

Credit Risk+: Eine Einführung

Volkert Paulsen

December 9, 2004

Abstract

Credit Risk+ ist neben Credit Metrics ein verbreitetes Kreditrisikomodell, dessen Ursprung in der klassischen Risikothorie liegt. Deshalb wird in dieser Einführung diese Zusammenhänge aufgedeckt, die hoffentlich ein gutes Verständnis des Modells erlauben.

Wir betrachten ein Kreditportfolio bestehend aus n Kreditverträgen. Durch Credit Risk+ wird nicht nach Bonitätsänderung differenziert, nur bei Ausfall eines Kreditnehmers wird ein Verlust quantifiziert. Dafür wird konsequent eine Portfoliosichtweise durchgeführt und eine exakte numerische Möglichkeit gegeben, die Portfolioverlustverteilung zu berechnen. Wir gehen das Modell in mehreren Schritten an.

1 Unabhängige Kontrakte

Zunächst nehmen wir an, daß alle Kontrakte sich unabhängig verhalten. Dann können wir den Portfolioverlust durch ein individuelles Modell der Risikothorie beschreiben.

Der zufällige Verlust des i -ten Vertrages entspricht dabei einer Zufallsvariable

$$X_i = EAD_i \cdot LGD_i \cdot L_i \quad , \quad (1)$$

Wir nehmen dabei an, daß der exposure at default und loss given default nicht zufällig sondern Konstanten für das Modell sind. Damit können wir dann den zufälligen Portfolioverlust ausdrücken durch

$$L_{Pf} = \sum_{i=1}^n c_i L_i \quad (2)$$

mit $c_1 = EAD_1 \cdot LGD_1, \dots, c_n = EAD_n \cdot LGD_n$ und stochastisch unabhängigen $L_1, \dots, L_n$. Die Verlustwahrscheinlichkeit eines einzelnen Kredites ist für das Modell bekannt und wird mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ bezeichnet. Es gilt also

$$P(L_i = 1) = \lambda_i = 1 - P(L_i = 0)$$

für alle $1 \leq i \leq n$. Wegen der Unabhängigkeit ist prinzipiell die Portfolioverlustverteilung als Faltung der Verteilung der Summanden berechenbar. Für große Portfolios ist dies aber numerisch zu aufwendig. Eine Verbesserung erhält man, wenn man das Portfolio nach den möglichen Verlusten gruppiert.

1.1 Gruppierungsschritt

In der Regel ist die Anzahl an möglichen Verlusten wesentlich geringer als die Anzahl an Verträgen im Portfolio. Man wählt eine Maßeinheit E und erhält

$$\{c_1, \dots, c_n\} = \{E, 2E, \dots, KE\}$$

mit K sehr viel kleiner als n . Dann partitioniert man die Verträge nach deren möglichen Verlusten durch Einführung von Gruppen $G_1, \dots, G_K$ mittels

$$i \in G_j \iff c_i = jE \quad .$$

Damit erhalten wir für den zufälligen Portfolioverlust

$$L_{Pf} = \sum_{j=1}^K jE \sum_{i \in G_j} L_i = E \sum_{j=1}^K jY_j \quad , \quad (3)$$

wobei $Y_j = \sum_{i \in G_j} L_i$ die zufällige Anzahl an Ausfällen in der Gruppe G_j bezeichnet. Die Verteilung von Y_j kann als Faltung von Bernoulliverteilungen numerisch einfach berechnet werden. Durch Faltung dieser K Verteilungen kann dann die Portfolioverlustverteilung prinzipiell berechnet werden. Man hat dadurch einiges an Komplexität eingespart, wenn K sehr viel kleiner ist als n . Trotz der Verbesserung ist die numerische Berechnung der Verteilung immer noch aufwendig. Deshalb führt man eine in der Risikothorie übliche Approximation durch ein kollektives Modell vom Poissontyp durch.

1.2 Approximationsschritt

Approximiere Y_j für jedes j durch eine Poissonverteiltes N_j mit gleichem Mittelwert. Wähle also den Parameter μ_j von N_j durch

$$\mu_j = \sum_{i \in G_j} \lambda_i \quad .$$

Dann kann der Portfolioverlust L_{Pf} approximiert werden durch

$$S = E \sum_{j=1}^K jN_j \quad (4)$$

und man erhält, daß S wie eine sogenannte Poissonsche Summenvariable verteilt ist. Setzt man

$$Q(jE) = \frac{\mu_j}{\mu} \quad (5)$$

für alle $j = 1, \dots, K$ mit $\mu = \sum_{j=1}^K \mu_j$, so gilt

$$Vert(S) = PSV(\mu, Q) = \sum_{k=0}^{\infty} Q^{*(k)} e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} \quad . \quad (6)$$

Die rechte Seite nennt man Poissonsche Summenverteilung mit den Parametern μ und Q . Probabilistisch erhält man die Verteilung als zufällige Summe von unabhängigen, jeweils Q -verteilten Zufallsvariablen $H_1, H_2, \dots$. Es ist also S verteilt wie

$$\sum_{k=1}^N H_k \quad (7)$$

mit $Poi(\mu)$ verteiltem N unabhängig von $H_1, H_2, \dots$.

