sqrt{1-\varrho^2}W_1^\star(T) > \log\tfrac{S_1(0)}{S_2(0)} + \tfrac{1}{2}(\sigma_1^2-\sigma_2^2)T\right)\\
&= \mathbb{P}_2^\star\left((\sigma_2-\sigma_1\varrho)(W_2^\star(T)-\sigma_2 T) - \sigma_1\sqrt{1-\varrho^2}W_1^\star(T) > \log\tfrac{S_1(0)}{S_2(0)} - \tfrac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)T + \sigma_1\sigma_2\varrho T\right)\\
&= \mathbb{P}_2^\star\left(\underbrace{\frac{(\sigma_2-\sigma_1\varrho)(W_2^\star(T)-\sigma_2 T) - \sigma_1\sqrt{1-\varrho^2}W_1^\star(T)}{\sqrt{T(\sigma_2^2-2\varrho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2)}}}_{\sim N(0,1)} > \frac{\log\frac{S_1(0)}{S_2(0)} - \frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)T + \sigma_1\sigma_2\varrho T}{\sqrt{T(\sigma_2^2-2\varrho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2)}}\right)\\
&= \Phi\left(\frac{\log\frac{S_2(0)}{S_1(0)} + \frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)T - \sigma_1\sigma_2\varrho T}{\sqrt{T(\sigma_2^2-2\varrho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2)}}\right)
\end{aligned}
$$

Bezüglich $\mathbb{P}_1^\star$ sind
$W_2^\star(t) - \sigma_1\varrho t$ und $W_1^\star(t) - \sigma_1\sqrt{1-\varrho^2}t$ mit $t \geq 0$
unabhängige Wiener-Prozesse.
Dies ist an dieser Stelle nicht klar und kann (vermutlich) mit dem einfachen Girsanov nicht bewiesen werden.
Somit gilt:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}_1^\star\left(S_2(T) > S_1(T)\right)\\
&= \mathbb{P}_1^\star\left(\log\tfrac{S_2(T)}{S_1(T)} > 0\right)\\
&= \mathbb{P}_1^\star\left((\sigma_2-\sigma_1\varrho)W_2^\star(T) - \sigma_1\sqrt{1-\varrho^2}W_1^\star(T) > \log\tfrac{S_1(0)}{S_2(0)} + \tfrac{1}{2}(\sigma_1^2-\sigma_2^2)T\right)\\
&= \mathbb{P}_1^\star\Big((\sigma_2-\sigma_1\varrho)(W_2^\star(T)-\sigma_1\varrho T) - \sigma_1\sqrt{1-\varrho^2}(W_1^\star(T) - \sigma_1\sqrt{1-\varrho^2}T)\\
&\qquad\qquad > \log\tfrac{S_1(0)}{S_2(0)} + \tfrac{1}{2}(\sigma_1^2-\sigma_2^2)T + \sigma_1^2\varrho^2 T - \sigma_1\sigma_2\varrho T + \sigma_1^2(1-\varrho^2)T\Big)\\
&= \mathbb{P}_1^\star\left(\underbrace{\frac{(\sigma_2-\sigma_1\varrho)(W_2^\star(T)-\sigma_1\varrho T) - \sigma_1\sqrt{1-\varrho^2}(W_1^\star(T) - \sigma_1\sqrt{1-\varrho^2}T)}{\sqrt{T(\sigma_2^2-2\varrho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2)}}}_{\sim N(0,1)} > \frac{\log\frac{S_1(0)}{S_2(0)} - \frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)T - \sigma_1\sigma_2\varrho T}{\sqrt{T(\sigma_2^2-2\varrho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2)}}\right)\\
&= \Phi\left(\frac{\log\frac{S_2(0)}{S_1(0)} - \frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)T + \sigma_1\sigma_2\varrho T}{\sqrt{T(\sigma_2^2-2\varrho\sigma_1\sigma_2+\sigma_1^2)}}\right)
\end{aligned}
$$