



# Modellierung negativer Zinsraten mit Hilfe des Shifted Libormarkt Modells

Masterarbeit  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Master of Science

Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Fachbereich Mathematik und Informatik  
Institut für Mathematische Statistik

Betreuung: PD Dr. Volkert Paulsen  
Eingereicht von: Arthur Wetschereck

## **Eigenständigkeitserklärung**

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

---

(Datum, Unterschrift)

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

---

(Datum, Unterschrift)

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>1. Grundlagen</b>	<b>7</b>
1.1. LIBOR . . . . .	7
1.2. Bonds, Zinssätze und Swaps . . . . .	8
1.3. Caps, Floor und Swaptions . . . . .	12
<b>2. Herleitung des allgemeinen Shifted Libormarkt Modells</b>	<b>15</b>
2.1. Herleitung SDE . . . . .	15
2.2. Shift . . . . .	19
2.3. Arbitragefreier Drift . . . . .	20
2.4. Korrelationsstruktur . . . . .	24
<b>3. Shifted Lognormal Libormarkt Modell mit deterministischer Volatilität</b>	<b>28</b>
3.1. Modell . . . . .	28
3.1.1. Dynamik unter den Forwardmartingalmaßen . . . . .	29
3.1.2. Dynamik unter dem Spotmaß . . . . .	31
3.2. Cap Preis . . . . .	33
3.3. Swaption Preis . . . . .	35
3.4. Monte Carlo Swaption Preis . . . . .	39
<b>4. Implizite Volatilität</b>	<b>43</b>
4.1. Bachelier-Modell . . . . .	44
4.2. Zusammenhang zwischen ATM Normal- und Lognormal-Volatilitäten	46
<b>5. Kalibrierung</b>	<b>50</b>
5.1. Bootstrapping der Forwardraten . . . . .	51
5.2. Kalibrierung an Caplets . . . . .	52
5.3. Parametrisierung der Volatilität . . . . .	54
5.4. Swaptions . . . . .	56
5.5. Ergebnis . . . . .	59

<b>6. Shifted Lognormal Libormarkt Modell mit unbestimmten Parametern</b>	<b>61</b>
6.1. Modell . . . . .	61
6.2. Cap Preis . . . . .	62
6.3. Swaption Preis . . . . .	63
<b>7. Shifted Libormarkt Modell mit stochastischer Volatilität</b>	<b>66</b>
7.1. Das Modell . . . . .	66
7.2. Caplet Preis . . . . .	68
7.2.1. Dynamik unter dem Forwardmartingalmaß . . . . .	68
7.2.2. Options Preis . . . . .	73
7.3. Swaption Preis . . . . .	76
7.4. Herleitung der momenterzeugenden Funktion . . . . .	81
<b>8. Fazit</b>	<b>87</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>89</b>
A.1. Diffusionsterm und Korrelation unter äquivalentem Maßwechsel . . . . .	89
A.2. Integrationsterm . . . . .	91
A.3. Starke Lösbarkeit . . . . .	91
A.3.1. Caplet . . . . .	91
A.3.2. Swaption . . . . .	92
A.4. Vollständige Markdaten . . . . .	93
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>96</b>

# Einleitung

Um Zinsderivate zu bewerten ist das Libormarkt Modell besonders verbreitet. Dabei wird eine direkt am Markt beobachtbare Größe, die LIBOR Rate, modelliert. Ein weiterer Vorteil ist, dass sich Preise von Caps sowie Swaptions einfach mit Hilfe von Black's Formel berechnen lassen. Dies ermöglicht auch eine effiziente Kalibrierung des Modells.

Ein großer Nachteil des Libormarkt Modells ist allerdings die Annahme einer deterministischen Volatilität. Denn dadurch ergibt sich eine glatte implizite Volatilitätskurve. Die am Markt quotierten Volatilitäten unterliegen im Gegensatz dazu jedoch Skew bzw. Smile Effekten. Diese lassen sich aber im Libormarkt Modell nicht erklären. Um Volatilitätssmiles modellieren zu können, gibt es jedoch einige Modelerweiterungen.

Aufgrund der Modellierung der LIBOR Raten als geometrischer Wiener Prozess ist das Libormarkt Modell nicht in der Lage, negative LIBOR Raten zu modellieren. Als Auswirkung der Finanzkrise bzw. Eurokrise treten jedoch negative Zinsraten im Allgemeinen und negative LIBOR Raten im Besonderen auf. So hat zum Beispiel im Juni 2014 die EZB einer Ihrer Zinsraten einen negativen Wert zugewiesen.

Benoît Cœuré, seit 2012 Direktoriumsmitglied der EZB, erklärt das Auftreten negativer Zinsen aus wirtschaftlicher Sicht ([Cœu16]). Dazu verwendet er das Konzept des natürlichen Zins. Dies ist der Zinssatz, der konsistent mit der Inflationsrate und dem Wirtschaftswachstum ist. Ein tatsächlicher Zins, der höher als der natürliche Zins ist, stellt einen Anreiz zum Sparen dar und umgekehrt. Ein Abfallen des natürlichen Zins, gedämpftes Wachstum und niedrige Inflation führen dazu, dass Zentralbanken ihre Zinsraten senken, um Wachstum anzuregen und das Zielinflationsniveau zu erreichen. Der natürliche Zins wird heutzutage teilweise negativ geschätzt, so dass negative Zinsraten die Folge sind.

Das Ziel dieser Arbeit ist es darzustellen, wie negative Zinsen durch eine Erweiterung des Libormarkt Modells modelliert werden können. Dazu werden wir einen Shift

zu den LIBOR Raten addieren, um positive Raten zu erhalten. Diese geshifteten LIBOR Raten modellieren wir dann so, wie es im Libormarkt Modell üblich ist. Wir zeigen, dass Vorteile des Libormarkt Modells, wie die einfache Optionsbewertung, erhalten bleiben. Zusätzlich betrachten wir zwei Erweiterungen des Modells, die es ermöglichen, einen Volatilitätssmile zu modellieren.

Die Arbeit gliedert sich in folgende Kapitel: Zunächst definieren wir die verwendeten Zinsraten und Finanzderivate. Im zweiten Kapitel treffen wir die Modellannahmen und leiten eine modellbeschreibende stochastische Differentialgleichung her. Die Kapitel drei, vier und fünf thematisieren die Optionspreisbestimmung von Caps und Swaptions, sowie eine Kalibrierung des Shifted Libormarkt Modells. Im sechsten und siebten Kapitel betrachten wir zwei Erweiterungen des Modells zur Modellierung des Volatilitätssmiles.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Privatdozent Dr. Volkert Paulsen für die Überlassung dieses Themas und die ausgezeichnete Betreuung während der Erstellung der Masterarbeit recht herzlich bedanken. Diese Arbeit wurde in Kooperation mit zeb/information.technology gmbh & co.kg erstellt. Für die hervorragende Betreuung seitens zeb durch Herrn Marcel Cresnik möchte ich mich auch herzlich bedanken.

# 1. Grundlagen

In diesem Kapitel sollen die Zinssätze und Finanzderivate eingeführt werden, auf welche sich die weitere Arbeit bezieht. Wir legen einen endlichen Finanzmarkt auf einem Zeitintervall  $[0, T]$  mit  $T < \infty$  zugrunde. Für alle weiteren Zeitpunkte  $T^*$ , die in dieser Arbeit betrachtet werden, nehmen wir  $T^* \leq T$  an. Zunächst betrachten wir den namensgebenden LIBOR.

## 1.1. LIBOR

**Definition 1.1.1** (LIBOR). *Der LIBOR (London Interbank Offered Rate) ist der Zinssatz, zu welchem Londoner Banken bereit sind, sich untereinander Geld zu leihen. Aus den Angaben der dazu befragten Banken wird ein durchschnittlicher Interbankzinssatz berechnet.*

Der LIBOR wurde in den 1980ern als Zinsbenchmark eingeführt und täglich von der British Bankers' Association (BBA) ermittelt. Die dazu befragten Banken verfügen alle über ein Kreditrating von AA (zweitbeste Kategorie nach AAA). Der LIBOR wurde von der BBA zuletzt für 10 Währungen und 15 Zeiträume ermittelt ([Hul15]).

Im Zuge der Finanzkrise ist die Integrität des LIBORs in Frage gestellt worden. Seit 2009 untersuchen die Financial Service Authority sowie verschiedene Regulatorien ein eventuelles Fehlverhalten von Finanzinstitutionen bezüglich des LIBORs und anderen Benchmarks ([Gov12]). Als Teil dieser Untersuchungen hat die britische Regierung Ende 2012 den Wheatley Review - eine Überprüfung der Regulierung des LIBORs angeordnet ([Gov16]). Dieser ergab, dass die existierende Regulierung des LIBORs nicht geeignet ist, um dessen Integrität zu gewährleisten. Daher wurde die Verantwortung für den LIBOR an die IBA (ICE Benchmark Administration) übergeben ([IBA16]). Diese veröffentlicht nun täglich den (Intercontinental Exchange) ICE-LIBOR, die Fortsetzung des BBA-LIBORs. Der ICE-LIBOR wird für 5 Währungen (CHF, EUR, GBP, YPJ, USD) und 7 Laufzeiten von Overnight bis 12 Mo-

naten bereit gestellt.

Da der ICE-LIBOR den BBA-LIBOR ersetzt hat, werden wir im Folgenden nur LIBOR schreiben und damit die aktuell am Markt quotierte Größe bezeichnen. Aufgrund der guten Bonität der befragten Banken ist ein Ausfallrisiko zu vernachlässigen und der LIBOR kann als risikoloser Zinssatz verstanden werden. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir ebenfalls keinerlei Ausfallrisiken betrachten. Daher können die zu modellierenden Zinsraten als LIBOR-Raten interpretiert werden.

## 1.2. Bonds, Zinssätze und Swaps

Wir wollen nun die grundlegenden Derivate einführen. Die Ausführungen basieren auf [AP10], [BM01], [Hul15] und [Pau15]. Als Grundlage dieser Arbeit dienen die Nullkuponanleihen:

**Definition 1.2.1** (Nullkuponanleihe). *Eine Nullkuponanleihe mit Maturität  $T^*$  garantiert dem Inhaber zur Zeit  $T^*$  die Auszahlung einer Geldeinheit, ohne Zins- (Kupon-) Zahlung während der Laufzeit.*

Eine Nullkuponanleihe mit Fälligkeit  $T^*$  werden wir auch als  $T^*$ -Bond bezeichnet. Den Wert eines  $T^*$ -Bonds zu einem Zeitpunkt  $t \leq T^*$  bezeichnen wir mit  $B(t, T^*)$ . Daraus ergibt sich für den Endwert, dass  $B(T^*, T^*) = 1$  gilt.

Es wird davon ausgegangen, dass die Auszahlung der Geldeinheit zur Maturität garantiert ist und keinerlei Risiken unterliegt. Damit ist  $B(t, T^*)$  gerade der Wert einer  $T^*$ -Geldeinheit zur Zeit  $t$  und es handelt sich bei  $B(t, T^*)$  um den Diskontfaktor für das Zeitintervall  $[t, T^*]$ .

Ausgehend von den eingeführten Bonds ist es nun möglich, Zinsraten zu definieren. Dazu bezeichnen wir den jährlichen Zins einer risikolosen Anlage für ein Zeitintervall  $[t, T^*]$  mit  $L(t, T^*)$ . Wir betrachten zwei verschiedene Strategien, um ein Nominal in Höhe von  $N$  von einem aktuellen Zeitpunkt  $t$  bis zu einem zukünftigen Zeitpunkt  $T^*$  anzulegen.

1. Investieren wir das Nominal zur Zeit  $t$  in  $T^*$ -Bonds, so erhalten wir  $\frac{N}{B(t, T^*)}$  Bonds. Zur Zeit  $T^*$  erhalten wir somit  $\frac{N}{B(t, T^*)}$  Geldeinheiten.
2. Investieren wir das Nominal zur Zeit  $t$  in eine risikolose Anlage, so erhalten wir in  $T^*$  eine Zinszahlung in Höhe von  $NL(t, T^*)(T^* - t)$ . Zusätzlich erhalten



wir unser investiertes Nominal  $N$  zurück.

Da die Auszahlung beider Strategien zum Investitionszeitpunkt  $t$  feststeht, garantiert ist und das gleiche Nominal  $N$  investiert wird, muss auch die Auszahlung beider Strategien gleich sein. Damit ergibt sich folgende Gleichung:

$$N(1 + L(t, T^*)(T^* - t)) = \frac{N}{B(t, T^*)}. \quad (1.1)$$

Lösen wir diese Gleichung nach der Zinsrate  $L(t, T^*)$  auf, können wir die sogenannte Spot-LIBOR-Rate definieren.

**Definition 1.2.2** (Spot-LIBOR-Rate). *Es seien  $t$  der gegenwärtige und  $T^*$  ein zukünftiger Zeitpunkt mit  $0 \leq t \leq T^*$ . Der Zinssatz  $L(t, T^*)$  für eine risikolose Anlage im Zeitraum  $[t, T^*]$  wird als Spot-LIBOR-Rate bezeichnet und ist definiert durch:*

$$L(t, T^*) := \frac{1}{T^* - t} \left( \frac{1}{B(t, T^*)} - 1 \right). \quad (1.2)$$

Damit lassen sich ausgehend von Spot-LIBOR-Raten auch Bond-Preise bestimmen. Gleichung 1.2 lässt sich nach den Bond-Preisen auflösen und man erhält

$$B(t, T^*) = \frac{1}{1 + (T^* - t)L(t, T^*)}. \quad (1.3)$$

Neben der hier verwendeten jährlichen Verzinsung ist es auch möglich, eine halb-, drittel-, usw. jährliche oder stetige Verzinsung zu betrachten. Weiterhin gibt es verschiedene Konventionen zur Tageszählung, auf die wir nicht weiter eingehen werden.

Die Spot-Libor-Rate  $L(t, T^*)$  ist der in  $t$  festehende Zinssatz für eine Anlage von  $t$  bis  $T^*$ . Betrachtet man hingegen ausgehend von einem heutigen Zeitpunkt  $t$  ein zukünftige Periode  $[T_i, T_j]$  mit  $0 \leq t \leq T_i \leq T_j$  so stellt sich die Frage, welchen Zins man heute für eine Anlage von  $T_i$  bis  $T_j$  garantieren kann. Zunächst betrachten wir eine Möglichkeit, sich einen festen Zins für eine zukünftige Periode zu sichern, das sogenannte Forwardrate Agreement (FRA).

Ein Forwardrate Agreement ermöglicht den Austausch einer fixen, zum Abschluss des FRAs feststehenden Zinszahlung, basierend auf einer fixen Rate  $K$  gegen eine variable Zinszahlung, basierend auf der Spot-LIBOR-Rate  $L(T_i, T_j)$ , welche zum Abschluss des FRAs noch nicht feststeht. Damit kann sich der Inhaber bei einer Kreditaufnahme mit variabler Zinszahlung einen festen Zins  $K$  sichern. Für ein

Nominal in Höhe von  $N = 1$  ergibt sich in  $T_j$  die folgende Auszahlung:

$$(T_j - T_i)(L(T_i, T_j) - K) \stackrel{1.2}{=} \frac{1}{B(T_i, T_j)} - 1 - (T_j - T_i)K. \quad (1.4)$$

Damit ergibt sich der Wert des FRAs zu Beginn  $T_i$  der Zinsperiode durch Multiplikation mit dem Diskontierungsfaktor  $B(T_i, T_j)$  zu

$$1 - B(T_i, T_j) ((T_j - T_i)K + 1). \quad (1.5)$$

Um den Wert zu einem Zeitpunkt  $t < T_i$  zu bestimmen, müssen wir dies nochmals mit dem entsprechenden Diskontfaktor  $B(t, T_i)$  multiplizieren.

Der dabei auftretende Term  $B(t, T_i)B(T_i, T_j)$  entspricht dem Wert einer  $T_j$  Geldeinheit in  $t$ . Investiert man in  $t$  den Betrag  $B(t, T_i)B(T_i, T_j)$  in  $T_i$ -Bonds, so erhält man  $B(T_i, T_j)$  Bonds und in  $T_i$  eine Auszahlung in Höhe von  $B(T_i, T_j)$ . Mit diesem Betrag lässt sich in  $T_i$  genau ein  $T_j$ -Bond kaufen, man erhält also in  $T_j$  eine Auszahlung von einer Geldeinheit. Es gilt also:

$$B(t, T_i)B(T_i, T_j) = B(t, T_j). \quad (1.6)$$

Damit ergibt sich der Wert eines FRAs zu:

$$V_{K, T_i, T_j}^{\text{FRA}}(t) = B(t, T_i) - B(t, T_j) - B(t, T_j)(T_j - T_i)K. \quad (1.7)$$

Ein fairer Kontrakt hat bei Abschluss in  $t$  einen Wert von 0. Es gibt genau eine Zinsrate  $K$ , die dies erfüllt.

**Definition 1.2.3.** *[Forward-LIBOR-Rate] Seien  $t, T_i, T_j$  Zeitpunkte mit  $t \leq T_i < T_j$ . Die Forward-LIBOR-Rate ist der faire Zinssatz  $F(t, T_i, T_j)$ , der für das Zeitintervall  $[T_i, T_j]$  zum Zeitpunkt  $t$  festgelegt wird. Aus 1.7 ergibt sich:*

$$F(t, T_i, T_j) = \frac{1}{T_j - T_i} \left( \frac{B(t, T_i)}{B(t, T_j)} - 1 \right). \quad (1.8)$$

Da wir eine Familie von Forwardraten zu disjunkten Zeitintervallen modellieren wollen, werden wir eine Familie von Zeitpunkten betrachten.

**Definition 1.2.4.** *[Tenorstruktur] Eine Tenorstruktur ist eine endliche Menge aufsteigender Zahlen*

$$0 \leq T_0 < T_1 < \dots < T_N \leq T. \quad (1.9)$$

Zu einem Intervall  $[T_i, T_{i+1}]$  bezeichnen wir für  $i = 0, \dots, N - 1$  die Länge mit  $\delta_i$ , also

$$\delta_i = T_{i+1} - T_i. \quad (1.10)$$

Interpretieren wir die einzelnen Zahlen  $(T_i)_{0 \leq i \leq N}$  als Jahre bzw. Jahresanteile, stellt eine Tenorstruktur somit ein Folge von Zeitpunkten dar. Dabei kann  $\delta_i$  als Länge der  $(i + 1)$ .ten Periode angesehen werden.

Betrachten wir die Forward-LIBOR-Rate für zwei aufeinanderfolgende Zeitpunkte  $T_i, T_{i+1}$  unserer Tenorstruktur, werden wir sie als Forwardrate bezeichnen und abkürzend  $L_i(t)$  anstelle von  $F(t, T_i, T_{i+1})$  schreiben. Damit ergibt sich auch für die Spot-LIBOR-Rate  $L(T_i, T_{i+1})$  zu einem Zeitintervall  $[T_i, T_{i+1}]$  die Bezeichnung  $L_i(T_i)$ .

Ein FRA liefert einen einmaligen Austausch von einer fixen und einer variablen Zinszahlung. Möchte man die Zinszahlung einer Anlage dauerhaft gegen eine andere austauschen, spricht man von einem Swap.

Dabei bezeichnet Swap im Allgemeinen den Austausch zweier beliebiger Zahlungsströme, auch Legs genannt. Hängen beide Legs von einer oder mehreren Zinsraten ab, wird der Swap als Zinsswap bezeichnet. Besteht das eine Leg aus einer Folge von fixen Zinszahlungen und das andere aus variablen Zinszahlungen, spricht man von einem Plain-Vanilla-Fixed-For-Floating Zinsswap. Wir werden nur den Fall betrachten, dass das eine Leg aus fixen Zinszahlungen und das andere aus variablen Zinszahlungen, die auf dem LIBOR basieren, besteht und dafür die Bezeichnung Swap verwenden.

Weiterhin unterscheiden wir zwischen einem Payer- und einem Receiver-Swap. Bei einem Payer-Swap werden fixe Zinszahlungen gezahlt und variable Zinszahlungen erhalten. Bei einem Receiver Swap ist dies genau umgekehrt. Es ergibt sich daher, dass ein Receiver-Swap das Negative eines Payer-Swaps ist.

Betrachten wir nun einen Payer-Swap zu zwei Zeitpunkten  $T_n < T_m < T$ , welcher in  $t < T_n$  abgeschlossen wird. In jeder Periode  $[T_i, T_{i+1}]$ , mit  $n \leq i \leq m - 1$ , wird in  $T_i$  der variable Zins  $L(T_i, T_{i+1})$  für die Periode festgelegt und in  $T_{i+1}$  erfolgt der Austausch der Zinszahlungen. Damit lässt sich ein Payer-Swap als eine Abfolge von

FRA interpretieren und wir erhalten für den Wert

$$\begin{aligned}
V_{K,T_n,T_m}^{\text{Swap}}(t) &= \sum_{i=n}^{m-1} V_{K,T_i,T_{i+1}}^{\text{FRA}}(t) \\
&\stackrel{1.7}{=} \sum_{i=n}^{m-1} B(t, T_i) - B(t, T_{i+1})\delta_i K - B(t, T_{i+1}). \tag{1.11}
\end{aligned}$$

Wie bei einem FRA gibt es auch bei einem Swap einen festen Zins  $K$ , so dass der Kontrakt bei Abschluss den Wert 0 hat.