Interpretation: Die zufällige Anzahl an Verlusten im Portfolio ist $Poi(\mu)$ verteilt. Die zufällige Höhe des k -ten Verlustes ist H_k und nach Q verteilt. Über die Güte der Approximation kann man folgende obere Schranke bezüglich des Abstandes in der totalen Variationsnorm machen

$$d(P(L_{Pf} \in \cdot), P(S \in \cdot)) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \quad . \quad (8)$$

Sind also alle Ausfallwahrscheinlichkeiten klein, was bei Kreditportfolios üblicherweise der Fall ist, so ist die Approximation vernünftig. Die Approximation durch eine Poissonsche Summenverteilung hat den großen Vorteil, daß die Portfolioverlustverteilung durch die sogenannte Panjeirrekursion schnell numerisch berechnet werden kann.

2 Das Einsektormodell

Kreditrisiken sind nicht unabhängig. Im Einsektormodell nimmt man an, daß es einen zufälligen makroökonomischen Einfluß gibt, der die Ausfallwahrscheinlichkeit aller Kredite im Portfolio simultan beeinflusst. Bedingt auf den makroökonomischen Faktor verhält sich das Modell wie bei unabhängigen Verträgen. Dies führt zu folgenden Annahmen:

2.1 Modellannahmen

- (i) der makroökonomische Faktor ist eine $\Gamma(\alpha, \beta)$ - verteilte Zufallsvariable Λ mit Dichte

$$f_{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^{-\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{\beta}x} \quad , x > 0 \quad (9)$$

und Parametern $\alpha > 0, \beta > 0$ Es gilt somit

$$E\Lambda = \alpha\beta, Var\Lambda = \alpha\beta^2, c\Lambda \approx \Gamma(\alpha, c\beta). \quad (10)$$

- (ii) Der zufällige Portfolioverlust ist durch (2) gegeben und es gilt $L_1, \dots, L_n$ sind bedingt stochastisch unabhängig - gegeben $\Lambda = \lambda$ mit bedingter Verteilung

$$P(L_i \in \cdot | \Lambda = \lambda) = Poi(\lambda_i \frac{\lambda}{E\Lambda}) \quad (11)$$

für alle $1 \leq i \leq n, \lambda > 0$.

Die Intensitätsparameter der Poissonschen Zufallsvariablen sind gewissermaßen zufällig und werden durch den makroökonomischen Faktor bestimmt. Der Parameter λ_i gibt den firmenspezifischen Effekt auf die default Intensität an während $\frac{\Lambda}{E\Lambda}$ den zusätzlichen relativen Effekt verursacht durch den makroökonomischen Einflußwiderspiegelt.

2.2 bedingte Verteilung

Wie im unabhängigen Fall wird das Portfolio nach den möglichen Verlusten gruppiert. Wir erhalten für den Portfolioverlust

$$L_{Pf} = E \sum_{j=1} K_j N_j \quad (12)$$

mit $N_j = \sum_{i \in G_j} L_i$. Wegen der bedingten stochastischen Unabhängigkeit der L_i folgt, daß $N_1, \dots, N_K$ bedingt stochastisch unabhängig sind mit

$$P(N_j \in \cdot | \Lambda = \lambda) = Poi(\mu_j \frac{\lambda}{E\Lambda}) \quad (13)$$

für alle $j = 1, \dots, K$, $\lambda > 0$. Hierbei ist $\mu_j = \sum_{i \in G_j} \lambda_i$ als spezifischer Effekt der Gruppe G_j zu interpretieren. Wie im unabhängigen Fall ergibt sich, daß nun die bedingten Portfolioverlustverteilungen Poissonsche Summenverteilungen sind:

$$P(L_{Pf} \in \cdot | \Lambda = \lambda) = PSV(\mu \frac{\lambda}{E\Lambda}, Q) \quad (14)$$

mit $\mu = \sum_{j=1}^K \mu_j$ und Q definiert in (5).