**Definition 1.2.5** (Forwardswaprate). *Die Forwardswaprate  $S_{n,m}(t)$  ist der Zins  $K$  für den ein Zinsswap für ein Zeitintervall  $[T_n, T_m]$  den Wert 0 hat. Aus Gleichung 1.11 ergibt sich somit:*

$$S_{n,m}(t) = \frac{B(t, T_n) - B(t, T_m)}{\sum_{i=n+1}^m \delta_{i-1} B(t, T_i)}. \tag{1.12}$$

Zur Verkürzung der Notation werden wir auch

$$A_{n,m}(t) := \sum_{i=n+1}^m \delta_{i-1} B(t, T_i) = \sum_{i=n}^{m-1} \delta_i B(t, T_{i+1}) \tag{1.13}$$

verwenden. Damit haben wir die Grundlagen geschaffen, um die für diese Arbeit wichtigen Zinsoptionen einzuführen.

### 1.3. Caps, Floor und Swaptions

Ein Caplet ist eine Zinsoption, die es dem Inhaber ermöglicht, sich gegen die Zahlung steigender variabler Zinsen abzusichern. Dabei sind drei Zeitpunkte  $t < T_i < T_{i+1}$  von Bedeutung. Der Caplet-Vertrag wird in  $t$  für ein zukünftiges Intervall  $[T_i, T_{i+1}]$ , mit einem Strike  $K$  abgeschlossen. Der variable Zins  $L_i(T_i)$  für das betrachtete Zeitintervall  $[T_i, T_{i+1}]$  wird am Zinsanpassungstermin  $T_i$  festgelegt. Ist diese Spot-Rate größer als der vereinbarte Strike  $K$ , so hat der Inhaber das Recht, sich die Differenz zur Zeit  $T_{i+1}$  auszahlen zu lassen. Es ergibt sich in  $T_{i+1}$  also eine Auszahlung von:

$$\delta_i (L_i(T_i) - K)^+ = \left( \frac{1}{B(T_i, T_{i+1})} - (1 + K\delta_i) \right)^+. \tag{1.14}$$

Damit entspricht ein Caplet dem Recht, ein FRA auszuüben.

Neben der Absicherung gegen die Zahlung steigender variabler Zinsen ist es mittels eines Floorlets auch möglich, sich gegen den Erhalt fallender Spot-Rates  $L_i(T_i)$  abzusichern. Ein Floorlet entspricht vom Prinzip her einem Caplet. Der Unterschied ist, dass der Inhaber sich die Differenz zwischen Strike  $K$  und Spot-Rate auszahlen lassen kann. Ein Floorlet hat also die Auszahlung:

$$\delta_i(K - L_i(T_i))^+ = \left(1 + K\delta_i - \frac{1}{B(T_i, T_{i+1})}\right)^+. \quad (1.15)$$

Wir werden Caplets bzw. Floorlets als Calls bzw. Puts auf eine Forwardrate interpretieren. Mit der Put-Call-Parität ergibt sich damit ein Zusammenhang zwischen Caplet und Floorlet Preisen. Daher werden im Weiteren nur Caplets betrachten.

In der Regel wird nicht nur ein einzelnes Caplet, sondern eine Familie von Caplets zu aufeinander folgenden Perioden  $[T_i, T_{i+1}]$ ,  $i = n, \dots, m-1$  mit jeweils gleichem Strike  $K$  abgeschlossen. Dieses Portfolio aus Caplets wird als Cap zum Zeitintervall  $[T_n, T_m]$  mit Strike  $K$  bezeichnet. Dabei hat der Optionsinhaber in jeder Periode das Recht zu überlegen, ob er die Option ausübt oder nicht. Damit ergibt sich die Auszahlung eines Caps in  $t < T_n$  zu:

$$\sum_{i=n}^{m-1} B(t, T_i) \delta_i (K - L_i(T_i))^+. \quad (1.16)$$

Ein einzelnes Caplet lässt sich auch als eine Option auf einen Swap, der nur über eine Periode läuft, interpretieren. Somit ist ein Cap eine Familie von solchen Optionen. Es ist jedoch auch möglich, eine Swaption, eine Option auf einen Swap (mit mehr als einer Periode), zu betrachten. Dabei hat der Inhaber nur einmalig das Recht zu entscheiden, ob er den Swap eingehen möchte.

Wie bei einem Swap wird zwischen einer Payer-Swaption und einer Receiver-Swaption unterschieden. Dabei ist eine Payer-Swaption eine Call-Option auf einen Payer-Swap und eine Receiver-Swaption eine Call-Option auf einen Receiver-Swap. Wir werden im Folgenden nur Payer-Swaptions betrachten und diese als Swaption bezeichnen.

Eine Payer-Swaption gibt dem Inhaber das Recht, zu einem zukünftigen Zeitpunkt, der Swaption-Maturität, einen Swapkontrakt zu einem vereinbarten Strike einzugehen. Genauer wird bei Vertragsschluss einer Swaption auf einen Swap zum Zeitintervall  $[T_n, T_m]$  in  $t$  ein Strike  $K$  und eine Swaption-Maturität  $T$  mit  $T \leq T_n$  festgelegt. Zur Zeit  $T$  hat der Inhaber dann das Recht, den vereinbarten Payer-Swap einzugehen. In der Regel stimmt die Swaption-Maturität  $T$  mit dem ersten Zinsanpassungstermin  $T_n$  überein und wir werden nur diesen Fall betrachten.

Um den Wert einer Swaption zu bestimmen, betrachten wir zunächst den Wert des zugrunde liegenden Swaps zum ersten Zinsanpassungstermin  $T_n$ :

$$\begin{aligned}
 V_{K, T_n, T_m}^{\text{Swap}}(T_n) &\stackrel{1.11}{=} \sum_{i=n}^{m-1} B(T_n, T_i) - B(T_n, T_{i+1}) \delta_i K - B(T_n, T_{i+1}) \\
 &\stackrel{1.8}{=} \sum_{i=n}^{m-1} \delta_i B(T_n, T_{i+1}) (L_i(T_n) - K). \tag{1.17}
 \end{aligned}$$

Die Swaption wird nur ausgeübt, wenn der Wert des zugrunde liegenden Swaps positiv ist. Es ergibt sich somit für die Swaptionauszahlung zur Zeit  $t$ :

$$B(t, T_n) \left( \sum_{i=n}^{m-1} \delta_i B(T_n, T_{i+1}) (L_i(T_n) - K) \right)^+. \tag{1.18}$$

Ein Cap und eine Swaption unterscheiden sich darin, wie der Inhaber die Option ausüben darf. Da eine Swaption nur einen Ausübungszeitpunkt beinhaltet, müssen alle Zahlungen einer Swaption auf einmal bewertet werden. Bei einem Cap genügt es, die Auszahlungen der Caplets einzeln zu bewerten.

## 2. Herleitung des allgemeinen Shifted Libormarkt Modells

In diesem Kapitel wollen wir eine stochastische Differentialgleichung herleiten, welche ein allgemeines Shifted Libormarkt Modell beschreibt. Dazu leiten wir im ersten Abschnitt aus wirtschaftlichen und technischen Annahmen einen Prototyp her. Da das betrachtete Modell arbitragefrei sein soll, existiert eine Einschränkung an den Drift dieser Differentialgleichung, welche wir im zweiten Abschnitt herleiten. Im dritten Abschnitt gehen wir genauer auf die Shiftparameter ein. Die Korrelation der Forwardraten wird üblicherweise mit Hilfe einer Parametrisierung modelliert. Im vierten Abschnitt werden wir die dafür angebrachten Argumente auf das Shifted Libormarkt Modell übertragen.

Bei negativen Forwardraten ergibt sich eine Arbitragemöglichkeit, wenn Cash Holding erlaubt ist. Man könnte diese, ähnlich wie im Vasicek Modell, verbieten. Cœuré thematisiert Cash Holding auch in seiner Rede ([Cœu16]). Er sagt, dass das Besitzen größerer Mengen von Geld Sicherheitsvorkehrungen bzw. Versicherungen benötige. Des weiteren sei es umständlich, große Investitionen wie ein Auto oder Haus bar zu bezahlen. Daher gehen wir davon aus, dass Cash Holding keine Arbitrage darstellt, da damit Kosten verbunden sind.

### 2.1. Herleitung SDE

Im Folgenden wollen wir die grundlegenden Annahmen treffen, die zur Beschreibung eines allgemeinen Shifted Libormarkt Modells nötig sind. Aus diesen Annahmen werden wir die mathematische Beschreibung des Modells durch eine stochastische Differentialgleichung herleiten. Dies geschieht analog zur Herleitung der modellbeschreibenden stochastischen Differentialgleichung in von einem Wiener Prozess getriebenen Semimartingalmodellen ([Pau15]).

Wir verwenden eine Tenorstruktur  $0 = T_0 < T - 1 < \dots < T_N \leq T^* < \infty$  mit Intervalllängen  $\delta_i = T_{i+1} - T_i$ ,  $i = 0, \dots, N - 1$  wie in Definition 1.2.4 beschrieben. Dabei betrachten wir  $T_0$  als den aktuellen Zeitpunkt und wählen die zukünftigen Zeitpunkte  $T_1, \dots, T_N$  in Abhängigkeit der zu modellierenden Forwardraten. Als Basisfinanzgüter betrachten wir die Nullkuponanleihen  $(B(t, T_j))_{0 \leq t \leq T_j}$  und als Numéraire den  $T_N$ -Bond.

Dazu betrachten wir einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, (F_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$  und einen  $N - 1$ -dimensionalen Wiener Prozess  $(B^{(i)}(t))_{0 \leq t \leq T, 1 \leq i \leq N-1}$ . Bei der Filtration  $(F_t)_{0 \leq t \leq T}$  handelt es sich dabei um eine Wiener Filtration, die die üblichen Bedingungen erfüllt.

Anstatt der Forderung, dass Bondpreise monoton fallend in der Maturität sind, fordern wir nur, dass sie positiv sind. Die sonst übliche Monotonitätsforderung resultiert in immer positiven Forwardraten:

$$B(t, T_i) > B(t, T_{i+1}) \Leftrightarrow \frac{B(t, T_i)}{B(t, T_{i+1})} - 1 > 0 \Leftrightarrow L_i(t) > 0. \quad (2.1)$$

Daher können die Forwardraten im hier dargestellten Modell negativ werden. Die geforderte Positivität der Bondpreise stellt keine Einschränkung des Modells dar, da negative Bondpreise bzw. kostenlose Bonds eine Arbitragemöglichkeit liefern. Als direkte Folgerung der Positivität der Bondpreise erhalten wir, dass jeder Forwardratenprozess  $(L_j(t))_{0 \leq t \leq T_j}$  nach unten durch  $-\frac{1}{\delta_j}$  beschränkt ist, denn:

$$L_j(t) \leq -\frac{1}{\delta_j} \Leftrightarrow \frac{B(t, T_j)}{B(t, T_{j+1})} \leq 0 \Leftrightarrow B(t, T_j) \leq 0 \vee B(t, T_{j+1}) < 0. \quad (2.2)$$

Weiterhin wollen wir einen arbitragefreien Markt modellieren. Dazu nehmen wir, dass ein zu  $\mathbb{P}$  äquivalentes Maß  $\mathbb{P}_N$  existiert, unter welchem mit dem  $T_N$ -Bond diskontierte Bondpreisprozesse Martingale sind. Also es gilt:

1.  $\mathbb{P} \sim \mathbb{P}_N$
2.  $\left( \frac{B(t, T_j)}{B(t, T_N)} \right)_{0 \leq t \leq T_j}$  ist für  $j = 1, \dots, N - 1$  ein  $\mathbb{P}_N$ -Martingal.

Die Existenz des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\mathbb{P}_N$  impliziert dann die Arbitragefreiheit ([Pau15]).

Aus diesen Annahmen leiten wir nun für jede Forwardrate eine stochastische Differentialgleichung her. Bei der Herleitung bedienen wir uns noch einer technischen Annahme, die unten getroffen wird. Sei  $j$  ein beliebiger Index mit  $1 \leq j \leq N - 1$ .



Aufgrund der Darstellung

$$L_j(t) \stackrel{1.8}{=} \frac{1}{\delta_j} \left( \frac{B(t, T_j)}{B(t, T_{j+1})} - 1 \right) = \frac{1}{\delta_j} \left( \frac{B(t, T_j)}{B(t, T_N)} \frac{B(t, T_N)}{B(t, T_j + 1)} - 1 \right) \quad (2.3)$$

für die Forwardrate  $L_j(t)$  ergibt sich aus der Ito-Formel (s. [KS88] Remark 3.5), dass der Forwardratenprozess  $(L_j(t))_{0 \leq t \leq T_j}$  ein  $\mathbb{P}_N$ -Semimartingal ist. Definieren wir den Prozess  $(X_j(t))_{0 \leq t \leq T_j}$  durch

$$X_j(t) = \ln \left( L_j(t) + \frac{1}{\delta_j} \right), \quad (2.4)$$

so erhalten wir mittels der Ito-Formel die Dynamik von  $X_j(t)$  unter  $\mathbb{P}_N$

$$dX_j(t) = \frac{1}{L_j(t) + \frac{1}{\delta_j}} dL_j(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{\left( L_j(t) + \frac{1}{\delta_j} \right)^2} d\langle L_j(\cdot) \rangle_t. \quad (2.5)$$

Betrachten wir nun das  $\mathbb{P}_N$ -Semimartingal  $(Y_j(t))_{0 \leq t \leq T_j}$  definiert durch

$$Y_j(t) = \int_0^t \frac{1}{L_j(s) + \frac{1}{\delta_j}} dL_j(s), \quad (2.6)$$

so gilt für den quadratischen Variationsprozess  $(\langle Y_j(\cdot) \rangle_t)_{0 \leq t \leq T_j}$  unter  $\mathbb{P}_N$ , dass

$$\langle Y_j(\cdot) \rangle_t = \int_0^t \left( \frac{1}{L_j(s) + \frac{1}{\delta_j}} \right)^2 d\langle L_j(\cdot) \rangle_s. \quad (2.7)$$

Setzen wir 2.6 und 2.7 in 2.5 ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} dX_j(t) &= dY_j(t) - \frac{1}{2} d\langle Y_j \rangle_t \\ \Leftrightarrow X_j(t) &= X_j(0) + Y_j(t) - \frac{1}{2} \langle Y_j \rangle_t. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass  $Y_j(0) = 0$  aufgrund der Definition von  $Y_j(t)$  gilt. Somit erhalten wir für die geschifteten Forwardraten:

$$\begin{aligned} L_j(t) + \frac{1}{\delta_j} &= \left( L_j(0) + \frac{1}{\delta_j} \right) \exp \left( \ln \frac{L_j(t) + \frac{1}{\delta_j}}{L_j(0) + \frac{1}{\delta_j}} \right) \\ &\stackrel{2.4}{=} \left( L_j(0) + \frac{1}{\delta_j} \right) \exp (X_j(t) - X_j(0)) \\ &\stackrel{2.8}{=} \left( L_j(0) + \frac{1}{\delta_j} \right) \exp \left( Y_j(t) - \frac{1}{2} \langle Y_j \rangle_t \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Damit erfüllt die geshiftete Forwardrate  $L_j(t) + \frac{1}{\delta_j}$  für  $0 \leq t < T_j$  die stochastische Differentialgleichung

$$dL_j(t) = \left( L_j(t) + \frac{1}{\delta_j} \right) dY_t \quad (2.10)$$

mit Anfangswert  $L_j(0) + \frac{1}{\delta_j}$ . Da  $Y_j(t)$  ein Semimartingal ist, existieren ein lokales Martingal  $(M_j(t))_{0 \leq t \leq T_j}$  und ein Prozess von endlicher Variation  $(C_j(t))_{0 \leq t \leq T_j}$ , so dass  $Y_j(t)$  die Summe der beiden Prozesse ist, also

$$Y_j(t) = M_j(t) + C_j(t). \quad (2.11)$$

Da nach einer der oben getroffenen Annahmen eine Wienerprozessfiltration vorliegt, folgt aus dem Martingaldarstellungssatz (siehe Kapitel V, Theorem 3.5 in [RY05]) die Existenz eines  $N - 1$ -dimensionalen vorhersehbaren Prozesses  $(\sigma_j(t))_{0 \leq t \leq T_j}$  mit

$$\mathbb{P}_N \left( \int_0^{T_j} \|\sigma_j(s)\|^2 ds < \infty \right) = 1 \quad (2.12)$$

und

$$M_j(t) = \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^t \sigma_j^{(i)}(t) dB_N^{(i)}(t). \quad (2.13)$$

An dieser Stelle treffen wir die oben erwähnte zusätzliche Annahme. Wir nehmen an, dass  $(C_j(t))_{0 \leq t \leq T_j}$  absolut stetige Pfade bezüglich des Lebesgue-Maßes besitzt. Es existiert also ein stochastischer Prozess  $(\mu_j(t))_{0 \leq t \leq T_j}$  mit

$$C_j(t) = \int_0^t \mu_j(s) ds. \quad (2.14)$$

Einsetzen von 2.11, 2.13 und 2.14 in 2.10 liefert für  $0 \leq t < T_j$  die stochastische Differentialgleichung

$$dL_j(t) = \left( L_j(t) + \frac{1}{\delta_j} \right) \left( \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_j^{(i)}(t) dB_N^{(i)}(t) + \mu_j(t) dt \right) \quad (2.15)$$

mit Anfangswert  $L_j(0) + \frac{1}{\delta_j}$ . Dabei bezeichnet  $\mu_j(t)$  den Drift der Forwardrate  $L_j(t)$ . Die  $N - 1$ -dimensionalen Funktionen  $\sigma_j(t)$  stellen sowohl die Volatilität der  $j$ .ten Forwardrate, als auch die Korrelation der Forwardrate untereinander dar. Da wir zu Beginn eine beliebige Liborrate  $L_j$  gewählt haben, gilt für jede Forwardrate eine entsprechende Dynamik. Bevor wir auf den Drift und die Korrelation eingehen, betrachten wir den Einfluß des Shifts genauer.

## 2.2. Shift

Zur mathematisch exakten Herleitung der stochastischen Differentialgleichung 2.15 haben wir mit dem verwendeten Shift  $\frac{1}{\delta_j}$  sichergestellt, dass die geshifteten Forwardraten stets positiv sind. Wir überlegen uns, was es bedeutet, wenn eine Forwardrate ihren minimalen Wert annimmt. Dazu betrachten wir eine äquidistante Tenorstruktur mit  $\delta_{i+1} = \delta_i + \frac{1}{2}$ . Nimmt nun eine Forwardrate einen Wert von ungefähr  $-2$  an, bedeutet dies einen Forwardzins von ungefähr  $-200\%$ . Dies entspricht bei einer Anlage über das halbe Jahr, für welches die Forwardrate gültig ist, einer fast vollständigen Entwertung des angelegten Geldes. Werte, die so weit in den negativen Bereich rein reichen, sind in der Praxis noch nicht vorgekommen.

Euro Libor Rates	Latest	Wk ago	High	Low
Euro Libor Overnight	-0.41000	-0.40929	-0.18214	<b>-0.41000</b>
Euro Libor 1 Week	-0.39386	-0.39314	-0.17500	<b>-0.39386</b>
Euro Libor 1 Month	-0.38100	-0.37957	-0.15857	<b>-0.38243</b>
Euro Libor 2 Month	-0.35214	-0.35000	-0.12714	<b>-0.35443</b>
Euro Libor 3 Month	-0.33071	-0.32857	-0.11000	<b>-0.33214</b>
Euro Libor 6 Month	-0.21943	-0.21657	-0.02571	<b>-0.21943</b>
Euro Libor 1 Year	-0.07971	-0.08043	0.07571	<b>-0.08329</b>

Abbildung 2.1.: Wert der Liborraten zum Stichtag 23.11.2016. Die Höchst- und Tiefstwerte beziehen sich auf die letzten 52 Wochen. Quelle: Homepage Wall Street Journal ([WSJ16])

Im Folgenden werden wir statt des oben verwendeten theoretischen Shifts  $\frac{1}{\delta_j}$  einen Shift  $\gamma_j$  betrachten. Der theoretische Shift ermöglicht die mathematisch exakte Herleitung der SDE, könnte aber in der Anwendung größer sein als benötigt.

Damit sind wir nun in der Lage, für jede Forwardrate einen Shift zu spezifizieren. Es ist aber auch möglich davon auszugehen, dass die Shifts aller Forwardraten gleich sind. Joshi und Rebonato begründen ([JR03], Abschnitt 6) die Verwendung eines einheitlichen Shifts. Verwendet man einen individuellen Shift, so sollte sich dieser auch auf eine Eigenschaft der Forwardrate beziehen. Dies könnte zum Beispiel das Level, die Restlaufzeit, die Vergangenheit oder die Steigung der Yield Curve sein. In unserem Fall sorgt der Shift für positive Forwardraten und bezieht sich somit auf das Level der Forwardraten. Dieses verändert sich jedoch mit der Zeit - aus einer langlebigen positiven Forwardrate wird zum Beispiel eine kurzlebige negative Forwardrate, wohingegen der Shift konstant ist. Lässt sich ein individueller Shift anfangs interpretieren, so ist dies für die Zukunft nicht gewährleistet.

Im Folgenden werden wir den allgemeinen Fall eines individuellen Shifts jeder Forwardrate betrachten. Lediglich bei der Kalibrierung und bei der Bewertung von Swaptions im Shifted Libormarkt Modell mit stochastischer Volatilität (Abschnitt 7.3) werden wir davon ausgehen, dass alle Shifts gleich sind.

Die Shift Parameter haben noch eine zusätzliche Eigenschaft. Das Shifted Libormarkt Modell wurde schon außerhalb des Kontexts negativer Zinsen betrachtet, da es eine nicht flache Volatilitätsstruktur erzeugt (s.z.B. [BM01], Abschnitt 6.18.3). Lee und Wang untersuchen ([LW09]) den Einfluß eines Shifts  $\gamma_j$  auf die implizite Volatilitätsstruktur, die eine Forwardrate erzeugt. Sie sagen, ein negativer Shift  $\gamma_j < 0$  erzeugt eine steigende implizite Volatilitätskurve, ein positiver Shift  $\gamma_j > 0$  eine fallende Volatilitätskurve. Im Umfeld negativer Zinsen ist zu beachten, dass die implizite (Black76) Volatilität für negative Forwardraten bzw. Strikes nicht existieren muss.

Da es unser Ziel ist, negative LIBOR Raten zu modellieren, lassen wir nur positive Shifts zu. Damit ergibt sich, dass unser Shifted Libormarkt Modell nur einen steigenden Volatilitätskew erzeugen kann. Da am Cap- und Swaptionmarkt jedoch auch andere Volatilitätsstrukturen zu beobachten sind, werden wir in Kapitel 6 und 7 zwei Erweiterungen des Modells betrachten.

## 2.3. Arbitragefreier Drift

In diesem Abschnitt wollen wir die genaue Gestalt des Drifts  $\mu_j$  der Forwardrate  $L_j$  im Shifted Libormarkt Modell herleiten. Das zugrundeliegende Vorgehen entspricht dabei dem Vorgehen im Libormarkt Modell (siehe zum Beispiel Abschnitt 25.4 in [Bjö04]).

**Definition 2.3.1** (Forwardmartingalmaß). *Ein Forwardmartingalmaß  $\mathbb{P}_{j+1}$  ist ein zu  $\mathbb{P}_N$  äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß unter dem mit dem  $T_{j+1}$ -Bond diskontierte Bondpreise Martingale sind. Also es gilt:*

1.  $\mathbb{P}_N \sim \mathbb{P}_{j+1}$
2.  $\left( \frac{B(t, T_i)}{B(t, T_{j+1})} \right)_{0 \leq t \leq \min(T_{j+1}, T_i)}$  ist für  $i = 1, \dots, N$  ein  $\mathbb{P}_j$ -Martingal.

Nach der Definition der Forwardrate (1.8) ist  $L_j(t)$  ein  $\mathbb{P}_{j+1}$ -Martingal und hat damit einen Drift von 0. Wir werden zunächst untersuchen, wie wir den  $\mathbb{P}_N$ -Wiener Prozess zu Wiener Prozessen unter den Forwardmartingalmaßen transformieren können.

Anschließend bestimmen wir die Dynamik der Forwardraten unter den Forwardmartingalmaßen und erhalten mit der Martingaleigenschaft die arbitragefreie Gestalt des Drifts.

Dazu begründen wir zunächst die Existenz des Forwardmartingalmaßes und leiten den Dichtequotientenprozess von  $\mathbb{P}_{j+1}$  bezüglich  $\mathbb{P}_N$  her.

**Proposition 2.3.2.** *Definieren wir für  $j = 1, \dots, N-1$  das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}_{j+1}$  über den Dichtequotientenprozess*

$$R_{j+1,N}(t) = \frac{d\mathbb{P}_{j+1}}{d\mathbb{P}_N} \Big|_{F_t} = \frac{B(t, T_{j+1})}{B(t, T_N)} \frac{B(0, T_N)}{B(0, T_{j+1})} \quad (2.16)$$

so handelt es sich bei  $\mathbb{P}_{j+1}$  um das Forwardmartingalmaß zum Numéraire  $B(t, T_{j+1})$ .

*Beweis.* Nach Voraussetzung ist  $\frac{B(t, T_{j+1})}{B(t, T_N)}$  ein  $\mathbb{P}_N$ -Martingal. Damit handelt es sich bei dem Wahrscheinlichkeitsmaß, das über die Dichtefunktion 2.16 definiert ist, um das äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaß zum Numéraire  $B(t, T_{j+1})$  (s. [Bjö04], Proposition 24.4).  $\square$

Im Folgenden werden wir zeigen, dass der Dichtequotient

$$R_j(t) = \frac{d\mathbb{P}_j}{d\mathbb{P}_{j+1}} \Big|_{F_t} = \frac{d\mathbb{P}_j}{d\mathbb{P}_N} \Big|_{F_t} \frac{d\mathbb{P}_N}{d\mathbb{P}_{j+1}} \Big|_{F_t} \quad (2.17)$$

ein stochastisches Exponential ist. Dann können wir die Dynamik der Liborrate  $L_j(t)$  unter dem Forwardmaß  $\mathbb{P}_{j+1}$  mit Hilfe des Girsanov Theorems (s.z.B [HK05] Kapitel 5) bestimmen. Wir formulieren zunächst das Ergebnis, die Gestalt der Driftterme, und beweisen diese dann wie beschrieben.

**Proposition 2.3.3.** *Für die Driftterme  $\mu_j(t)$  gilt für  $j = 1, \dots, N-1$ :*

$$\mu_j(t) = - \sum_{k=j+1}^{N-1} \frac{\delta_k(L_k(t) + \gamma_k)}{\delta_k L_k(t) + 1} \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_j^{(i)}(t) \sigma_k^{(i)}(t). \quad (2.18)$$

*Beweis.* Der Beweis erfolgt per Rückwärtsinduktion. Sei dazu zunächst  $j = N-2$ . Dann gilt für den Dichtequotientenprozess  $R_{N-1}(t)$ :

$$R_{N-1}(t) \stackrel{2.16}{=} \frac{B(t, T_{N-1})}{B(t, T_N)} \frac{B(0, T_N)}{B(0, T_{N-1})} = \frac{\delta_{N-1} L_{N-1}(t) + 1}{\delta_{N-1} L_{N-1}(0) + 1}. \quad (2.19)$$

Unter Ausnutzung der Tatsache, dass  $L_{N-1}$  ein  $\mathbb{P}_N$  Martingal ist, erhalten wir, dass der Prozess  $(R_{N-1}(t))_{0 \leq t \leq T_{N-1}}$  unter  $\mathbb{P}_N$  eine stochastische Differentialgleichung

erfüllt:

$$\begin{aligned}
dR_{N-1}(t) &= \frac{\delta_{N-1}dL_{N-1}(t)}{\delta_{N-1}L_{N-1}(0) + 1} \\
&\stackrel{2.15}{=} \frac{\delta_{N-1}(L_{N-1}(t) + \gamma_{N-1})\sigma_{N-1}(t)dB_N(t)}{\delta_{N-1}L_{N-1}(0) + 1} \\
&= \frac{\delta_{N-1}L_{N-1}(t) + 1}{\delta_{N-1}L_{N-1}(0) + 1} \frac{\delta_{N-1}(L_{N-1}(t) + \gamma_{N-1})}{\delta_{N-1}L_{N-1}(t) + 1} \sigma_{N-1}(t)dB_N(t) \\
&= R_{N-1}(t)X_{N-1}(t)dB_N(t). \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im 3. Schritt eine Multiplikation mit 1 durchgeführt und den  $N-1$ -dimensionalen Prozess  $X_{N-1}(t)$  definiert durch

$$X_{N-1}(t) = \frac{\delta_{N-1}(L_{N-1}(t) + \gamma_{N-1})}{\delta_{N-1}L_{N-1}(t) + 1} \sigma_{N-1}(t). \tag{2.21}$$

Als Lösung der stochastischen Differentialgleichung 2.20 mit Startwert  $X_{N-1}(0) = 1$  ist  $X_{N-1}(t)$  damit ein stochastisches Exponential (auch Doléans Exponential genannt) und gegeben durch (s. [MM05], Lemma A.13.1):

$$R_{N-1}(t) = \exp\left(\int_0^t X_{N-1}(s)dB_N(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|X_{N-1}(s)\|^2 ds\right). \tag{2.22}$$

Mit Girsanovs Theorem ist  $(B_{N-1}(t))_{0 \leq t \leq T}$ , definiert durch

$$B_{N-1}^{(i)}(t) = B_N^{(i)}(t) - \int_0^t \frac{\delta_{N-1}(L_{N-1}(s) + \gamma_{N-1})}{\delta_{N-1}L_{N-1}(s) + 1} \sigma_{N-1}^{(i)}(s) ds, \tag{2.23}$$

ein  $\mathbb{P}_{N-1}$ -Wiener Prozess. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\frac{dL_{N-2}(t)}{L_{N-2}(t) + \gamma_{N-2}} &= \mu_{N-2}(t)dt + \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_{N-2}^{(i)}(t)dB_N^{(i)}(t) \\
&\stackrel{2.23}{=} \mu_{N-2}(t)dt + \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_{N-2}^{(i)}(t)dB_{N-1}^{(i)}(t) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\delta_{N-1}(L_{N-1}(t) + \gamma_{N-1})}{\delta_{N-1}(t)L_{N-1}(t) + 1} \sigma_{N-1}^{(i)}(t)\sigma_{N-2}^{(i)}(t)dt. \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Da  $L_j$  unter  $\mathbb{P}_{j+1}$  ein Martingal ist, muss es einen Drift von 0 haben. Daher folgt

$$\mu_{N-2}(t) = -\frac{\delta_{N-1}(L_{N-1} + \gamma_{N-1})}{\delta_{N-1}L_{N-1}(t) + 1} \sigma_{N-1}(t) \cdot \sigma_{N-2}(t). \tag{2.25}$$

Dabei bezeichnet „ $\cdot$ “ das Skalarprodukt.

Es gelte die Aussage nun für ein beliebiges  $j$  mit  $1 < j < N - 1$ . Für den Dichtequotientenprozess des Forwardmartingalmaßes  $\mathbb{P}_j$  bezüglich  $\mathbb{P}_{j+1}$  erhält man

$$\begin{aligned} R_j(t) &= \frac{d\mathbb{P}_j}{d\mathbb{P}_{j+1}} \Big|_{F_t} = \frac{d\mathbb{P}_j}{d\mathbb{P}_N} \frac{d\mathbb{P}_N}{d\mathbb{P}_{j+1}} \Big|_{F_t} \\ &\stackrel{2.16}{=} \frac{B(t, T_j)}{B(t, T_{j+1})} \frac{B(0, T_{j+1})}{B(0, T_j)} = \frac{\delta_j L_j(t) + 1}{\delta_j L_j(0) + 1}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Da  $L_j(t)$  ein Martingal bezüglich  $\mathbb{P}_{j+1}$  ist, erhalten wir wie zuvor eine Differentialgleichung für den Dichtequotientenprozess

$$\begin{aligned} dR_j(t) &= \frac{\delta_j dL_j(t)}{\delta_j L_j(0) + 1} \\ &= \frac{\delta_j (L_j(t) + \gamma_j) \sigma_j(t) dB_{j+1}(t)}{\delta_j L_j(0) + 1} \\ &= R_j \frac{\delta_j (L_j(t) + \gamma_j) \sigma_j(t)}{\delta_j L_j(t) + 1} dB_{j+1}(t) \\ &= R_j X_j dW_{j+1}(t), \end{aligned} \quad (2.27)$$

wobei wir wieder  $X_j(t) = \frac{\delta_j (L_j(t) + \gamma_j)}{\delta_j L_j(t) + 1} \sigma_j(t)$  gesetzt haben. Damit gilt

$$R_j(t) = \exp \left( \int_0^t X_j(s) dB_{j+1}(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|X_j(s)\|^2 ds \right). \quad (2.28)$$

Aus dem Satz von Girsanov ergibt sich, dass  $(B^{(j)}(t))_{0 \leq t \leq T}$ , definiert durch

$$\begin{aligned} B_j(t) &= B_{j+1}(t) - \int_0^t X_j(s) ds \\ &\stackrel{\text{induktiv}}{=} B_N(t) - \sum_{k=j+1}^{N-1} \int_0^t X_k(s) ds - \int_0^t X_j(s) ds, \end{aligned} \quad (2.29)$$

ein  $N - 1$ -dimensionaler  $\mathbb{P}_j$ -Wiener Prozess ist. Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{dL_{j-1}(t)}{L_{j-1}(t) + \gamma_j} &\stackrel{2.15}{=} \mu_{j-1}(t) + \sigma_{j-1}(t) dB_N(t) \\ &\stackrel{2.29}{=} \mu_{j-1}(t) dt + \sum_{k=j}^{N-1} \frac{\delta_k (L_k + \gamma_k)}{\delta_k L_k(t) + 1} \sigma_{j-1}(t) \cdot \sigma_k(t) dt + \sigma_{j-1}(t) dB_j(t). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Da  $L_{j-1}$  ein  $\mathbb{P}_j$ -Martingal ist, muss der Drift verschwinden, also

$$\mu_{j-1}(t) = - \sum_{k=j}^{N-1} \frac{\delta_k(L_k + \gamma_k)}{\delta_k L_k(t) + 1} \sigma_{j-1}(t) \cdot \sigma_k(t). \quad (2.31)$$

□

Setzen wir nun die erhaltene arbitragefreie Gestalt der Driftterme in die hergeleitete Dynamik 2.15 ein, so erhalten wir für die Dynamik der Liborraten unter dem Terminalmeasure  $\mathbb{P}_N$ :

$$dL_j(t) = (L_j(t) + \gamma_j) \sigma_j(t) \left( dB_N(t) - \sum_{k=j+1}^{N-1} \frac{\delta_k(L_k(t) + \gamma_k)}{\delta_k L_k(t) + 1} \sigma_k(t) dt \right). \quad (2.32)$$

## 2.4. Korrelationsstruktur

Wie bereits am Ende von Abschnitt 2.1 erwähnt, beinhalten die vektorwertigen Funktionen  $(\sigma_j(t))_{0 \leq t \leq T, 1 \leq j \leq N-1}$  sowohl die Volatilität der  $j$ .ten Forwardrate, als auch die Korrelation zwischen den Forwardraten. Es ist möglich, die Dynamik 2.32 der Forwardraten bezüglich 1-dimensionalen paarweise korrelierten Wiener Prozessen  $W_N^{(i)}, i = 1, \dots, N-1$  darzustellen, um zwischen Volatilität und Korrelation zu unterscheiden. Wir werden im Folgenden mit  $B$  einen (unkorrelierten) mehrdimensionalen Wiener Prozess und mit  $W$  eine Familie von paarweise korrelierten Wiener Prozessen bezeichnen. Die erwähnten 1-dimensionalen Wiener Prozesse sind durch

$$dW_N^{(j)}(t) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\sigma_j^{(i)}(t)}{\|\sigma_j(t)\|} dB_N^{(i)}(t) \quad (2.33)$$

gegeben. Für die quadratische Kovariation gilt dann:

$$\begin{aligned} d\langle W_N^{(i)}(\cdot), W_N^{(j)}(\cdot) \rangle_t &= d \left\langle \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sigma_i^{(k)}(\cdot)}{\|\sigma_i(\cdot)\|} B_N^{(k)}(\cdot), \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sigma_j^{(k)}(\cdot)}{\|\sigma_j(\cdot)\|} B_N^{(k)}(\cdot) \right\rangle_t \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sigma_i^{(k)}(t) \sigma_j^{(k)}(t)}{\|\sigma_i(t)\| \|\sigma_j(t)\|} dt =: \rho_{i,j}(t) dt. \end{aligned} \quad (2.34)$$



Damit können wir die Dynamik 2.15 der Forwardraten umformulieren:

$$\begin{aligned}
\frac{dL_j(t)}{L_j(t) + \gamma_j} &\stackrel{2.32}{=} \sum_{k=j+1}^{N-1} \frac{\delta_k(L_k(t) + \gamma_k)}{\delta_k L_k(t) + 1} \sum_{i=1}^{N-1} (\sigma_j^{(i)}(t) \sigma_k^{(i)}(t)) dt + \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_j^{(i)}(t) dB_N^{(i)}(t) \\
&= \|\sigma_j(t)\| \sum_{k=j+1}^{N-1} \frac{\rho_{j,k}(t) \delta_k(L_k(t) + \gamma_k)}{\delta_k L_k(t) + 1} \|\sigma_k(t)\| dt + \|\sigma_j(t)\| dW_N^{(j)}(t).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Dabei besteht aufgrund der Definition von  $\rho_{ij}$  (2.34) ein Zusammenhang zwischen der instantanen Korrelation der Forwardraten und ihrer jeweiligen Volatilitätsfunktion. In der Praxis wird die instantane Korrelation der Forwardraten jedoch durch eine Parametrisierung beschrieben. Rebonato führt für das Libormarkt Modell dazu drei Gründe an (siehe [Reb02], Kapitel 7) .

Erstens gibt es kein Plain-Vanilla Derivat, dessen Preis nur von der Korrelation und keiner anderen Größe abhängt. Für die instantanen Volatilitäten ist dies anders. Zumindest das quadratische Mittel einer instantanen Volatilität ergibt sich direkt aus dem Marktpreis eines Caplets.

Darüberhinaus hängt die Swaptionauszahlung zwar von mehreren Forwardraten ab, jedoch sind bei der Preisbestimmung Integrale der Form

$$\int_0^T \sigma_i(u) \sigma_j(u) \rho_{ij}(u) du \tag{2.36}$$

zu berechnen. Somit hängt der Swaptionpreis nicht direkt von der instantanen Korrelation  $\rho_{ij}(s)$ , sondern viel mehr von der terminalen Korrelation

$$\bar{\rho}_{ij}(T) = \frac{\int_0^T \sigma_i(s) \sigma_j(s) \rho_{ij}(s) ds}{\sqrt{\int_0^T \sigma_i(s)^2 ds \int_0^T \sigma_j(s)^2 ds}} \tag{2.37}$$

der Forwardraten ab. Änderungen in der instantanen Korrelation können durch Änderungen in den instantanen Volatilitäten kompensiert werden und andersherum, so dass verschiedene Kombinationen von instantanen Volatilitäten und instantanen Korrelationen die gleiche terminale Korrelation und somit den gleichen Swaptionpreis ergeben können. Damit ist es äußerst schwierig die instantane Korrelation aus Swaptionpreisen direkt zu bestimmen.

Schließlich betrachtet Rebonato die Abhängigkeit der Swaptionvolatilität und damit des Swaptionpreises von der Form der Korrelationsfunktion bzw. von ihrem middle-

ren Wert. Er kommt zu dem Ergebnis, dass die Swaptionvolatilität bei gegebener durchschnittlicher Volatilität nur äußerst gering von der Form der Korrelationsfunktion abhängt.

Wegen dieser drei Gründe ist eine Bestimmung der instantanen Korrelationsfunktion aus Swaptionpreisen äußerst schwierig. Da das Libormarkt Modell ein Spezialfall des Shifted Libormarkt Modells ist und die Bewertungsformeln für Caplets, sowie Swaptions im Shifted Libormarkt Modell die gleiche Abhängigkeit von Volatilitäten und Korrelationen, wie im ersten und zweiten Argument dargelegt zeigen, übertragen wir dieses Ergebnis auf das Shifted Libormarkt Modell.

Modellunabhängig ergeben sich bei einer direkten Kalibrierung der Korrelation an Marktdaten noch weitere Schwierigkeiten. Nach Lutz ([Lut11]) ist dies unter anderem die Wahl des Betrachtungszeitraums für die Daten. Um statistisch relevante Ergebnisse zu erhalten, muss dieser groß genug sein. Er darf aber jedoch nicht zu groß sein, da sich die Korrelationsstruktur über die Zeit ändern kann und die Kalibrierung den aktuellen Marktstand widerspiegeln soll. Weiterhin müsste zur Schätzung der Korrelationsstruktur Interpolation verwendet werden. Zusätzlich hat die Wahl der Interpolationsmethode (zum Beispiel die verwendeten Stützstellen) einen großen Einfluss auf die historisch geschätzte Korrelationsstruktur ([AL03], Abschnitt 4).

Deshalb werden wir, so wie in der Literatur verbreitet (zum Beispiel [BM01], [Reb02]) die Korrelationen durch eine parametrisierte Matrix  $\rho$  beschrieben. Wir werden zunächst die Anforderungen, die an eine solche Korrelationsmatrix  $\rho$  gestellt werden (s. [Lut11], Abschnitt 5.1.2), betrachten:

1.  $\rho$  muss reell und symmetrisch sein
2.  $\rho_{i,i} = 1$  für  $i = 1, \dots, N - 1$  und  $\rho_{i,j} \in (-1, 1)$  für  $1 \leq i, j \leq N - 1$
3.  $\rho$  muss positiv semidefinit sein.