2.3 Mischung

Die bedingten Portfolioverlustverteilungen sind also berechnet und man erhält die unbedingte durch Mischen bezüglich der Verteilung von Λ . Da diese Gammaverteilt ist, kann man die unbedingte Verteilung explizit ausrechnen und wieder als eine zusammengesetzte Summenverteilung eines kollektiven Modells der Risikotheorie identifizieren. Zu Verteilungen R auf $\mathbb{N}_0$ und Q auf $(0, \infty)$ definiere

$$SV(R, Q) = \sum_{k=0}^{\infty} Q^{*(k)} R(k) \quad . \quad (15)$$

Durch R wird die Verteilung der Anzahl der Verluste in einem Portfolio spezifiziert. Q bestimmt die Verteilung der Höhe eines eingetretenen Verlustes. Hängt nun die Verteilung $R = R_\lambda$ von einem Parameter λ ab und ist π ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Menge der Parameter, so erhält man, daß die sich ergebende Mischungsverteilung wieder eine zusammengesetzte Summenverteilung ist.

$$\int SV(R_\lambda, Q) \pi(d\lambda) = SV(R, Q) \quad (16)$$

mit

$$R = \int R_\lambda \pi(d\lambda). \quad (17)$$

Dies können wir nun auf Credit Risk+ anwenden, um die unbedingte Portfolioverlustverteilung zu bestimmen.

$$\begin{aligned} P(L_{Pf} \in \cdot) &= \int_0^\infty P(L_{Pf} \in \cdot | \Lambda = \lambda) f_{\alpha, \beta}(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^\infty PSV(\mu \frac{\lambda}{\alpha\beta}, Q) f_{\alpha, \beta}(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

$$= NbSV((\alpha, \frac{1}{1 + \frac{u}{\alpha}}), Q) \quad (18)$$

$NbSV((\alpha, p), Q)$ mit $p = \frac{\alpha}{\alpha + \mu}$ bezeichnet hierbei eine negativ binomiale Summenverteilung. Dies ist eine zusammengesetzte Summenverteilung bei der die Anzahl an Verlusten im Portfolio eine $Nb(\alpha, p)$ Verteilung mit $r > 0, p \in (0, 1)$ hat.

$$Nb(\alpha, p)(n) = \binom{n + \alpha - 1}{n} p^\alpha (1 - p)^n, n \in \mathbb{N}_0$$

Die Zähldichte dieser negativ binomialen Summenverteilung läßt sich wieder mit einer Panjeir Rekursion numerisch berechnen.

Auch können wir die momenterzeugende Funktion angeben. Wir betrachten hierzu den Fall $E = 1$ und erhalten mit $f(t) = \sum_{j=1}^K t^j \frac{\mu_j}{\mu}$ für $G(t) = Et^{L_{Pf}}$

$$G(t) = \left(\frac{p}{1 - (1 - p)f(t)} \right)^\alpha \quad (19)$$

3 Mehrsektorenmodell

Beim Mehrsektorenmodell beeinflussen mehrere makroökonomische Faktoren simultan die Ausfallintensität der Kreditverträge. Diese werden modelliert durch r unabhängige Zufallsvariablen $\Lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(r)}$, die jeweils Gammaverteilt sind mit Parametern $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_r, \beta_r)$. Weiter haben wir wie im Einsektormodell n Verträge mit Risikosummen $c_1, \dots, c_n$ sowie firmenspezifischen Effekten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ auf die Defaultintensitäten. Der Portfolioverlust beträgt

$$L_{Pf} = \sum_{i=1}^n c_i L_i \quad (20)$$

und nach Gruppierung nach möglichen Verlusthöhen

$$L_{Pf} = E \sum_{j=1}^K j N_j. \quad (21)$$

Um die Abhängigkeit der Defaultintensität des i -ten Vertrages im Portfolio von den Faktoren zu modellieren, werden nichtnegative Gewichte

$$(w_{is})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq s \leq r} \quad (22)$$

gesetzt, so daß

$$\sum_{s=1}^r w_{is} = 1 \quad (23)$$

für alle $1 \leq i \leq n$. Wie im Einsektormodell wird eine bedingt stochastische Unabhängigkeit von $L_1, \dots, L_n$ gegeben $\Lambda^{(1)} = \lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(r)} = \lambda^{(r)}$ gefordert und angenommen, daß

$$P(L_i \in \cdot | \Lambda^{(1)} = \lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(r)} = \lambda^{(r)}) = Poi(\lambda_i \sum_{s=1}^r w_{is} \frac{\lambda^{(s)}}{E\Lambda^{(s)}}) \quad (24)$$

für alle Verträge $1 \leq i \leq n$ und Realisationen $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)}$ der makroökonomischen Faktoren gilt. Hieraus folgt nun, daß die Anzahl an Ausfällen N_j in der j -ten Gruppe bedingt eine Poissonverteilung ist mit

$$\begin{aligned} P(N_j \in \cdot | \Lambda^{(1)} = \lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(r)} = \lambda^{(r)}) &= Poi\left(\sum_{i \in G_j} \lambda_i \sum_{s=1}^r w_{is} \frac{\lambda^{(s)}}{E\Lambda^{(s)}}\right) \\ &= Poi\left(\sum_{s=1}^r m_{j,s} \frac{\lambda^{(s)}}{E\Lambda^{(s)}}\right) . \end{aligned} \quad (25)$$