Dabei handelt es sich um Bedingungen, die es erlauben, die Matrix  $\rho$  als Korrelationsmatrix zu interpretieren. Zusätzlich treffen wir noch zwei Annahmen, die empirische Beobachtungen beschreiben:

1. Die Abbildung  $i \mapsto \rho_{i,j}$  ist für  $i \geq j$  fallend
2. Die Abbildung  $i \mapsto \rho_{p+i,i}$  ist für festes  $p \in \{0, N - i\}$  wachsend.

Die erste Anforderung spiegelt wieder, dass die Korrelation zwischen Forwardraten, deren Maturität weiter auseinander liegt, geringer ist, als die zwischen Forwardra-

ten, deren Maturität nah aneinander liegt. Je größer das Zeitintervall, in dem nur noch eine der beiden Forwardraten gültig ist, desto eher und stärker kann diese Forwardrate von der anderen abweichen. Die zweite Eigenschaft ergibt sich aus einer ähnlichen Überlegung. Betrachtet man zwei Paare von Forwardraten, deren Maturität gleich weit entfernt ist, so sollte das Paar Forwardraten, welches länger gültig ist stärker korreliert sein. Betrachtet man zum Beispiel Forwardraten mit Maturität 2 und 4 Jahren, sowie 22 und 24 Jahren, sollte die Korrelation des zweiten Paares größer sein, da der Zeitraum, in dem sie beide gültig sind, deutlich länger ist.

# 3. Shifted Lognormal Libormarkt Modell mit deterministischer Volatilität

In diesem Kapitel wollen wir die Optionspreise von Caps und Swaptions im Shifted Lognormal Libormarkt Modell mit deterministischer Volatilität bestimmen. Aufgrund der deterministischen Volatilität sind die geshifteten Forwardraten lognormal verteilt. Das Vorgehen bei der Preisbestimmung entspricht dabei dem Vorgehen im Libormarkt Modell.

## 3.1. Modell

Wir benutzen die gleichen Annahmen, wie wir zu Beginn von Kapitel 2.1 getroffen haben. Das heißt wir betrachten eine Tenorstruktur, einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum mit Wiener Filtration und positive Bondpreise. Wie zuvor fordern wir nicht, dass die Bondpreise monoton fallend in der Laufzeit sind und die mit dem  $T_N$ -Bond abdiskontierten Preisprozesse  $\mathbb{P}_N$ -Martingale sind. Die Entwicklung der Forwardraten  $L_j(t)$  wird für  $j = 1, \dots, N - 1$  durch ihre gemeinsame Dynamik unter dem Terminal-Maß  $\mathbb{P}_N$  wie folgt beschrieben:

$$dL_j(t) = (L_j(t) + \gamma_j) \sigma_j(t) \left( - \sum_{k=j+1}^{N-1} \frac{\rho_{j,k}(t) \delta_k (L_k(t) + \gamma_k) \sigma_k(t)}{\delta_k L_k(t) + 1} dt + dW_N^{(j)}(t) \right). \quad (3.1)$$

Dabei gilt

1.  $W_N = (W_N^{(1)}, \dots, W_N^{(N-1)})$  sind  $N - 1$  1-dimensionale korrelierte Wiener Prozesse mit  $d\langle W_N^{(i)}, W_N^{(j)} \rangle_t = \rho_{i,j}(t) dt$ .
2.  $\sigma_j(t)$  sind deterministische, beschränkte Funktionen, welche die Volatilität der  $j$ -ten Liborrate darstellen.

3.  $\gamma_j$  sind Konstanten, welche den Shift der  $j$ -ten Liborrate darstellen.

Die Dynamik entspricht der hergeleiteten stochastischen Differentialgleichung 2.15. Wie in Abschnitt 2.4 beschrieben, betrachten wir jedoch eine gegebene Korrelationsstruktur  $\rho$ . In der Praxis wird diese an Swaption-Volatilitäten kalibriert.

Zur Berechnung der Cap Preise werden wir die Forwardraten unter ihren Forwardmartingalmaßen betrachten. Da Forwardraten unter ihren äquivalenten Forwardmartingalmaßen Martingale sind, ergibt sich die Dynamik direkt. Wir wollen jedoch die Dynamik aller Forwardraten unter allen Forwardmartingalmaßen angeben.

### 3.1.1. Dynamik unter den Forwardmartingalmaßen

**Proposition 3.1.1.** *Für die Dynamik von  $L_j(t)$  unter  $\mathbb{P}_{i+1}$  gilt:*

1.  $j=i$

$$dL_j(t) = (L_j(t) + \gamma_j)\sigma_j(t)dW_{j+1}^{(j)}(t) \quad (3.2)$$

2.  $j < i$

$$dL_j(t) = (L_j(t) + \gamma_j)\sigma_j(t) \left( - \sum_{k=j+1}^i \frac{\rho_{j,k}(t)\delta_k(L_k(t) + \gamma_k)\sigma_k(t)}{\delta_k L_k(t) + 1} dt + dW_{i+1}^{(j)}(t) \right) \quad (3.3)$$

3.  $j > i$

$$dL_j(t) = (L_j(t) + \gamma_j)\sigma_j(t) \left( \sum_{k=i+1}^j \frac{\rho_{j,k}(t)\delta_k(L_k(t) + \gamma_k)\sigma_k(t)}{\delta_k L_k(t) + 1} dt + dW_{i+1}^{(j)}(t) \right) \quad (3.4)$$

*Beweis.* Der Fall  $j = i$  ergibt sich aus der Definition 2.3.1 von Forwardmartingalmaßen.

Für die anderen Fälle bestimmen wir zunächst Wiener Prozesse  $W_{i+1}$  unter  $\mathbb{P}_{i+1}$ . Für  $i + 1 = N - 1$  erhalten wir, dass der Dichtequotientenprozess

$$R_{N-1}(t) = \frac{d\mathbb{P}_{N-1}}{d\mathbb{P}_N} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\delta_{N-1}L_{N-1}(t) + 1}{\delta_{N-1}L_{N-1}(0) + 1} \quad (3.5)$$

eine stochastische Differentialgleichung, ähnlich zu Gleichung 2.20 erfüllt. In dem

hier beschriebenen Fall ist die stochastische Differentialgleichung, gegeben durch

$$dR_{N-1}(t) = R_{N-1}X_{N-1}dW_N^{(N-1)}(t), \quad (3.6)$$

jedoch skalarwertig. Dabei haben wir

$$X_{N-1}(t) = \frac{\delta_{N-1}(L_{N-1}(t) + \gamma_{N-1})}{\delta_{N-1}L_{N-1}(t) + 1}\sigma_{N-1}(t) \quad (3.7)$$

gesetzt. Mit dem Satz von Girsanov ergibt sich, dass für  $j = 1, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} W_{N-1}^{(j)}(t) &= W_N^{(j)}(t) - \langle W_N^{(j)}, \int_0^t X_{N-1}(s)W_N^{(N-1)}(s)ds \rangle_t \\ &= W_N^{(j)}(t) - \rho_{j,N-1}(t) \int_0^t X_{N-1}(s)ds \end{aligned} \quad (3.8)$$

ein  $\mathbb{P}_{N-1}$  Wiener Prozess ist. Für die Korrelation dieser Prozesse gilt

$$d\langle W_{N-1}^{(i)}, W_{N-1}^{(j)} \rangle_t = d\langle W_N^{(i)}, W_N^{(j)} \rangle_t = \rho_{ij}(t)dt. \quad (3.9)$$

Obige Argumentation lässt sich nun iterativ fortführen. Damit erhalten wir für  $i = 1, \dots, N-2$  korrelierte Wiener Prozesse definiert durch:

$$W_i^{(j)}(t) = W_{i+1}^{(j)}(t) - \rho_{j,i}(t) \int_0^t X_j(s)ds = W_N^{(j)} - \sum_{k=i}^{N-1} \rho_{j,k}(t) \int_0^t X_k(s)ds. \quad (3.10)$$

Geben wir uns nun eine Forwardrate  $L_j$  und ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}_{i+1}$  vor, so können wir die Dynamik 3.1 mit Hilfe des Wiener Prozesses  $W_{i+1}^{(j)}$  ausdrücken und erhalten die Behauptung.

Für  $i > j$  erhalten wir also:

$$\begin{aligned} \frac{dL_j(t)}{(L_j(t) + \gamma_j)\sigma_j(t)} &= - \sum_{k=j+1}^{N-1} \rho_{j,k}(t)X_k dt + dW_N^{(j)}(t) \\ &= - \sum_{k=j+1}^{N-1} \rho_{j,k}(t)X_k dt + dW_{i+1}^{(j)}(t) + \sum_{k=i+1}^{N-1} \rho_{j,k}X_k(t)dt \\ &= - \sum_{k=j+1}^i \rho_{j,k}(t)X_k dt + dW_{i+1}^{(j)}(t). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Für  $i < j$  erhalten wir die Behauptung analog. □

### 3.1.2. Dynamik unter dem Spotmaß

Wir wollen die Dynamik der Forwardraten auch unter dem Spotmaß  $\mathbb{P}_{spot}$  berechnen. Diese wird zum Beispiel für die Simulation von Forwardraten verwendet. Zunächst betrachten wir das zugehörige Numéraire, den discretely rebalanced bank-account (s.[BM01], Abschnitt 6.4).

**Definition 3.1.2** (Discretely rebalanced bank-account Numéraire). *Zunächst bezeichnen wir mit  $\phi(t) = \min\{i : T_{i-1} < t \leq T_i\}$  den Index für den  $t \in (T_{\phi(t)-1}, T_{\phi(t)}]$  gilt. Dann bezeichnen wir*

$$B_d(t) = \frac{B(t, T_{\phi(t)})}{\prod_{i=1}^{\phi(t)} B(T_{i-1}, T_i)} \quad (3.12)$$

als *discretely rebalanced bank-account numeraire*.

Wir können  $B_d(t)$  wie folgt als Handelsstrategie interpretieren. Ein Startvermögen in Höhe von einer Geldeinheit wird zu Beginn jeder Periode  $[T_{i-1}, T_i]$ ,  $i = 1, \dots, \phi(t)$ , mit der zugehörigen Spot-LIBOR-Rate angelegt. Um den Wert zur Zeit  $t \in (T_{\phi(t)-1}, T_{\phi(t)}]$  zu erhalten, wird dann mit  $B(t, T_{\phi(t)})$  diskontiert. Damit gilt auch  $B_d(0) = 1$ .

**Proposition 3.1.3.** *Für den Dichtequotientenprozess von  $\mathbb{P}_{spot}$  bezüglich  $\mathbb{P}_N$  gilt:*

$$R_{spot}(t) = \frac{B_d(t)}{B(t, T_N)} \frac{B(0, T_N)}{B_d(0)}. \quad (3.13)$$

*Beweis.* Um Proposition 24.4 aus [Bjö04] anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass  $\frac{B_d(t)}{B(t, T_N)}$  ein  $\mathbb{P}_N$ -Martingal ist. Wir rechnen die Martingaleigenschaft nach. Sei  $s < t$  gegeben.

Sei zunächst  $\phi(s) = \phi(t)$ , das heißt  $s, t \in (T_{\phi(t)-1}, T_{\phi(t)}]$ . Dann sind die Bondpreise  $B(T_{i-1}, T_i)$  für  $i = 1, \dots, \phi(t)$  messbar bezüglich  $F_{\phi(t)-1} \subset F_s$ . Damit gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \frac{B_d(t)}{B(t, T_N)} \middle| F_s \right) &= \frac{1}{\prod_{i=1}^{\phi(t)} B(T_{i-1}, T_i)} \mathbb{E} \left( \frac{B(t, T_{\phi(t)})}{B(t, T_N)} \middle| F_s \right) \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^{\phi(t)} B(T_{i-1}, T_i)} \frac{B(s, T_{\phi(t)})}{B(s, T_N)} \\ &= \frac{B_d(s)}{B(s, T_N)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Für  $s = T_{\phi(t)-1}$  können wir genauso vorgehen und erhalten:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left( \frac{B_d(t)}{B(t, T_N)} \middle| F_{T_{\phi(t)-1}} \right) &= \frac{1}{\prod_{i=1}^{\phi(t)} B(T_{i-1}, T_i)} \mathbb{E} \left( \frac{B(t, T_{\phi(t)})}{B(t, T_N)} \middle| F_{T_{\phi(t)-1}} \right) \\
&= \frac{1}{\prod_{i=1}^{\phi(t)} B(T_{i-1}, T_i)} \frac{B(T_{\phi(t)-1}, T_{\phi(t)})}{B(T_{\phi(t)-1}, T_N)} \\
&= \frac{B(T_{\phi(t)-1}, T_{\phi(t)-1})}{\prod_{i=1}^{\phi(t)-1} B(T_{i-1}, T_i)} \frac{1}{B(T_{\phi(t)-1}, T_N)} \\
&= \frac{B_d(T_{\phi(t)-1})}{B(T_{\phi(t)-1}, T_N)}. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Es sei nun  $\phi(s) < \phi(t)$ . Mit der gerade gezeigten Gleichung 3.15 und der Turmeigenschaft des bedingten Erwartungswert können wir iterativ auf die Tenorpunkte  $T_u$  mit  $T_{\phi(s)} \leq T_u < T_{\phi(t)}$  bedingen.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left( \frac{B_d(t)}{B(t, T_N)} \middle| F_s \right) &= \mathbb{E} \left( \mathbb{E} \left( \frac{B_d(t)}{B(t, T_N)} \middle| F_{T_{\phi(t)-1}} \right) \middle| F_s \right) \\
&= \mathbb{E} \left( \frac{B_d(T_{\phi(t)-1})}{B(T_{\phi(t)-1}, T_N)} \middle| F_s \right) = \dots \\
&= \mathbb{E} \left( \frac{B_d(T_{\phi(s)})}{B(T_{\phi(s)}, T_N)} \middle| F_s \right) \\
&= \frac{B_d(s)}{B(s, T_N)} \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Für den Fall  $s < \phi(s)$  erfolgt die letzte Gleichheit mit Gleichung 3.14. Für  $s = \phi(s)$  gilt die letzte Gleichheit aufgrund der  $F_s$ -Messbarkeit von  $\frac{B_d(T_{\phi(s)})}{B(T_{\phi(s)}, T_N)}$ .  $\square$

Wie wir bereits in Abschnitt 1.2 (Gleichung 1.6) gesehen haben, gilt:

$$\prod_{i=1}^{\phi(t)} B(T_{i-1}, T_i) = B(0, T_{\phi(t)}). \tag{3.17}$$

Damit erhalten wir für den Dichtequotient  $R_{spot}(t)$ :

$$R_{spot}(t) = \frac{B(t, T_{\phi(t)})}{B(t, T_N)} \frac{B(0, T_N)}{B(0, T_{\phi(t)})}. \tag{3.18}$$

Wir erhalten also

$$\frac{d\mathbb{P}_{spot}}{d\mathbb{P}_N} \bigg|_{F_t} = \frac{d\mathbb{P}_{\phi(t)}}{d\mathbb{P}_N} \bigg|_{F_t}. \tag{3.19}$$

Da eine betrachtete Forwardrate  $L_j(t)$  nur bis  $T_{j+1}$  modelliert wird, ist also insbesondere  $\phi(t) < j + 1$ . Damit ist die Dynamik der Forwardraten nach vorherigem



Satz bestimmt.

**Proposition 3.1.4.** *Für die Dynamik von  $L_j(t)$  unter  $\mathbb{P}_{spot}$  gilt:*

$$dL_j(t) = (L_j(t) + \gamma_j)\sigma_j(t) \left( \sum_{k=\phi(t)}^j \frac{\rho_{j,k}(t)\delta_k(L_k(t) + \gamma_k)\sigma_k(t)}{\delta_k L_k(t) + 1} dt + dW_{spot}^{(j)}(t) \right) \quad (3.20)$$

Betrachtet man die Dynamik von Forwardraten unter dem Spotmaß, so sind eventuell weniger Summanden zur Berechnung des Driftterms zu bestimmen. Daher wird das Spotmaß zum Beispiel zu Simulation von Forwardraten verwendet, um Rechenzeit zu sparen.

## 3.2. Cap Preis

Im Folgenden wollen wir den Preis  $V_{n,m}^{Cap}(0)$  eines Caps für ein Zeitintervall  $[T_n, T_m]$  mit Strike  $K$  im Shifted Libor Marktmodell bestimmen. Dies erfolgt analog zu einem normalen Libormarkt Modell.

Da ein Cap aus einer Familie von Caplets für disjunkte Zeitintervalle besteht und die Auszahlung des Caps die Summe der Caplet-Auszahlungen ist, ergibt sich, dass der Cap-Preis die Summe der Caplet Preise ist:

$$V_{n,m}^{Cap}(t) = \sum_{i=n}^{m-1} V_i^{Caplet}(t). \quad (3.21)$$

Zusätzlich sind wir an den aktuellen Preisen interessiert, also an den Preisen für  $t = 0$ . Demnach genügt es, den Preis  $V_j^{Caplet}(0)$  von Caplets für Zeitintervalle  $[T_j, T_{j+1}]$  und einen Strike  $K$  zu bestimmen. Wir erinnern an die Auszahlungsfunktion eines Caplets (1.14):

$$\delta_j (L_j(T_j) - K)^+. \quad (3.22)$$

Ein Caplet zum Zeitintervall  $[T_j, T_{j+1}]$  und Strike  $K$  entspricht einem Call auf die für das Zeitintervall relevante Libor Rate  $L_j$  mit Strike  $K$ . Zur Berechnung des Caplet Preises  $V_j^{Caplet}(0)$  betrachten wir zunächst den Terminpreis

$$\mathbb{E}_{T_j}[\delta_j (L_j(T_j) - K)^+ | F_t]. \quad (3.23)$$

Der Wert zum Zeitpunkt 0 ergibt sich dann durch entsprechende Abdiskontierung.

Da die Wiener Filtration zum Zeitpunkt  $t = 0$  trivial ist, können wir dazu zum unbedingten Erwartungswert übergehen und erhalten:

$$V_j^{Caplet}(0) = B(0, T_{j+1}) \mathbb{E}_{T_{j+1}} [(L_j(T_j) - K)^+ \delta_j]. \quad (3.24)$$

Bezeichnen wir das Ereignis  $\{L_j(T_j) > K\} = \{L_j(T_j) - \gamma_j > K - \gamma_j\}$  mit  $A_j$  so erhalten wir für den Erwartungswert in obiger Formel:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{T_{j+1}} [(L_j(T_j) + \gamma_j - (K + \gamma_j))^+] \\ &= \mathbb{E}_{T_{j+1}} [(L_j(T_j) + \gamma_j) \mathbb{1}_{A_j}] - (K + \gamma_j) \mathbb{P}_{T_{j+1}}[A_j] \\ &= (L_j(0) + \gamma_j) \tilde{\mathbb{P}}_{T_{j+1}}(A_j) - (K + \gamma_j) \mathbb{P}_{T_{j+1}}[A_j]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Dabei ist das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\tilde{\mathbb{P}}_{T_{j+1}}$  über die Dichte  $\left. \frac{d\tilde{\mathbb{P}}_{T_{j+1}}}{d\mathbb{P}_{T_{j+1}}} \right|_{F_t} = \frac{L_j(t) + \gamma_j}{L_j(0) + \gamma_j}$  definiert. Wir betrachten zunächst nur den zweiten Summanden:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{T_{j+1}}(L_j(T_j) + \gamma_j > K + \gamma_j) \\ &= \mathbb{P}_{T_{j+1}} \left( \ln \frac{L_j(T_j) + \gamma_j}{L_j(0) + \gamma_j} > \ln \frac{K + \gamma_j}{L_j(0) + \gamma_j} \right) \\ &= \mathbb{P}_{T_{j+1}} \left( \int_0^{T_j} \sigma_j(s) dW_{j+1}(s) - \frac{1}{2} \int_0^{T_j} \sigma_j^2(s) ds > \ln \frac{K + \gamma_j}{L_j(0) + \gamma_j} \right) \\ &= \mathbb{P}_{T_{j+1}} \left( \frac{\int_0^{T_j} \sigma_j(s) dW_{j+1}(s)}{\sqrt{\int_0^{T_j} \sigma_j^2(s) ds}} > \frac{\ln \frac{K + \gamma_j}{L_j(0) + \gamma_j} + \frac{1}{2} \int_0^{T_j} \sigma_j^2(s) ds}{\sqrt{\int_0^{T_j} \sigma_j^2(s) ds}} \right) \\ &= \Phi \left( \frac{\ln \left( \frac{L_j(0) + \gamma_j}{K + \gamma_j} \right) - \frac{1}{2} \int_0^{T_j} \sigma_j^2(s) ds}{\sqrt{\int_0^{T_j} \sigma_j^2(s) ds}} \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Dabei gehen wir im letzten Schritt zum Gegenereignis über und nutzen aus, dass die Zufallsvariable  $\frac{\int_0^{T_j} \sigma_j(s) dW_{j+1}(s)}{\sqrt{\int_0^{T_j} (\sigma_j(s))^2 ds}}$  standardnormalverteilt ist. Damit haben wir den zweiten Summanden bestimmt.

Um den ersten Summanden in Gleichung 3.25 zu bestimmen, wollen wir zunächst die Verteilung der Forwardrate unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\tilde{\mathbb{P}}_{T_{j+1}}$  bestimmen. Dazu betrachten wir den Dichtequotientenprozess von  $\tilde{\mathbb{P}}_{T_{j+1}}$  bezüglich  $\mathbb{P}_{T_{j+1}}$ , für welchen aufgrund von Gleichung 3.2

$$\left. \frac{d\tilde{\mathbb{P}}_{T_{j+1}}}{d\mathbb{P}_{T_{j+1}}} \right|_{F_t} = \frac{L_j(t) + \gamma_j}{L_j(0) + \gamma_j} = \exp \left( \int_0^t \sigma_j(s) dW_{j+1}(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_j(s)^2 ds \right) \quad (3.27)$$

gilt. Damit ist der Dichtequotientenprozess ein stochastisches Exponential und mit

dem Satz von Girsanov gilt, dass  $\tilde{W}_{j+1}$  definiert durch

$$\tilde{W}_{j+1}(t) = W_{j+1}(t) - \int_0^t \sigma_j(s) ds, \quad (3.28)$$

ein  $\tilde{\mathbb{P}}_{T_{j+1}}$ -Wiener Prozess ist. Nun lässt sich analog wie beim zweiten Summanden vorgehen und wir erhalten:

$$\tilde{\mathbb{P}}_{T_{j+1}}(L_j(T_j) > K) = \Phi \left( \frac{\ln \left( \frac{L_j(0) + \gamma_j}{K + \gamma_j} \right) + \frac{1}{2} \int_0^{T_j} \sigma_j^2(s) ds}{\sqrt{\int_0^{T_j} \sigma_j^2(s) ds}} \right). \quad (3.29)$$

Damit haben wir die beiden Wahrscheinlichkeiten in Gleichung 3.25 bestimmt und können eine Formel für den Caplet Preis angeben.

**Satz 3.2.1.** *Der Preis eines Caplets für ein Zeitintervall  $[T_j, T_{j+1}]$  zum Strike  $K$  ist zur Zeit  $t = 0$  gegeben durch*

$$V_j^{Caplet}(0) = \delta_j B(0, T_{j+1}) Bl^{call} \left( K + \gamma_j, L_j(0) + \gamma_j, \sqrt{\int_0^{T_j} (\sigma_j(s))^2 ds} \right). \quad (3.30)$$

Dabei bezeichnet  $Bl^{call}(K, S, \sigma)$  den Preis einer Calloption mit Strike  $K$ , Forwardpreis  $S$ , Volatilität  $\sigma$  und Maturität 1 im Black-Scholes Modell. Es gilt die Formel:

$$Bl^{call}(K, S, \sigma) = S \Phi \left( \frac{\ln \frac{S}{K} + \frac{1}{2} \sigma^2}{\sigma} \right) - K \Phi \left( \frac{\ln \frac{S}{K} - \frac{1}{2} \sigma^2}{\sigma} \right). \quad (3.31)$$

Damit ist auch im Shifted Libormarkt Modell eine einfache Berechnung von Caplet Preisen mit Hilfe der Black-Scholes Formel möglich. Für den Fall  $\gamma_j = 0$ , für alle  $j = 1, \dots, N - 1$  erhalten wir auch die herkömmliche Preisformel des ungeshifteten Modells.

### 3.3. Swaption Preis

Im Folgenden wollen wir den Preis  $V_{n,m}^{Swaption}(0)$  einer Payer-Swaption für ein Zeitintervall  $[T_n, T_m]$  mit Strike  $K$  im Shifted Libormarkt Modell bestimmen. Wie im normalen Libormarkt Modell ergibt sich aus der Lognormalverteilung der (geshifteten) Forwardraten, dass die Swaprate nicht lognormalverteilt sein kann. Damit ist eine einfache exakte Optionspreisbestimmung, wie wir sie für Caplets durchgeführt

haben, für Swaptions nicht möglich. Es besteht die Möglichkeit, Optionspreise per Monte Carlo Simulation zu bestimmen. Dies ist jedoch zeitaufwendig. Um Swapoptionpreise im Libormarkt Modell einfach berechnen zu können, erfolgt eine Approximation der Dynamik der Swaprate unter ihrem äquivalenten Martingalmaß. Die approximierte Swaprate ist lognormalverteilt und Swapoptionpreise lassen sich dann analog zu Capletpreisen bestimmen.

Im Folgenden wollen wir eine solche Approximation der Swapatendynamik für das Shifted Libormarket Modell verwenden. Im nachfolgenden Abschnitt beschreiben wir, wie die Approximation mittels einer Monte Carlo Simulation überprüft werden kann.

Sei im Folgenden  $\mathbb{P}_{n,m}$  das äquivalente Maß, unter dem der Swapatendprozess  $S_{n,m}(t)$  ein Martingal ist. Dies entspricht dem äquivalenten Martingalmaß zum Numéraire  $A_{n,m}(t)$ .

Wir wollen zunächst die Verteilung des Swapatendprozesses unter dem Swapmaß und somit die Volatilität der Swaprate bestimmen. Mit der Gleichung

$$\frac{B(t, T_n)}{B(t, T_m)} = \prod_{k=n}^{m-1} \frac{B(t, T_k)}{B(t, T_{k+1})} = \prod_{k=n}^{m-1} \delta_k L_k(t) + 1 \quad (3.32)$$

können wir die Swaprate wie folgt als stetige Funktion der Forwardraten umformen:

$$\begin{aligned} S_{n,m}(t) &= \frac{B(t, T_n) - B(t, T_m)}{\sum_{i=n+1}^m \delta_{i-1} B(t, T_i)} \\ &= \frac{\frac{B(t, T_n)}{B(t, T_m)} - 1}{\sum_{i=n+1}^m \delta_{i-1} \frac{B(t, T_i)}{B(t, T_m)}} \\ &\stackrel{(3.32)}{=} \frac{\prod_{k=n}^{m-1} (L_k(t) + 1) - 1}{\sum_{i=n+1}^m \delta_{i-1} \prod_{k=i}^{m-1} (\delta_k L_k(t) + 1)}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Damit können wir die Ito-Formel auf den Swapatendprozess anwenden.

Da  $\mathbb{P}_{n,m}$  und  $\mathbb{P}_N$  äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße sind, erfüllen die Forwardraten unter  $\mathbb{P}_{n,m}$  eine stochastische Differentialgleichung ähnlich zu Gleichung 3.1. Der Diffusionskoeffizient und die Korrelation der Wiener Prozesse bleibt erhalten (s. Anhang A.1). Da die Swaprate unter  $\mathbb{P}_{n,m}$  ein Martingal ist, muss der Driftterm

verschwinden.

$$\begin{aligned}
dS_{n,m}(t) &= \sum_{j=n}^{m-1} \frac{\partial S_{n,m}(t)}{\partial L_j(t)} dL_j(t) \\
&\stackrel{3.2}{=} \sum_{j=n}^{m-1} \frac{\partial S_{n,m}(t)}{\partial L_j(t)} \sigma_j(t) (L_j(t) + \gamma_j) dW_{n,m}^{(j)}(t). \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Die einzelnen Summanden des Integrands in obiger Gleichung werden wir im Folgenden näherungsweise bestimmen, dabei folgen wir [EMM04]. Errais, Mauri und Mercurio betrachten ein Modell mit unbestimmten Parametern. Unser Shifted Libormarkt Modell kann als Spezialfall dieses Modells betrachtet werden.

Wir betrachten eine alternative Darstellung der Swaprate:

$$\begin{aligned}
S_{n,m}(t) &= \frac{B(t, T_n) - B(t, T_m)}{\sum_{i=n+1}^m \delta_{i-1} B(t, T_i)} = \frac{\sum_{i=n}^{m-1} B(t, T_i) - B(t, T_{i+1})}{\sum_{k=n}^{m-1} \delta_k B(t, T_{k+1})} \\
&= \frac{\sum_{i=n}^{m-1} \delta_i B(t, T_{i+1}) L_i(t)}{\sum_{k=n}^{m-1} \delta_k B(t, T_{k+1})} := \sum_{i=n}^{m-1} \eta_i(t) L_i(t). \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Die Gewichte  $\eta_i(t)$  hängen von den Bondpreisen und damit indirekt von den Forwardraten  $L_j(t)$  ab. Diese Abhängigkeit vernachlässigen wir und erhalten somit für die Integranden von Gleichung 3.34

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial S_{n,m}(t)}{\partial L_j(t)} \sigma_j(t) (L_j(t) + \gamma_j) \\
&\approx \frac{\delta_j B(t, T_{j+1})}{\sum_{k=n}^{m-1} \delta_k B(t, T_{k+1})} \sigma_j(t) (L_j(t) + \gamma_j) \\
&= \frac{\delta_j B(t, T_{j+1}) \sigma_j(t) (L_j(t) + \gamma_j)}{\sum_{i=n}^{m-1} \delta_i B(t, T_{i+1}) (L_i(t) + \gamma_i)} \frac{\sum_{i=n}^{m-1} \delta_i B(t, T_{i+1}) (L_i(t) + \gamma_i)}{\sum_{k=n}^{m-1} \delta_k B(t, T_{k+1})} \\
&= \frac{\delta_j B(t, T_{j+1}) \sigma_j(t) (L_j(t) + \gamma_j)}{\sum_{i=n}^{m-1} \delta_i B(t, T_{i+1}) (L_i(t) + \gamma_i)} \left( S_{n,m}(t) + \frac{\sum_{i=n}^{m-1} \delta_i B(t, T_{i+1}) \gamma_i}{\sum_{k=n}^{m-1} \delta_k B(t, T_{k+1})} \right) \\
&:= \omega_j(t) \sigma_j(t) (S_{n,m}(t) + \gamma_{n,m}(t)). \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Dabei können wir  $\gamma_{n,m}(t)$  als Shift der Swaprate interpretieren. Es handelt sich um eine Konvexkombination der Shifts  $\gamma_j$  der zu dem betrachteten Zeitintervall gehörenden Forwardraten. Der Faktor  $\omega_j(t) \sigma_j(t)$  lässt sich analog als gewichtete Volatilität interpretieren. Mit Hilfe des Freezings können wir eine weitere Approximation durchführen. Dabei werden die Bondpreise und Forwardraten zur Zeit 0 eingefroren. Wir setzen also  $\omega_j(t) = \omega_j(0)$  und  $\gamma_{n,m}(t) = \gamma_{n,m}(0)$ . Zur Vereinfachung der Notation

schreiben wir  $\omega_j$  und  $\gamma_{n,m}$ . Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{n,m}(t)}{\partial L_j(t)} \sigma_j(t) (L_j(t) + \gamma_j) &\approx \omega_j(t) \sigma_j(t) (S_{n,m}(t) + \gamma_{n,m}(t)) \\ &\approx \omega_j \sigma_j(t) (S_{n,m}(t) + \gamma_{n,m}). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Einsetzen von 3.37 in 3.34 ergibt für die Dynamik der Swaprate

$$\begin{aligned} dS_{n,m}(t) &= \sum_{j=n}^{m-1} \frac{\partial S_{n,m}(t)}{\partial L_j(t)} \sigma_j(t) (L_j(t) + \gamma_j) dW_{n,m}^{(j)}(t) \\ &\approx (S_{n,m}(t) + \gamma_{n,m}) \sum_{j=n}^{m-1} \omega_j \sigma_j(t) dW_{n,m}^{(j)}(t) \\ &= (S_{n,m}(t) + \gamma_{n,m}) \sigma_{n,m}(t) dB_{n,m}(t). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Dabei haben wir

$$\sigma_{n,m}(t) = \sqrt{\sum_{j,k=n}^{m-1} \omega_j \sigma_j(t) \omega_k \sigma_k(t) \rho_{j,k}(t)} \quad (3.39)$$

und

$$dB_{n,m}(t) = \frac{\sum_{j=n}^{m-1} \omega_j \sigma_j(t) dW_{n,m}^{(j)}(t)}{\sigma_{n,m}(t)} \quad (3.40)$$

gesetzt.

Wir überprüfen nun mittels der Levy-Charakterisierung (s. Theorem 3.16 in [KS88]) für Wiener Prozesse, dass  $B_{n,m}(t)$  ein  $\mathbb{P}_{n,m}$ -Wiener Prozess ist. Dabei ist  $W_{n,m}(t)$  als Linearkombination stetiger lokaler Martingale ein stetiges lokales Martingal und für die quadratische Variation gilt:

$$\begin{aligned} \langle B_{n,m}(\cdot) \rangle_t &= \left\langle \frac{\sum_{j=n}^{m-1} \omega_j \sigma_j(t) (\cdot) W_{n,m}^{(j)}(\cdot)}{\sigma_{n,m}(\cdot)}, \frac{\sum_{j=n}^{m-1} \omega_j \sigma_j(t) (\cdot) W_{n,m}^{(j)}(\cdot)}{\sigma_{n,m}(\cdot)} \right\rangle_t \\ &= \sum_{j,k=n}^{m-1} \frac{\omega_j \sigma_j(t) \omega_k \sigma_k(t)}{\sigma_{n,m}(t)^2} \langle W_{n,m}^{(j)}(\cdot), W_{n,m}^{(k)}(\cdot) \rangle_t \\ &= \sum_{j,k=n}^{m-1} \frac{\omega_j \sigma_j(t) \omega_k \sigma_k(t)}{\sigma_{n,m}(t)^2} \rho_{j,k}(t) t \\ &\stackrel{3.39}{=} t. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Bei  $\sigma_{n,m}(t)$  handelt es sich um eine Linearkombination der Volatilitätsfunktionen  $\sigma_j(t)$ ,  $n \leq j \leq m-1$  unter Berücksichtigung der Korrelation. Gleichung 3.38

ermöglicht die Interpretation von  $\sigma_{n,m}(t)$  als Volatilität der adjustierten Swaprate  $X_{n,m}(t) := S_{n,m}(t) + \gamma_{n,m}$ . Es ergibt sich für die Dynmaik von  $X_{n,m}(t)$

$$dX_{n,m}(t) = \sigma_{n,m}(t)X_{n,m}(t)dB_{n,m}(t). \quad (3.42)$$

Damit ist die adjustierte Swaprate lognormalverteilt und die Swaptionpreisbestimmung im Shifted Libormarkt Modell erfolgt wieder mit Hilfe der Black-Scholes Formel. Zunächst setzt sich der Swaptionpreis aus den einzelnen Zahlungen zu den Zeitpunkten  $T_i$  für  $i = n + 1, \dots, m$  zusammen:

$$\begin{aligned} V_{n,m}^{Swaption}(0) &= \sum_{i=n+1}^m \delta_{i-1}B(0, T_i)\mathbb{E}^{n,m} [(S_{n,m}(T_n) - K)^+] \\ &= \sum_{i=n+1}^m \delta_{i-1}B(0, T_i)\mathbb{E}^{n,m} [(X_{n,m}(T_n) - (K + \gamma_{n,m}))^+]. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Es ergibt sich folgender Satz:

**Satz 3.3.1.** *Der Preis einer Payer-Swaption zum Zeitintervall  $[T_n, T_m]$  und Strike  $K$  ist zur Zeit  $t = 0$  gegeben durch*

$$\begin{aligned} V_{n,m}^{Swaption}(0) &= \sum_{i=n+1}^m \delta_{i-1}B(0, T_i)B^{call} \left( K + \gamma_{n,m}, X_{n,m}(0), \sqrt{\int_0^{T_n} \sigma_{n,m}^2(t)} \right) \\ &= \sum_{i=n+1}^m \delta_{i-1}B(0, T_i)B^{call} \left( K + \gamma_{n,m}, S_{n,m}(0) + \gamma_{n,m}, \sqrt{\int_0^{T_n} \sigma_{n,m}^2(t)} \right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

### 3.4. Monte Carlo Swaption Preis

In diesem Kapitel wollen wir beschreiben, wie die Güte der Approximation, die bei der Herleitung des Swaptionpreises verwendet wurde, überprüft werden kann. Dabei folgen wir [EMM04]. Da wir einen Spezialfall des von Errais, Mauri und Mercurio untersuchten Modells betrachten, werden wir nur das Vorgehen beschreiben.

Der Swaptionpreis wird mittels einer Monte Carlo Simulation bestimmt und mit dem approximierten berechneten Preis verglichen. Zur Simulation wird das Spotmaß  $\mathbb{P}_{spot}$  verwendet. Dazu bestimmen wir zunächst den Dichtequotientenprozess von  $\mathbb{P}_{n,m}$  bezüglich  $\mathbb{P}_{spot}$ .

**Proposition 3.4.1.** Für den Dichteprozess  $R_{spot}^{n,m}(t) := \frac{d\mathbb{P}_{n,m}}{d\mathbb{P}_{spot}} \Big|_{\mathcal{F}_t}$  gilt

$$R_{spot}^{n,m}(t) = \frac{A_{n,m}(t)}{B_d(t)} \frac{B_d(T)}{A_{n,m}(0)}. \quad (3.45)$$

*Beweis.* Das Spotmaß entspricht der Wahl von  $B_d(t)$  als Numéraire, das Forwardswapmaß entspricht der Wahl von  $A_{n,m}(t)$  als Numéraire. Der Quotient

$$\sum_{i=n+1}^m \delta_{i-1} \frac{B(t, T_i)}{B_d(t)} \quad (3.46)$$

der Numéraires ist als Linearkombination von  $\mathbb{P}_{spot}$ -Martingalen ein  $\mathbb{P}_{spot}$ -Martingal und die Behauptung gilt mit Proposition 24.4 aus [Bjö04].  $\square$

Damit gilt für den Swaption Preis

$$\begin{aligned} & \text{PSwptn}(n, m, K)^{\text{MC}} \\ &= \mathbb{E}_{n,m} \left[ \sum_{i=n+1}^m \delta_{i-1} B(0, T_i) (S^{n,m}(T_n) - K)^+ \right] \\ &\stackrel{3.45}{=} \mathbb{E}_d \left[ \sum_{i=n+1}^m \delta_{i-1} B(0, T_i) (S^{n,m}(T_n) - K)^+ \frac{A(n, m, T_n)}{B_d(T_n)} \frac{B_d(0)}{A(n, m, 0)} \right] \\ &= \mathbb{E}_d \left[ \frac{\sum_{i=n+1}^m \delta_{i-1} B(T_n, T_i) (S^{n,m}(T_n) - K)^+}{B_d(T_n)} \right]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Dieser Erwartungswert kann numerisch mittels einer Monte Carlo Simulation bestimmt werden. Dazu werden die relevanten Forwardraten

$$L_{n+1}(T_n), L_{n+2}(T_n), \dots, L_m(T_n) \quad (3.48)$$

wiederholt simuliert und damit die mittlere Auszahlung der Swaption berechnet.

Die Dynamik der Forwardraten unter  $\mathbb{P}^{spot}$  haben wir bereits bestimmt (s. Gleichung 3.20) und lautet:

$$dL_j(t) = (L_j(t) + \gamma_j) \sigma_j(t) \left( \sum_{k=\phi(t)}^j \frac{\rho_{j,k}(t) \delta_k (L_k(t) + \gamma_k) \sigma_k(t)}{\delta_k L_k(t) + 1} dt + dW_{spot}^{(j)}(t) \right). \quad (3.49)$$

Ausgehend von Startwerten  $L_{n+1}(0), \dots, L_m(0)$  könnten wir die gesuchten Forwardraten zur Zeit  $T_n$  mit Hilfe des Eulerschemas schrittweise approximieren. Dabei wird



in jedem Zeitschritt die Update-Formel

$$\begin{aligned}
L_j(t + \Delta t) - L_j(t) &= (L_j(t) + \gamma_j)\sigma_j(t) \sum_{k=\phi(t)}^j \frac{\rho_{j,k}(t)\delta_k(L_k(t) + \gamma_k)\sigma_k(t)}{\delta_k L_k(t) + 1} \Delta t \\
&\quad + (L_j(t) + \gamma_j)\sigma_j(t)(W_N^{(j)}(t + \Delta t) - W_N^{(j)}(t))
\end{aligned} \tag{3.50}$$

verwendet. Es ist möglich die Forwardraten effizienter zu simulieren. Dazu wenden wir die Ito-Formel auf die geshifteten Forwardraten  $\tilde{L}_j^\gamma(t) = L_j(t) + \gamma_j$  an und erhalten:

$$\begin{aligned}
d\tilde{L}_j^\gamma(t) &= \frac{1}{\tilde{L}_j^\gamma(t)} dL_j(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{\tilde{L}_j^\gamma(t)^2} d\langle L_j(\cdot) \rangle_t \\
&= \sigma_j(t) \left( \sum_{k=\phi(t)}^j \frac{\rho_{j,k}(t)\delta_k \tilde{L}_k^\gamma(t) \sigma_k^I(t)}{\delta_k L_k(t) + 1} dt + dW_N^{(j)}(t) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{\tilde{L}_j^\gamma(t)^2} \tilde{L}_j^\gamma(t)^2 \sigma_j(t)^2 dt \\
&= \sigma_j(t) \left( \sum_{k=\phi(t)}^j \frac{\delta_k \tilde{L}_k^\gamma(t)}{\delta_k (\tilde{L}_k^\gamma(t) - \gamma_k) + 1} \sigma_k(t) dt \right) - \frac{1}{2} \sigma_j(t)^2 dt \\
&\quad + \sigma_j(t) dW(t).
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Dabei hat  $\tilde{L}_j^\gamma(t)$  einen deterministischen Diffusionskoeffizienten  $\sigma_j(t)$ , welcher nur von der Zeit abhängt. Simulieren wir den Prozess mit dem Euler-Verfahren, so stimmt es mit dem Milstein-Verfahren überein (s. [KP92], Abschnitt 10.2). Die entsprechende Update-Formel lautet:

$$\ln \tilde{L}_j^\gamma(t + \Delta t) - \ln \tilde{L}_j^\gamma(t) = \sigma_j(t) \left( \sum_{k=j+1}^{N-1} \frac{\delta_k \tilde{L}_k^\gamma(t)}{\delta_k (\tilde{L}_k^\gamma(t) - \gamma_k) + 1} \sigma_k(t) \right) \Delta t \tag{3.52}$$

$$+ -\frac{1}{2} \sigma_j(t)^2 \Delta t + \sigma_j(t) (W(t + \Delta t) - W(t)). \tag{3.53}$$

Mit den simulierten Werten der Forwardraten können wir die diskontierte Swaptionauszahlung für jeden Pfad bestimmen und den Monte Carlo Preis als Durchschnitt aller simulierten Preise bestimmen:

$$\begin{aligned}
&\text{PSwptn}(n, m, K)^{\text{MC}} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(S_{n,m}(T_n; \omega_j) - K)^+ \sum_{i=n+1}^m \delta_{i-1} B(T_n, T_i) B(0, T_n)}{B(0, T_N)}.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Errais, Mauri und Mercurio sagen, dass die Approximation für Swaptions mit ei-

ner Optionslaufzeit von 2,3,4 bzw. 5 Jahren und einer Swaplaufzeit von 5 Jahren ziemlich präzise ist. Sie haben die Monte Carlo Simulation unter dem Spot-Maß durchgeführt.