Dabei bezeichnet

$$m_{j,s} = \sum_{i \in G_j} \lambda_i w_{is} \quad (26)$$

den Effekt des Sektors s auf die Gruppe j . Es wird nun eine Zerlegung der Gruppe nach Sektoren durchgeführt

$$N_j = \sum_{s=1}^r N_{j,s} \quad (27)$$

mit bedingt unabhängigen $N_{j,1}, \dots, N_{j,r}$, die

$$P(N_{j,s} \in \cdot | \Lambda^{(1)} = \lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(r)} = \lambda^{(r)}) = Poi\left(m_{j,s} \frac{\lambda^{(s)}}{E\Lambda^{(s)}}\right) \quad (28)$$

erfüllen für alle $s = 1, \dots, r$. Dann gilt

$$\begin{aligned} L_{Pf} &= E \sum_{j=1}^K j N_j \\ &= E \sum_{j=1}^K \sum_{s=1}^r j N_{j,s} \\ &= E \sum_{s=1}^r \sum_{j=1}^K j N_{j,s} \\ &= \sum_{s=1}^r L^{(s)}, \end{aligned} \quad (29)$$

wobei

$$L^{(s)} = \sum_{j=1}^K j N_{j,s} \quad (30)$$

einem Portfolioverlust eines Einsektormodells entspricht. Da $L^{(s)}$ nur vom s -ten Faktor $\Lambda^{(s)}$ abhängt, sind $L^{(1)}, \dots, L^{(r)}$ stochastisch unabhängig und wir erkennen, daß die Portfolioverlustverteilung im Mehrsektorenmodell die Faltung von r Einsektorportfolioverlustverteilungen ist. Wendet man die Ergebnisse des Einsektormodells an, ergibt sich für die Portfolioverlustverteilung von $L_{Pf} = \sum_{s=1}^r L^{(s)}$.

$$P(L_{Pf} \in \cdot) = NbSV\left(\left(\alpha_1, \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + m_1}\right), Q^{(1)} * \dots * NbSV\left(\left(\alpha_r, \frac{\alpha_r}{\alpha_r + m_r}\right), Q^{(r)}\right)\right) \quad (31)$$

mit

$$m_s = \sum_{j=1}^K m_{j,s}, Q^{(s)}(jE) = \frac{m_{j,s}}{m_s} \quad (32)$$

Diese r -fache Faltung ist zwar keine Summenverteilung. Es ergibt sich aber die momenterzeugende Funktion $G(t) = Et^{L_{Pf}}$ als Produkt der momenterzeugenden Funktionen der Einsektormodelle. Wir erhalten also im Falle $E = 1$

$$G(t) = \prod_{s=1}^r \left(\frac{p_s}{1 - (1 - p_s)f_s(t)} \right)^{\alpha_s} \quad (33)$$

mit $p_s = \frac{\alpha_s}{\alpha_s + m_s}$. Damit ist G in eine Potenzreihe um 0 mit positivem Konvergenzradius entwickelbar und erfüllt

$$(\ln \circ G)'(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$$

für Polynome p, q . Hieraus lassen sich die Koeffizienten von G , die gerade die Zähldichte der Portfolioverlustverteilung bilden rekursiv ausrechnen durch Anwendung des folgenden Lemmas.

3.1 Lemma *Sei $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius, so daß*

$$(\ln \circ F)'(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

für Polynome $p(z) = \sum_{i=0}^m d_i z^i, q(z) = \sum_{j=0}^M b_j z^j$ gilt. Dann erfüllt (a_n) die folgende Rekursionsbeziehung

$$\begin{aligned} a_0 &= F(0) \\ a_{n+1} &= \frac{1}{b_0(n+1)} \left(\sum_{i=0}^{m \wedge n} d_i a_{n-i} - \sum_{j=0}^{(M-1) \wedge (n-1)} b_{j+1} (n-j) a_{n-j} \right) \end{aligned} \quad (34)$$