## 4. Implizite Volatilität

Bevor wir beschreiben, wie sich das betrachtete Shifted Libormarkt Modell anhand von Marktdaten kalibrieren lässt, gehen wir auf die implizite Volatilität ein. Optionspreise werden üblicherweise nicht in Geldeinheiten, sondern als implizite Volatilität quotiert. Für einen gegebenen Marktpreis  $V_j^{Markt}$  eines Caplets für ein Zeitintervall  $[T_j, T_{j+1}]$  zum Strike  $K$  ist die implizite Volatilität  $\sigma$  als Lösung der Gleichung

$$V_j^{Markt} = V_j^{Caplet,BS}(0, K, \sigma) = \delta_j B(0, T_{j+1}) \text{Bl}^{\text{call}}(K, S, \sqrt{T_j} \sigma) \quad (4.1)$$

definiert. Dies entspricht der Bewertung eines Caplets im Black-Scholes Modell. Eine Quotierung des Preises über die implizite Volatilität ist somit nur möglich, wenn sich die Gleichung (numerisch) lösen lässt. Im Umfeld negativer Zinsen bzw. Strikes ist dies nicht gegeben, da das Argument des Logarithmus in Blacks Formel negativ werden kann. Als Alternative wird eine implizite Normal-Volatilität  $\sigma_N$  verwendet. Diese ist analog als Lösung der Gleichung

$$V_j^{Markt} = V_j^{Caplet,Bachelier}(0, K, \sigma_N) \quad (4.2)$$

definiert. Daher werden wir im ersten Abschnitt des Kapitels das Bachelier-Modell einführen und die Bewertungsformel für Call-Optionen in diesem herleiten. Es ist weiter möglich eine implizite Shifted Lognormal-Volatilität  $\sigma_{LN}^\gamma$  als Lösung der Gleichung

$$V_j^{Markt} = V_j^{Caplet,SLLM}(0, K, \sigma_{LN}^\gamma) \quad (4.3)$$

zu definieren. Dabei ist der Modellpreis auf der rechten Seite durch Satz 3.2.1 gegeben. Wir wollen unser Modell anhand solcher Shifted Lognormal-Volatilitäten kalibrieren. Dazu betrachten wir im zweiten Abschnitt des Kapitels einen Zusammenhang zwischen impliziten ATM-Volatilitäten im Bachelier und Shifted Lognormal Libormarkt Modell.

Für Swaptions lässt sich eine implizite Volatilität vollkommen analog definieren. Eine Swaption wird als eine Summe von Calloption auf die Swaprate betrachtet. Es

wird davon ausgegangen, dass die Swaprate (approximativ) die gleiche Verteilung wie die Forwardrate besitzt.

## 4.1. Bachelier-Modell

Wir nehmen an, dass die zugrundeliegende Rate  $S(t)$  unter ihrem Forwardmartingalmaß  $\mathbb{Q}$  nicht wie in Gleichung 3.2 lognormalverteilt, sondern normalverteilt ist. Dabei können wir uns für  $S(t)$  eine Forwardrate  $L_j(t)$  oder eine Swaprate  $S_{n,m}(t)$  und für  $\mathbb{Q}$  das Forwardmartingalmaß  $\mathbb{P}_{T_{j+1}}$  oder das Forwardswapmaß  $\mathbb{P}_{n,m}$  vorstellen. Es gilt also:

$$dS(t) = \sigma(t)dW(t). \quad (4.4)$$

Dabei ist  $W(t)$  ein  $\mathbb{Q}$ -Wiener Prozess und  $\sigma(t)$  eine deterministische, beschränkte Funktion. Wir wollen nun die erwartete Auszahlung einer Calloption auf die zugrundeliegende Rate  $S(t)$  mit Strike  $K$  und Maturität  $T$ , also

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(S(T) - K)^+] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S(T)\mathbb{1}_{S(T)>K}] - K\mathbb{Q}(S(T) > K) \\ &= \mathbb{Q}(S(T) > K) \left( \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S(T)\mathbb{1}_{S(T)>K}]}{\mathbb{Q}(S(T) > K)} - K \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

bestimmen. Zur Vereinfachung der Notation verwenden wir im Folgenden:

1. Anstelle der unter  $\mathbb{Q}$  normalverteilten Zufallsvariable  $S(T)$  mit Parametern  $\mu = S(0)$ ,  $\sigma = \sqrt{\int_0^T \sigma^2(s)ds}$  eine unter  $\mathbb{P}$  normalverteilte Zufallsvariable  $X$  mit Parametern  $(\mu, \sigma^2)$
2. Eine unter  $\mathbb{P}$  standardnormalverteilte Zufallsvariable  $Z$
3. Einen transformierten Strike  $D = \frac{\mu-K}{\sigma}$ .

Damit ergibt sich für den ersten Faktor:

$$\mathbb{P}(X > K) = \mathbb{P}(Z > -D) = 1 - \Phi(-D) = \Phi(D). \quad (4.6)$$

Um den Bruch in der Klammer zu bestimmen benutzen wir einige Eigenschaften der Standardnormalverteilung, ihrer Verteilungsfunktion  $\Phi(z)$ , ihrer Wahrscheinlichkeitsdichte  $\phi(z)$ , sowie den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung.

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{X>K}]}{\mathbb{P}(X > K)} &= \frac{\mathbb{E}[(\sigma Z + \mu) \mathbb{1}_{Z>-D}]}{\mathbb{P}(Z > -D)} \\
&= \frac{\sigma \int_{-D}^{\infty} z \phi(z) dz + \mu \int_{-D}^{\infty} \phi(z) dz}{\Phi(D)} \\
&= \frac{-\sigma \int_{-D}^{\infty} \phi'(z) dz + \mu \int_{-D}^{\infty} \Phi'(z) dz}{\Phi(D)} \\
&= \frac{\sigma \phi(-D) + \mu(1 - \Phi(-D))}{\Phi(D)} \\
&= \mu + \frac{\sigma \phi(D)}{\Phi(D)}. \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Setzen wir dies nun in Gleichung 4.5 ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X - K)^+] &= \mathbb{P}(X > K) \left( \frac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{X>K}]}{\mathbb{P}(X > K)} - K \right) \\
&= (\mu - K) \Phi(D) + \sigma \phi(D). \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der ursprünglichen Notation erhalten wir somit für die erwartete Auszahlung einer Calloption:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S(T) - K)^+] = (S(0) - K) \Phi(d) + \sqrt{\int_0^T \sigma^2(s) ds} \phi(d) \tag{4.9}$$

$$d = \frac{S(0) - K}{\sqrt{\int_0^T \sigma^2(s) ds}}. \tag{4.10}$$

Haben wir nun eine implizite Normal Caplet Volatilität  $\sigma_j^{Caplet}$  oder eine implizite Normal Swaption Volatilität  $\sigma_{n,m}^{Swptn}$  gegeben, können wir den Marktpreis bestimmen.

**Satz 4.1.1.** *Für den Preis eines Caplets zum Zeitintervall  $[T_j, T_{j+1}]$  mit Strike  $K$  und impliziter Volatilität  $\sigma_j^{Caplet}$  gilt im Normalmodell:*

$$V_j^{Caplet}(0, K) = \delta_j B(0, T_j) \left( (L_j(0) - K) \Phi(d) + \sqrt{T_j} \sigma_j^{Caplet} \phi(d) \right), \tag{4.11}$$

wobei

$$d = \frac{L_j(0) - K}{\sigma_j^{Caplet}} \tag{4.12}$$

ist. Für den Preis einer Swaption zum Zeitintervall  $[T_n, T_m]$  mit Strike  $K$  und im-

pliziert Volatilität  $\sigma_{n,m}^{Swptn}$  gilt im Normalmodell:

$$VSwptn(n, m, K) = \sum_{i=n+1}^m \delta_{i-1} B(0, T_i) \left( (S_{n,m}(0) - K) \Phi(d) + \sqrt{T_n} \sigma_{n,m}^{Swptn} \phi(d) \right), \quad (4.13)$$

wobei

$$d = \frac{S_{n,m}(0) - K}{\sigma_{n,m}^{Swptn}} \quad (4.14)$$

## 4.2. Zusammenhang zwischen ATM Normal- und Lognormal-Volatilitäten

Nachdem wir beschrieben haben, wie sich aus den am Markt quotierten Normalvolatilitäten Preise berechnen lassen, wollen wir nun auf den Zusammenhang von Normal- und (Shifted) Lognormal-Volatilitäten eingehen. In einem Marktumfeld ohne negative Zinsen würde man ein Libormarkt Modell direkt an den quotierten Volatilitäten kalibrieren. In einem Marktumfeld mit negativen Zinsen müssen wir jedoch zunächst Shifted Lognormal-Volatilitäten, die den quotierten Normal-Volatilitäten entsprechen, bestimmen.

Für den Fall von den ATM-Call Optionen existiert eine exakte Transformationsformel von Normal-Volatilitäten und Shifted Lognormal-Volatilitäten. Es ist weiterhin auch möglich, Volatilitäten für verschiedene Shifts zu erhalten, vorausgesetzt die Shifts sind groß genug.

**Proposition 4.2.1.** *Für die impliziten Volatilitäten  $\sigma_{LN}^\gamma$  und  $\sigma_N$  einer ATM-Call Option ( $K = S(0)$ ) gilt:*

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{2\pi}{T}} (S(0) + \gamma) \left( 2\Phi \left( \frac{\sigma_{LN}^\gamma \sqrt{T}}{2} \right) - 1 \right) = \sqrt{\frac{2\pi}{T}} (S(0) + \gamma) \operatorname{erf} \left( \frac{\sigma_{LN}^\gamma \sqrt{T}}{2\sqrt{2}} \right). \quad (4.15)$$

Für  $\gamma > \frac{\sigma_N \sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} - S(0)$  gilt umgekehrt auch:

$$\sigma_{LN}^\gamma = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{T}} \operatorname{erf}^{-1} \left( \frac{\sigma_N \sqrt{T}}{\sqrt{2\pi} (S(0) + \gamma)} \right). \quad (4.16)$$

*Beweis.* Da die Preisbestimmung einer Call-Option mit ihrer (modellabhängigen)

impliziten Volatilität einen modellunabhängigen Preis ergibt, gilt:

$$V_N(S(0), K, T, \sigma_N) = V_{LN}^\gamma(S(0), K, T, \sigma_{LN}^\gamma). \quad (4.17)$$

Einsetzen der entsprechend hergeleiteten Formeln für  $K = S(0)$  ergibt:

$$\sigma_N \sqrt{T} \phi(0) = (S(0) + \gamma) \left( \Phi \left( \frac{\sigma_{LN}^\gamma \sqrt{T}}{2} \right) - \Phi \left( -\frac{\sigma_{LN}^\gamma \sqrt{T}}{2} \right) \right). \quad (4.18)$$

Lösen wir obige Formel unter Verwendung der Symmetrieeigenschaft der Normalverteilung nach der Normalvolatilität auf, so ergibt sich der erste Teil der ersten Behauptung. Die zweite Gleichheit ergibt sich durch Verwendung der Gaußschen Fehlerfunktion (**error function**), definiert durch:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\tau^2} d\tau. \quad (4.19)$$

Diese steht durch die Gleichung

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right) \quad (4.20)$$

im direkten Zusammenhang mit der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Damit ergibt sich die erste Behauptung. Um die zweite Behauptung zu erhalten, wollen wir die erste nach  $\sigma_{LN}^\gamma$  auflösen. Die Bedingung  $\gamma > \frac{\sigma_N \sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} - S(0)$  stellt dabei sicher, dass das Argument der Umkehrung der Gaußschen Fehlerfunktion in ihrem Definitionsbereich liegt.  $\square$

Daraus ergibt sich auch eine Formel, mit der implizite Shifted Lognormal-Volatilitäten für verschiedene Shifts  $\gamma$  und  $\gamma'$  im Zusammenhang stehen.

**Proposition 4.2.2.** *Sind  $\gamma$  und  $\gamma'$  zwei Shifts mit  $S(0) + \gamma' > (S(0) + \gamma) \operatorname{erf} \left( \frac{\sigma_{LN}^\gamma \sqrt{T}}{2\sqrt{2}} \right)$  so gilt:*

$$\sigma_{LN}^{\gamma'} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{T}} \operatorname{erf}^{-1} \left( \frac{(S(0) + \gamma)}{(S(0) + \gamma')} \operatorname{erf} \left( \frac{\sigma_{LN}^\gamma \sqrt{T}}{2\sqrt{2}} \right) \right). \quad (4.21)$$

*Beweis.* Aus  $V_{LN}^{\gamma'}(S(0), K, T, \sigma_{LN}^{\gamma'}) = V_N(S(0), K, T, \sigma_N) = V_{LN}^\gamma(S(0), K, T, \sigma_{LN}^\gamma)$  er-

halten wir:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{2\pi}{T}}(S(0) + \gamma') \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma_{LN}^{\gamma'} \sqrt{T}}{2\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{T}}(S(0) + \gamma) \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma_{LN}^{\gamma} \sqrt{T}}{2\sqrt{2}}\right) \\
& \Leftrightarrow \frac{(S(0) + \gamma)}{(S(0) + \gamma')} \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma_{LN}^{\gamma} \sqrt{T}}{2\sqrt{2}}\right) = \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma_{LN}^{\gamma'} \sqrt{T}}{2\sqrt{2}}\right) \\
& \Leftrightarrow \sigma_{LN}^{\gamma'} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{T}} \operatorname{erf}^{-1}\left(\frac{(S(0) + \gamma)}{(S(0) + \gamma')} \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma_{LN}^{\gamma} \sqrt{T}}{2\sqrt{2}}\right)\right). \tag{4.22}
\end{aligned}$$

□

Für  $\gamma' > \gamma$  ist die Anforderung von obiger Proposition immer erfüllt. Dies bedeutet insbesondere, dass sich aus gegebenen impliziten Lognormalen Volatilitäten ( $\gamma = 0$ ) immer implizite Shifted Lognormal Volatilitäten für ATM-Call Optionen berechnen lassen. Aufgrund des Smile-Effekts gilt diese exakte Formel auch nur für ATM Optionen.

Bei der Kalibrierung werden wir zwar ATM-Caps betrachten. Dies bedeutet jedoch, dass die gesamte Option ATM ist und nicht jedes zugrunde liegende Caplet. Bei der Kalibrierung an Swaptions werden wir die hergeleitete Formel jedoch verwenden, um Shifted Lognormal-Volatilitäten aus gegeben Normal-Volatilitäten zu berechnen.

Es gibt eine einfache Approximation für Normal- bzw. Lognormal-Volatilitäten von ATM-Optionen mit kurzer Laufzeit (s.z.B. [ST08] Proposition 2.2)

$$\sigma_N \approx \sigma_{LN} S(0) \tag{4.23}$$

Wir können dieses Resultat für Shifted Lognormal Volatilitäten erweitern.

**Proposition 4.2.3.** *Für die impliziten Volatilitäten  $\sigma_N$  und  $\sigma_{LN}$  im Bachelier bzw. Shifted Libormarkt Modell einer ATM-Call Option gilt:*

$$0 \leq \sigma_{LN}^{\gamma} - \frac{\sigma_N}{S(0) + \gamma} \leq \frac{T}{24} (\sigma_{LN}^{\gamma})^3 \tag{4.24}$$

*Beweis.* Wir folgen dem Beweis aus [ST08] und verallgemeinern ihn um einen Shift



$\gamma$ . Umstellen von Gleichung 4.18 liefert:

$$\begin{aligned}
\sigma_{LN}^\gamma - \frac{\sigma_N}{S(0) + \gamma} &= \sigma_{LN}^\gamma - \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \left( \Phi \left( \frac{\sigma_{LN}^\gamma \sqrt{T}}{2} \right) - \Phi \left( -\frac{\sigma_{LN}^\gamma \sqrt{T}}{2} \right) \right) \\
&= \sqrt{\frac{1}{T}} \left( \sigma_{LN}^\gamma \sqrt{T} - \int_{-\frac{\sigma_{LN}^\gamma \sqrt{T}}{2}}^{\frac{\sigma_{LN}^\gamma \sqrt{T}}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) \\
&= \sqrt{\frac{1}{T}} \int_{-\frac{\sigma_{LN}^\gamma \sqrt{T}}{2}}^{\frac{\sigma_{LN}^\gamma \sqrt{T}}{2}} (1 - e^{-\frac{x^2}{2}}) dx. \tag{4.25}
\end{aligned}$$

Mit der Ungleichung  $1 - e^{-\frac{x^2}{2}} \geq 0$  erhalten wir die erste Abschätzung. Für die zweite Abschätzung verwenden wir die Ungleichung  $1 - y \leq e^{-y}$  und erhalten:

$$\begin{aligned}
\sigma_{LN}^\gamma - \frac{\sigma_N}{S(0) + \gamma} &\leq \sqrt{\frac{1}{T}} \int_{-\frac{\sigma_{LN}^\gamma \sqrt{T}}{2}}^{\frac{\sigma_{LN}^\gamma \sqrt{T}}{2}} \frac{x^2}{2} dx \\
&= \frac{T}{24} (\sigma_{LN}^\gamma)^3. \tag{4.26}
\end{aligned}$$

□

## 5. Kalibrierung

Nachdem wir das Shifted Libormarkt Modell eingeführt, sowie Formeln zur Bewertung von Caplets und Swaptions hergeleitet haben, wollen wir nun eine einfache Kalibrierung des Modells beschreiben. Dabei wird eine gemeinsame Kalibrierung an Caps und Swaptions durchgeführt. Wir betrachten einen Finanzmarkt mit  $N = 40$  und einer äquidistanten Tenorstruktur, deren Zeitpunkte jeweils ein halbes Jahr auseinander liegen.

Ausgehend von der Modellspezifizierung (Gleichung 3.1), der arbitragefreien Gestalt der Driftterme (Proposition 2.3.3) sowie der Parametrisierung der Korrelation (Gleichung 5.23) sind folgende Größen Parameter des Shifted Libormarkt Modells:

1. Die deterministischen Volatilitätsfunktionen  $\sigma_k(t)$  der Forwardrate  $L_k$  für  $1 \leq k \leq N - 1$ ,  $0 \leq t \leq T_k$ ,
2. Die Shifts  $\gamma_k$  der Forwardraten der Forwardrate  $L_k$  für  $1 \leq k \leq N - 1$ ,
3. Die Parameter der Parametrisierung der Korrelationsmatrix.

Wir werden zur Vereinfachung von einem gemeinsamen Shift für alle Forwardraten ausgehen, welcher vor der Kalibrierung festgelegt wird. Zusätzlich zu den genannten Parametern benötigen wir zur Bewertung von Caps und Swaptions noch Forwardraten, Bondpreise und Swapraten. Aufgrund der in Kapitel 1 getroffenen Definitionen stehen die Größen in einem Zusammenhang. Kennen wir die Kurve der Swapraten, das heißt die Abbildung  $t \mapsto S(0, t)$ , so können wir die benötigten Forwardraten und Bondpreise berechnen.

Dazu erläutern wir im ersten Abschnitt ein Bootstrappingverfahren, mit welchem wir aus Swapraten vom Markt konsistente Forwardraten und Bondpreise gewinnen können. Da Forwardraten nicht am Markt gehandelt werden, ist es nicht möglich, die Volatilitätsfunktionen direkt zu erhalten. Deswegen beschreiben wir im zweiten Abschnitt, wie aus den zuvor erhaltenen Forwardraten und aus impliziten Cap-Normal-Volatilitäten, die am Markt erhältlich sind, implizite (Shifted) Caplet-

Lognormal-Volatilitäten gewonnen werden können. Im dritten Abschnitt erläutern wir eine Möglichkeit die Volatilitätsfunktionen zu parametrisieren, um Integrale der Form

$$\int_0^t \sigma_j(s)\sigma_k(s)\rho_{jk}ds \quad (5.1)$$

bestimmen zu können. Diese benötigen wir für die Kalibrierung an Swaptions, welche wir im vierten Abschnitt betrachten. Abschließend betrachten wie im fünften Abschnitt Ergebnisse der beschriebenen Verfahren.

## 5.1. Bootstrapping der Forwardraten

Am Markt sind zwar einige LIBOR-Raten erhältlich, jedoch nur für relativ kurze Laufzeiten. Die längste angegebene Maturität beträgt ein Jahr, es werden jedoch Caps und Swaptions mit deutlich längeren Laufzeiten gehandelt. Um Preise solcher Optionen bestimmen zu können, benötigen wir also Forwardraten und Bondpreise mit ebenso langen Laufzeiten. Die ebenfalls benötigten Swapraten sind als Bestandteil von Swaptions am Markt erhältlich. Unser Ziel ist es nun, die Kurve der Bondpreise zur Zeit 0, das heißt die Abbildung  $t \mapsto B(0, t)$ , zu bestimmen.

i	$S_{1,i}(0)$	i	$S_{1,i}(0)$
2	-0.208	22	0.398
3	-0.205	22	0.493
4	-0.2	24	0.559
6	-0.177	26	0.638
8	-0.138	28	0.696
10	-0.076	30	0.744
12	0.004	32	0.784
14	0.101	34	0.815
16	0.199	36	0.841
18	0.302	38	0.86

Tabelle 5.1.: Wert der Swapraten vom 19.10.2016 in Prozent

Andersen und Piterbarg stellen dazu verschiedene Methoden vor (s.[AP10], Abschnitt 6), um Bondpreise aus Swapraten zu erhalten. Für die Swapraten vom Be-

trachtungszeitpunkt bis zu einem zukünftigen Zeitpunkt  $T_n$  gilt:

$$\begin{aligned}
S_{0,n}(0) &= \frac{1 - B(0, T_n)}{\sum_{i=0}^{n-1} \delta_i B(0, T_{i+1})} \\
\Leftrightarrow S_{0,n}(0) \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i B(0, T_{i+1}) &= 1 - B(0, T_n) \\
\Leftrightarrow B(0, T_n) + S_{0,n} \delta_{n-1} B(0, T_n) &= 1 - S_{0,n}(0) \sum_{i=0}^{n-2} \delta_i B(0, T_{i+1}) \\
\Leftrightarrow B(0, T_n) &= \frac{1 - S_{0,n}(0) \sum_{i=0}^{n-2} \delta_i B(0, T_{i+1})}{1 + S_{0,n} \delta_{n-1}}. \tag{5.2}
\end{aligned}$$

Da jedoch nicht für alle  $n = 1, \dots, N$  die Swaprate  $S_{0,n}(0)$  erhältlich ist, werden fehlende Swapraten interpoliert. Tabelle 5.1 zeigt die Swapraten vom 19.10.2016. Da wir zur Optionspreisbestimmung Bondpreise und Forwardraten nur auf unserer Tenorstruktur benötigen, wenden wir lineare Interpolation an, um den Rest der Kurve zu erhalten. Somit lassen sich aus den Swapraten  $(S_{0,T_i}(0))_{1 \leq i \leq N}$  die Bondpreise  $(B(0, T_i))_{1 \leq i \leq N}$  bestimmen. Ausgehend von diesen können dann auch die Forwardraten bestimmt werden:

$$L_i(0) = \frac{1}{\delta_i} \left( \frac{B(0, T_i)}{B(0, T_{i+1})} - 1 \right). \tag{5.3}$$

Daraus ergibt sich ein sägezahnartiger Verlauf der Bond- und Forwardratenkurve.

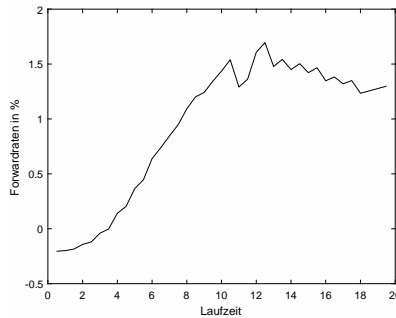


Abbildung 5.1.: Wert der Forwardraten, die sich aus den in Tabelle 5.1 dargestellten Swapraten ergeben

## 5.2. Kalibrierung an Caplets

In diesem Abschnitt wollen wir beschreiben, wie wir implizite Caplet-Volatilitäten für das Shifted Libormarkt Modell aus den am Markt erhältlichen Normal-Cap-Volatilitäten berechnen können. Zunächst beschreiben wir das Cap-to-Caplet Strip-

ping (s.[BM01], Abschnitt 6.4), welches es erlaubt, aus Cap-Volatilitäten konsistente Caplet-Volatilitäten zu berechnen. Anschließend erläutern wir, wie die so erhaltenen Normal-Caplet-Volatilitäten in Caplet-Volatilitäten für das Shifted Libormarkt Modell umgerechnet werden können.

Wir betrachten die zu den Zeiträumen  $[T_1, T_L]$ ,  $2 \leq L \leq N$  gehörenden Caps mit ATM-Strikes  $S(T_1, T_L)$ , sowie ihre quotierten Volatilitäten  $\sigma_{1,L}^{\text{Cap}}$ . Bei der Preisberechnung eines solchen Caps wird für jedes zu diesem Cap gehörende Caplet die quotierte Cap-Volatilität verwendet. Damit ergibt sich der Cap Preis zu:

$$V_{1,L}^{\text{Cap,Market}}(0, \sigma_{1,L}^{\text{Cap}}) = \sum_{j=1}^{L-1} V_j^{\text{Caplet,Market}}(0, \sigma_{1,L}^{\text{Cap}}). \quad (5.4)$$

Bei der Bewertung eines Caps in einem Modell ergibt sich jedoch für jedes Caplet eine eigene Caplet-Volatilität  $\sigma_j^{\text{Caplet}}$ . Die am Markt quotierten Cap-Volatilitäten lassen sich als durchschnittliche Caplet-Volatilität ansehen und sind Lösung folgender Gleichung:

$$\sum_{j=1}^{L-1} V_j^{\text{Caplet}}(0, \sigma_j^{\text{Caplet}}) = \sum_{j=1}^{L-1} V_j^{\text{Caplet}}(0, \sigma_{1,L}^{\text{Cap}}). \quad (5.5)$$

Betrachtet man nun obige Gleichung iterativ für  $L = 2, \dots, N$ , so erhalten wir eine Folge von Gleichungen für die Caplet-Volatilitäten  $\sigma_{L-1}^{\text{Caplet}}$ . Diese sind gegeben durch:

$$V_{L-1}^{\text{Caplet}}(0, \sigma_{L-1}^{\text{Caplet}}) = \sum_{j=1}^{L-1} V_j^{\text{Caplet}}(0, \sigma_{1,L}^{\text{Cap}}) - \sum_{j=1}^{L-2} V_j^{\text{Caplet}}(0, \sigma_j^{\text{Caplet}}). \quad (5.6)$$

Für  $L = 2$  ist die linke Seite von  $\sigma_1^{\text{Caplet}}$  und die rechte Seite von  $\sigma_{1,2}^{\text{Cap}}$  abhängig. Da die Cap-Volatilität bekannt ist, können wir also die Caplet-Volatilität numerisch bestimmen. Für  $L = 3, \dots, N$  hängt die rechte Seite nur von Cap-Volatilitäten und bereits bestimmten Caplet-Volatilitäten ab, so dass wir immer eine weitere Cap-Volatilität numerisch bestimmen können. Am Markt werden Caps nur für bestimmte Maturitäten quotiert und somit sind nicht für alle Zeitpunkte unserer Tenorstruktur Volatilitäten vorhanden. Daher werden die fehlenden Cap-Volatilitäten durch kubische Spline Interpolation bestimmt.

Das so beschriebene Verfahren ist modellunabhängig. Verwenden wir die am Markt quotierten (Normal) Cap-Volatilitäten und die Bewertungsformel aus dem Bacheliermodell (Gleichung 4.11) so können wir (Normal) Caplet-Volatilitäten bestimmen.

Um Caplet-Volatilitäten für unser Shifted Libormarkt Modell zu erhalten, bestim-

men wir für  $L = 1, \dots, N - 1$  numerisch eine Lösung der Gleichung:

$$V_{L-1}^{Caplet, Bachelier}(0, \sigma_{L-1, N}^{Caplet}) = V_{L-1}^{Caplet, SLLM}(0, \sigma_{L-1, LN}^{Caplet, \gamma}). \quad (5.7)$$

Dabei bezeichnet  $V_{Caplet, Bachelier}$  die Bewertungsformel 4.11 im Bacheliermodell und  $V_{Caplet, SLLM}$  die Bewertungsformel aus Satz 3.2.1 im Shifted Libormarkt Modell. Dabei betrachten wir eine zusätzliche Abhängigkeit der Formel von der Volatilität. Zur Bestimmung einer Lösung von Gleichung bzw. 5.6 und 5.6 müssen zwei numerische Minimierungsverfahren verwendet werden. Es ist auch möglich aus den Normal-Cap-Volatilitäten direkt Shifted Lognormal-Caplet-Volatilitäten zu berechnen.

### 5.3. Parametrisierung der Volatilität

Rebonato (s. [Reb04], Abschnitt 21.3) schlägt für die Volatilitätsfunktionen eine Parametrisierung mit 4 Parametern vor. Diese erlaubt eine monoton abfallende Form, sowie eine Buckelform. Rebonato begründet die Existenz dieser Formen. Unter normalen Umständen hängen Forwardraten mit kurzer Restlaufzeit hauptsächlich von Entscheidungen von Aufsichtsbehörden ab. Da diese ihre Vorhaben in der Regel frühzeitig ankündigen, sinkt die Volatilität von Forwardraten zum Ende der Laufzeit. Erwartungen über Raten mit langer Laufzeiten hängen hingegen stark von der erwarteten Langzeitinflation ab. Zentralbanken versuchen oft, ein Inflationsziel umzusetzen. Daher ist die größte Unsicherheit bei Laufzeiten zwischen 6 und 24 Monaten zu finden. Unter angespannten Marktumständen herrscht hingegen Unsicherheit bezüglich der Handlungen von Aufsichtsbehörden. Damit werden Forwardraten mit kurzer Restlaufzeit volatiler und der Buckel verschwindet.

Es wird angenommen, dass die Volatilitätsfunktion  $\sigma_k(t)$  der  $k$ .ten Liborrate einen zeitunabhängigen Teil  $\Psi_k$  und einen zeitabhängigen Teil  $\psi(a, b, c, d, T_k - t)$  besitzt, welcher durch Parameter  $a, b, c, d$  bestimmt wird:

$$\sigma_k(t) = \Psi_k \psi(a, b, c, d, T_k - t) \quad (5.8)$$

$$\psi(a, b, c, d, T_k - t) = (a + b(T_k - t)) \exp(-c(T_k - t)) + d. \quad (5.9)$$

Wir betrachten zunächst die eigentliche Parametrisierung der Volatilität in Form der zeitabhängigen Funktion  $\psi$ . Anschließend erläutern wir, wozu der zusätzlich Skalierungsfaktor  $\Psi_k$  benötigt wird.

Die Größe  $\tau = T_k - t$  ist die Restlaufzeit der betrachteten Forwardrate. Der lineare

Teil  $a + b(\tau)$  sorgt für ein lineares Steigen der Volatilität. Unter der Bedingung

$$c > 0 \tag{5.10}$$

liefert der exponentiell fallende Term  $\exp(-c\tau)$  ein Abfallen der Volatilität zum langen Ende hin, so dass die Volatilität nur am kurzen Ende steigt. Zusammen ermöglichen die beiden Terme eine Buckelform der Volatilitätsfunktion. Betrachtet man den Grenzwert von der Maturität zur null, so ergibt sich für die Volatilität mit beliebig kurzer Laufzeit:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \sigma_k(\tau) = a + d > 0. \tag{5.11}$$

Dabei entsteht die Ungleichung aus der Tatsache, dass Volatilitäten positiv sind. Umgekehrt liefert eine Betrachtung von beliebig langen Maturitäten eine Bedingung an den Parameter  $d$ :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \sigma_k(\tau) = d > 0 \tag{5.12}$$

Wenn wir die Volatilitätsfunktionen nur durch die zeitabhängigen Funktionen  $\psi$  parametrisieren, können nicht alle Caplet Volatilitäten mit den impliziten Caplet Volatilitäten übereinstimmen. Dies wird ersichtlich, wenn man den Zusammenhang

$$(\sigma_K^{\text{caplet}})^2 = \frac{1}{T_k} \int_0^{T_k} ((a + b(T_k - t))\exp(-c(T_k - t)) + d)^2 dt \tag{5.13}$$

der Volatilitäten für alle  $k = 1, \dots, N - 1$  betrachtet. Da die rechte Seite nur von den vier Parametern  $\{a, b, c, d\}$  abhängt und man von  $N > 4$  ausgehen kann, wird dies im Allgemeinen nicht der Fall sein. Daher betrachten wir für jede Forwardrate einen extra Skalierungsfaktor  $\Psi_k$  definiert durch

$$\Psi_k^2 = \frac{T_k (\sigma_K^{\text{caplet}})^2}{\int_0^{T_k} ((a + b(T_k - t))\exp(-c(T_k - t)) + d)^2 dt}. \tag{5.14}$$

Dann können wir die Volatilitätsfunktionen der Forwardraten durch

$$\sigma_k(t) = \Psi_k \psi(a, b, c, d, T_k - t) \tag{5.15}$$

parametrisieren und stellen sicher, dass wir für jede Wahl von  $a, b, c, d$  die kalibrierten Caplet Volatilitäten genau treffen können.

Im nächsten Abschnitt werden wir die gemeinsame Kalibrierung an Caplets und Swaptions betrachten. Dabei werden die Parameter  $a, b, c, d$  nicht direkt an den Caplet-Volatilitäten kalibriert. Um die Verwendung dieser Parametrisierung im Shif-

ted Libormarkt Modell zu rechtfertigen können wir dies aber tun.

Für gegebene Caplet-Volatilitäten können wir eine zugehörige Parametrisierung über ein Minimierungsproblem bestimmen. Dazu minimieren wir den mittleren quadratischen Fehler zwischen Caplet-Volatilitäten und der Funktion  $\psi(\tau, a, b, c, d)$ , also den Ausdruck

$$\sum_{K=1}^{N-1} g \left( \sigma_K^{\text{caplet}}, \sqrt{\frac{1}{T_K} \int_0^{T_k} ((a + b(T_k - t)) \exp(-c(T_k - t)) + d)^2 dt} \right), \quad (5.16)$$

wobei  $g(x, y) = (x - y)^2/x^2$  ist. Abbildung 5.2 zeigt die gestrippten Caplet Volatilitäten für einen Shift 1% und die erhaltene Parametrisierung.

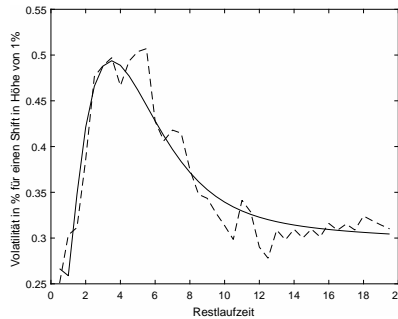


Abbildung 5.2.: Wert der gestrippten Caplet Volatilitäten (gestrichelte Linie) und der Parametrisierung, Angaben in %

## 5.4. Swaptions

In diesem Abschnitt erläutern wir die gemeinsame Kalibrierung an Swaptions und Caps. Als Grundlage dienen dabei [Sch02] und [BM01]. Swaptions werden wie Caps am Markt durch Volatilitäten quotiert. Somit dienen wieder Normal Volatilitäten als Eingangsdaten unserer Kalibrierung. Dabei bestimmen wir den Swaptionpreis, indem wir die Swaprate als Zufallsgröße in einem Bacheliermodell betrachten. Das heißt, eine ATM-Swaption entspricht einem ATM-Call und wir können die exakte Transformationsformel 4.15 benutzen, um äquivalente Shifted Lognormal Swaption Volatilitäten zu erhalten.

Swaption Volatilitäten werden übersichtlich in einer Tabelle, wie in Tabelle 5.2 dargestellt. Die Zeilen entsprechen dabei der Maturität  $T_n$  der Swaption und die Spalten die Maturität  $T_m - T_n$  des zugrunde liegenden Swaps. Eine  $x \times y$  Swaption entspricht einer Swaption mit einer Maturität von  $x$  Jahren, deren zugrunde liegender Swap



	2	3	4	5
2	32.73	36.81	40.3	44.25
3	41.52	44.72	47.74	50.81
4	49.82	51.99	54.28	56.38
5	56.46	57.77	59.13	60.22

Tabelle 5.2.: Wert der Swaption Volatilitäten in Basispunkten

nach Ablauf der Swaption noch weitere  $y$  Jahre lang läuft. Der Eintrag 51.99, angegeben in Basispunkten, ist also die Normal Volatilität einer Swaption mit Maturität in 4 Jahren, die das Recht gibt, einen 3 Jahre laufenden Swap einzugehen.

Aufgrund der Parametrisierungen haben wir nur noch die reellen Parameter  $a, b, c, d, \rho_\infty$  und  $\eta$  zu bestimmen. Da deutlich mehr Swaptionvolatilitäten am Markt erhältlich sind, betrachten wir ein Minimierungsproblem. Für jede zulässige Wahl von  $a, b, c, d, \rho_\infty$  und  $\eta$  können wir die Swaptionvolatilität im Shifted Libormarkt Modell bestimmen und mit den transformierten quotierten Volatilitäten vergleichen.

Dazu leiten wir zunächst den Zusammenhang zwischen unseren parametrisierten Volatilitätsfunktionen und den Modell Swaption Volatilitäten her. Das heißt wir wollen eine Formel für

$$\sigma_{n,m}^2(a, b, c, d, \rho_\infty, \eta) = \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \sigma_{n,m}(t)^2 \quad (5.17)$$

bestimmen. Von der Swaptionpreisbestimmung wissen wir bereits:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \sigma_{n,m}(t)^2 &= \frac{1}{T_n} \sum_{j,k=n}^{m-1} \omega_j \omega_k \rho_{j,k}(\rho_\infty, \eta) \int_0^{T_n} \sigma_j(t) \sigma_k(t) dt \\ &= \sum_{j,k=n}^{m-1} \omega_j \omega_k \rho_{j,k}(\rho_\infty, \eta) \sigma_j^{\text{Caplet}} \sigma_k^{\text{Caplet}} \alpha_{j,k}(a, b, c, d). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Dabei haben wir

$$\alpha_{j,k}(a, b, c, d) = \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \frac{\sigma_j(t) \sigma_k(t)}{\sigma_j^{\text{Caplet}} \sigma_k^{\text{Caplet}}} dt \quad (5.19)$$

gesetzt und beachten dabei die Parametrisierung der Volatilitätsfunktionen sowie

die gestrippten Caplet-Volatilitäten. Für die Funktion  $\alpha$  gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha_{j,k}(a, b, c, d) &= \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \frac{\Psi_j \psi_j(t, a, b, c, d) \Psi_k \psi_k(t, a, b, c, d)}{\sigma_j^{\text{Caplet}} \sigma_k^{\text{Caplet}}} \\
&= \frac{1}{T_n} \frac{\Psi_j}{\sigma_j^{\text{Caplet}}} \frac{\Psi_k}{\sigma_k^{\text{Caplet}}} \int_0^{T_n} \psi_j(t, a, b, c, d) \psi_k(t, a, b, c, d) \\
&= \frac{\sqrt{T_k} \sqrt{T_j}}{T_n} \frac{\int_0^{T_n} \psi_j(t, a, b, c, d) \psi_k(t, a, b, c, d)}{\sqrt{\int_0^{T_j} \psi_j^2(t, a, b, c, d)} \sqrt{\int_0^{T_k} \psi_k^2(t, a, b, c, d)}}. \tag{5.20}
\end{aligned}$$

Dabei entfallen die Skalierungsterme  $\Psi_k$ . Aufgrund der einfachen Form der Parametrisierung können die Integrale in obiger Gleichung leicht analytisch bestimmt werden. Aufgrund der Länge ist die Stammfunktion im Anhang A.10 angeben.

Zusammenfassend erhalten wir für die Volatilität einer Swaption zum Zeitintervall  $[T_n, T_m]$  im Modell

$$\begin{aligned}
\sigma_{n,m}(a, b, c, d, \rho_\infty, \eta) \\
= \sqrt{\sum_{j,k=n}^{m-1} \omega_j \omega_k \rho_{j,k}(\rho_\infty, \eta) \sigma_j^{\text{Caplet}} \sigma_k^{\text{Caplet}} \alpha_{j,k}(a, b, c, d)} \tag{5.21}
\end{aligned}$$

Damit können wir nun die Modellvolatilität von Swaptions berechnen. Um ein Minimierungsproblem zu erhalten betrachten wir den mittleren quadratischen Fehler zwischen Modellvolatilität und transformierter Marktvolatilität. Wir wollen den Ausdruck

$$\begin{aligned}
RMS(a, b, c, d, \rho_\infty, \eta) := \\
\frac{1}{|\mathbb{S}|} \sum_{(n,m) \in \mathbb{S}} \left( \frac{\sigma_{n,m} - \sigma_{n,m}(a, b, c, d, \rho_\infty, \eta)}{\sigma_{n,m}} \right)^2 \tag{5.22}
\end{aligned}$$

minimieren. Dabei bezeichnet  $\mathbb{S}$  die Menge aller Paare  $(n, m)$ , so dass wir eine Swaptionvolatilität für eine Swaption zum Zeitintervall  $[T_n, T_m]$  zur Verfügung haben.

Damit können wir das Modell nun vollständig kalibrieren, indem wir zuerst die Caplet-Volatilitäten bestimmen, danach die Parameter  $(a, b, c, d, \rho_\infty, \eta)$  für die Korrelationsstruktur und die Volatilitätsfunktionen und anschließend noch die Skalierungsfaktoren  $\Psi_k$  so wählen, dass die Caplet-Volatilitäten von den Volatilitätsfunktionen genau getroffen werden.

## 5.5. Ergebnis

In diesem Abschnitt betrachten wir das Ergebnis einer Kalibrierung anhand von Bloomberg-Marktdaten vom 19.10.2016. Das zuvor beschriebene Vorgehen ist in Matlab implementiert worden. Wir haben die 2 parametrische Korrelationsstruktur von Schoenmakers & Coffey (s. Remark 3.2 in [SC03]), gegeben durch

$$\rho_{i,j} = \exp\left(-\frac{|i-j|}{(N-1)-1}(-\log\rho_\infty + \eta h(i,j))\right) \quad (5.23)$$

verwendet. Dabei ist die Funktion  $h$  definiert durch

$$h(i,j) = \frac{i^2 + j^2 + ij - 3(N-1)i - 3(N-1)j + 3i + 3j + 2(N-1)^2 - (N-1) - 4}{((N-1)-2)((N-1)-3)}.$$

Der Parameter  $\rho_\infty$  ist die Langzeitkorrelation  $\lim_{p \rightarrow \infty} \rho_{1,p}$  und für den Parameter  $\eta$  gilt:  $\eta \in [0, -\log(\rho_\infty)]$ . Die von Schoenmakers & Coffey konstruierte Korrelationsstruktur ist so konstruiert, dass sie die in Abschnitt 2.4 erwähnten Anforderungen erfüllt.

Die für das Bootstrappingverfahren benötigten Swapraten sind in Tabelle 5.1 dargestellt. Die daraus resultierenden Forwardraten sind in Abbildung 5.1 graphisch dargestellt und in Tabelle A.3 aufgelistet. Für einen Shift in Höhe von 1% erhalten wir die in Abbildung 5.2 graphisch dargestellten und in Tabelle A.5 aufgelisteten Caplet-Volatilitäten. Zur Reduzierung der Laufzeit erfolgt die sechsdimensionale Minimierung zur Bestimmung der Parameter mit Hilfe des Multistartalgorithmus. Dadurch entsteht kein deterministisches Ergebnis. Es ergeben sich aber sehr unterschiedliche Parameter, welche die Swaptionvolatilitäten jedoch ähnlich gut approximieren:

$a$	$b$	$c$	$d$	$\rho_\infty$	$\eta$	RMS
-3,2989	-0.0759	0.0227	3.3088	0.0001	8.2343	4,41%
7.1930	-0.0105	3.3992	2.6006	0.9991	0.0000	4.90%

Schoenmakers beschreibt ([Sch02], Abschnitt 3), dass das verwendete Verfahren für das Libormarkt Modell instabil ist. Die gleichen Marktdaten können mit Hilfe von unterschiedlichen Parametern approximiert werden. Dieses Verhalten sehen wir auch für das Shifted Libormarkt Modell. Es ist möglich den zulässigen Parameterbereich weiter einzuschränken oder eine Erweiterung des Verfahrens zu betrachten. Schoenmakers & Coffey machen für das Libormarkt Modell einen Vorschlag für eine stabile Erweiterung des Verfahrens. Im Rahmen dieser Arbeit gehen wir jedoch nicht weiter darauf ein.

Ein zusätzliches Problem bei der Kalibrierung ist die Wahl des Shifts  $\gamma$ , welcher einen

Einfluß auf die Form der Volatilitäten hat. In Abbildung 5.3 sind die Caplet Volatilitäten und zugehörigen abcd-Parametrisierung für einen sehr kleinen und einen relativ großen Shift abgebildet.

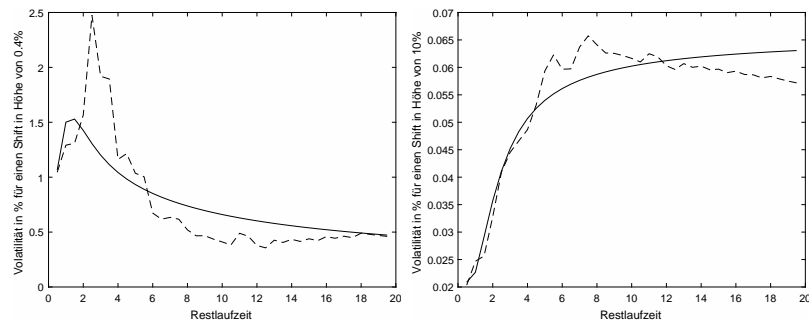


Abbildung 5.3.: Wert der gestrippten Caplet Volatilitäten (gestrichelte Linie) und der Parametrisierung, Angaben in %

Es ist deutlich zu erkennen, dass bei einem großen Shift der Buckel insgesamt flacher ist. Zusätzlich fällt die Caplet Volatilität für lange Restlaufzeit nur langsam ab. Bei einem kleinen Shift hingegen ergibt sich ein recht steiler Buckel. Da die geshifteten Forwardraten in diesem Fall jedoch nahe der null liegen, sind weitere numerische Instabilitäten bei der Berechnung der abgebildeten Caplet Volatilität nicht auszuschließen.

Insgesamt erhalten wir, dass sich ein Kalibrierungsverfahren auf das Shifted Libormarkt Modell prinzipiell übertragen lässt. Da wir jedoch keine (oder nur wenige) lognormale Volatilitäten am Markt erhalten können, müssen wir zusätzlich normale Volatiliätswerte umrechnen, wobei zusätzliche Stabilitätsprobleme nicht auszuschließen sind. Mit dem Shift erhält man zwar zusätzliche Parameter, die kalibriert werden können, es muss jedoch beachtet werden, dass dieser nicht zu klein und nicht zu groß werden darf.

# 6. Shifted Lognormal Libormarkt Modell mit unbestimmten Parametern

In diesem Kapitel betrachten wir eine Erweiterung des in Kapitel 2 hergeleiteten Shifted Libormarkt Modells. Dabei nehmen wir an, dass die Parameter, die Volatilitätsfunktion  $\sigma_j(t)$  und der Shift  $\gamma_j$  der  $j$ .ten Liborrates unmittelbar nach Modellstart aus einem Parametersatz gezogen werden. Damit kann das Lognormal Shifted Libormarkt Modell mit unbestimmten Parametern als eine vereinfachte Version eines Regime-Switching Modells angesehen werden, in welchem die Parameter durch Markov-Ketten modelliert werden und stetig ihren Zustand ändern dürfen.

Errais, Mauri, und Mercurio haben ein solches Modell unter dem Aspekt der Modellierung des Volatilitätssmiles untersucht. Wir folgen [EMM04], betrachten die Dynamik der Forwardraten jedoch unter dem Terminal-Maß.

Zunächst werden wir das Modell definieren, indem wir die stochastische Differentialgleichung, welche die Liborrates treibt, spezifizieren. Anschließend werden wir eine Bewertung von Caplets und Swaptions vornehmen. Das Vorgehen entspricht dabei dem Vorgehen im Shifted Libormarkt Modell.

## 6.1. Modell

Wir betrachten die gleichen Grundlagen, wie in Abschnitt 3.1. Die Entwicklung der Forwardraten wird durch ihre gemeinsame Dynamik unter dem Terminal-Maß  $\mathbb{P}_N$  wie folgt beschrieben:

$$dL_j(t) = (L_j(t) + \gamma_j^I) \sigma_j^I(t) \left( \sum_{k=j+1}^{N-1} \frac{\rho_{j,k}(t) \delta_k(L_k(t) + \gamma_k^I) \sigma_k^I(t)}{\delta_k L_k(t) + 1} dt + dW_N^{(j)}(t) \right). \quad (6.1)$$

Dabei gilt

1.  $W_N = (W_N^{(1)}, \dots, W_N^{(N-1)})$  ist ein  $N - 1$ -dimensionaler Vektor bestehend aus 1-dimensionalen  $\mathbb{P}_N$  Wiener Prozessen  $W_N^{(i)}$  mit  $d\langle W_N^{(i)}, W_N^{(j)} \rangle_t = \rho_{i,j}(t)dt$ .
2.  $I$  ist eine von den Wiener Prozessen unabhängige Zufallsvariable mit Werten in  $1, \dots, M$ . Dabei ist  $\mathbb{P}_N(I = i) = \lambda_i$ , für  $i = 1, \dots, M$ , wobei  $\lambda_i > 0$  und  $\sum_{i=1}^M \lambda_i = 1$  gilt. Der Wert des Index  $I$  wird zum Zeitpunkt  $T_0^+$  bestimmt, also unmittelbar nach Modellstart. Die Wahrscheinlichkeiten  $\lambda_i$  werden als gegeben vorausgesetzt und nicht kalibriert.
3.  $\sigma_j^i(t)$  sind deterministische, beschränkte Funktionen, welche die Volatilität der  $j$ -ten Liborrate darstellen.
4.  $\gamma_j^i(t)$  sind Konstanten, welche den Shift der  $j$ -ten Liborrate darstellen.

Zur Berechnung der Cap Preise werden wir die Forwardraten unter ihren Forwardmartingalmaßen betrachten. Aufgrund der Definition 2.3.1 von Forwardmartingalmaßen ist die Forwardrate  $L_j(t)$  unter  $\mathbb{P}_{T_{j+1}}$  ein Martingal und es gilt:

$$dL_j(t) = (L_j(t) + \gamma_j^I)\sigma_j^I(t)dW_{j+1}(t). \quad (6.2)$$

Dabei ist  $W_{j+1}(t)$  ein  $\mathbb{P}_{T_{j+1}}$ -Wiener Prozess.

## 6.2. Cap Preis

Im Folgenden wollen wir den Preis  $V_{n,m}^{Cap}(0)$  eines Caps für ein Zeitintervall  $[T_n, T_m]$  mit Strike  $K$  im SLLMUP bestimmen. Wie gehabt betrachten wir Caps als eine Familie von Caplets, so dass wir nur den Capletpreis bestimmen. Dabei benutzen wir, dass für jede Realisation  $i$  der Zufallsvariable  $I$  das SLLMUP einem Shifted Libormarkt Modell entspricht.

$$\begin{aligned} V_j^{Caplet}(0) &= B(0, T_{j+1})\mathbb{E}_{T_{j+1}} [(L_j(T_j) - K)^+ \delta_j] \\ &= \delta_j B(0, T_{j+1})\mathbb{E}_{T_{j+1}} \left[ \mathbb{E}_{T_{j+1}} \left[ (L_j(T_j) + \gamma_j^I - (K + \gamma_j^I))^+ \mid I \right] \right] \\ &= \delta_j B(0, T_{j+1}) \sum_{i=1}^M \lambda_i \mathbb{E}_{T_{j+1}} \left[ (L_j(T_j) + \gamma_j^I - (K + \gamma_j^I))^+ \mid I = i \right]. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Dabei haben wir im zweiten Schritt die Turmeigenschaft für bedingte Erwartungswerte benutzt. Da die Zufallsvariable  $I$  nur endlich viele Werte annehmen kann,

handelt es sich bei dem bedingten Erwartungswert um einen bedingten Erwartungswert für Partitionen. Für diesen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{T_{j+1}} \left[ (L_j(T_j) + \gamma_j^I - (K + \gamma_j^I))^+ | I = i \right] \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}_{j+1}(I = i)} \mathbb{E}_{T_{j+1}} \left[ (L_j(T_j) + \gamma_j^I - (K + \gamma_j^I))^+ \mathbb{1}_{I=i} \right] \\
&= \frac{1}{\lambda_i} \mathbb{E}_{T_{j+1}} \left[ (L_j^i(T_j) + \gamma_j^i - (K + \gamma_j^i))^+ \mathbb{1}_{I=i} \right] \\
&= \frac{1}{\lambda_i} \mathbb{E}_{T_{j+1}} \left[ (L_j^i(T_j) + \gamma_j^i - (K + \gamma_j^i))^+ \right] \mathbb{E}_{T_{j+1}} [\mathbb{1}_{I=i}] \\
&= \mathbb{E}_{T_{j+1}} \left[ (L_j^i(T_j) + \gamma_j^i - (K + \gamma_j^i))^+ \right]. \tag{6.4}
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $L_j^i$  eine Zufallsvariable, die gemäß 6.1 verteilt ist, wenn wir die Zufallsvariable  $I$  auf den Wert  $i$  setzen. Im vorletzten Schritt haben wir die Unabhängigkeit der Wiener Prozesse und  $I$  benutzt. Wegen der Unabhängigkeit und der Tatsache, dass  $L_j^i$  eine lognormalverteilte Zufallsvariable ist, kann der obige Erwartungswert wie gewohnt bestimmt werden.

**Satz 6.2.1.** *Der Preis eines Caplets für ein Zeitintervall  $[T_j, T_{j+1}]$  zum Strike  $K$  ist zur Zeit  $t = 0$  gegeben durch*

$$V_j^{Caplet}(0) = \delta_j B(0, T_{j+1}) \sum_{i=1}^M \lambda_i B^{call} \left( K + \gamma_j^i, L_j(0) + \gamma_j^i, \sqrt{\int_0^{T_j} (\sigma_j^i(s))^2 ds} \right). \tag{6.5}$$

Damit entspricht der Caplet Preis im SLLMUP einer Konvexkombination von Caplet Preisen in einem Shifted Libormarkt Modell. Setzen wir in obiger Formel  $M = 1$  wird ersichtlich, dass dieser dem Caplet Preis im Libormarkt Modell mit geshifteten Strike und geshifteter Forwardrate entspricht. Somit ist trotz der Modellerweiterung eine einfache Berechnung der Caplet Preise mit Hilfe von der Black-Scholes Formel möglich.

### 6.3. Swaption Preis

Im Folgenden wollen wir den Preis  $V_{n,m}^{Swaption}(0)$  einer Payer-Swaption für ein Zeitintervall  $[T_n, T_m]$  mit Strike  $K$  im SLLMUP bestimmen. Das Vorgehen ist dabei analog zur Optionspreisbestimmung von Caplets. Für jede Realisation der Parameter entspricht das Modell einem Shifted Libormarkt Modell und somit wird sich der

Swaptionpreis im SLLMUP als Konvexkombination von Swaptionpreisen in einem Shifted Libormarkt Modell ergeben.

Wir betrachten wieder die Swaprate  $S_{n,m}(t)$  unter dem Forwardswapmaß  $\mathbb{P}_{n,m}$ :

$$\begin{aligned} dS_{n,m}(t) &= \sum_{j=n}^{m-1} \frac{\partial S_{n,m}(t)}{\partial L_j(t)} dL_j(t) \\ &\stackrel{6.1}{=} \sum_{j=n}^{m-1} \frac{\partial S_{n,m}(t)}{\partial L_j(t)} \sigma_j^I(t) (L_j(t) + \gamma_j^I) dW_{n,m}^{(j)}(t). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Wie zuvor wollen wir die Swaptionvolatilität approximieren und verwenden dazu die gleichen Approximationsschritte. Zuerst vernachlässigen wir die Abhängigkeit der Gewichte  $\eta_j$  (s. Gleichung 3.35) von den Forwardraten und dann führen wir ein Freezing durch. Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial S_{n,m}(t)}{\partial L_j(t)} \sigma_j^I(t) (L_j(t) + \gamma_j^I) \\ &\approx \frac{\delta_j B(0, T_{j+1}) \sigma_j^I(t) (L_j(0) + \gamma_j^I)}{\sum_{i=n}^{m-1} \delta_i B(0, T_{i+1}) (L_i(0) + \gamma_i^I)} \left( S^{n,m}(t) + \frac{\sum_{i=n}^{m-1} \delta_i B(0, T_{i+1}) \gamma_i^I}{\sum_{i=n+1}^m \delta_{i-1} B(0, T_i)} \right) \\ &=: \omega_j^I \sigma_j^I(t) (S^{n,m}(t) + \eta_{n,m}^I). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Einsetzen von 6.7 in 6.6 ergibt für die Dynamik der Swaprate

$$\begin{aligned} dS_{n,m}(t) &= \sum_{j=n}^{m-1} \frac{\partial S_{n,m}(t)}{\partial L_j(t)} \sigma_j^I(t) (L_j(t) + \gamma_j^I) dW_{n,m}^{(j)}(t) \\ &\approx (S^{n,m}(t) + \eta_{n,m}^I) \sum_{j=n}^{m-1} \omega_j^I \sigma_j^I(t) dW_{n,m}^{(j)}(t) \\ &= (S^{n,m}(t) + \eta_{n,m}^I) \sigma_{n,m}^I(t) dW_{n,m}^I(t). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Dabei ist  $\sigma_{n,m}^I(t) = \sqrt{\sum_{j,k=n}^{m-1} \omega_j^I \sigma_j^I(t) \omega_k^I \sigma_k^I(t) \rho_{j,k}(t)}$  und  $dW_{n,m}^I(t) = \frac{\sum_{j=n}^{m-1} \omega_j^I \sigma_j^I(t) dW_{n,m}^{(j)}(t)}{\sigma_{n,m}^I(t)}$ . Wir überprüfen nun, dass  $W_{n,m}^I(t)$  bedingt auf  $I = i$  ein  $\mathbb{P}_{n,m}$ -Wiener Prozess ist mittels der Levy-Charakterisierung (s. Theorem 3.16 in [KS88]) für Wiener Prozesse. Dabei ist  $W_{n,m}^i(t)$  als Linearkombination stetiger lokaler Martingale ein stetiges



lokales Martingal und für die quadratische Variation gilt:

$$\begin{aligned}
\langle W_{n,m}^i(\cdot) \rangle_t &= \left\langle \frac{\sum_{j=n}^{m-1} \omega_j^i \sigma_j^i(\cdot) W_{n,m}^{(j)}(\cdot)}{\sigma_{n,m}^i(\cdot)}, \frac{\sum_{j=n}^{m-1} \omega_j^i \sigma_j^i(\cdot) W_{n,m}^{(j)}(\cdot)}{\sigma_{n,m}^i(\cdot)} \right\rangle_t \\
&= \sum_{j,k=n}^{m-1} \frac{\omega_j^i \sigma_j^i(t) \omega_k^i \sigma_k^i(t)}{\sigma_{n,m}^i(t)^2} \langle W_{n,m}^{(j)}(\cdot), W_{n,m}^{(k)}(\cdot) \rangle_t \\
&= \sum_{j,k=n}^{m-1} \frac{\omega_j^i \sigma_j^i(t) \omega_k^i \sigma_k^i(t)}{\sigma_{n,m}^i(t)^2} \rho_{j,k}(t) t \\
&= t.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Bei  $\sigma_{n,m}^i(t)$  handelt es sich um eine Linearkombination der Volatilitätsfunktionen  $\sigma_j^i(t)$ ,  $n \leq j \leq m-1$ . Nach Gleichung 6.8 handelt es sich dabei um die Volatilität der adjustierten Swaprate  $X_{n,m}^i(t) := S_{n,m}^i(t) + \eta_{n,m}^i$ . Es ergibt sich für die Dynamik von  $X_{n,m}^i(t)$

$$dX_{n,m}^i(t) = \tilde{\eta}_{n,m}^i(t) X_{n,m}^i(t) dW_{n,m}^i(t). \tag{6.10}$$

Damit ist die adjustierte Swaprate bedingt auf  $I = i$  lognormal verteilt und die Swaptionpreisbestimmung im Shifted Libormarkt Modell erfolgt wie gewohnt.

**Satz 6.3.1.** *Der Preis einer Payer-Swaption zum Zeitintervall  $[T_n, T_m]$  und Strike  $K$  ist zur Zeit  $t = 0$  gegeben durch*

$$\begin{aligned}
V_{n,m}^{Swaption}(0) &= \sum_{i=n+1}^m \delta_{i-1} B(0, T_i) \sum_{i=1}^M \lambda_i B t^{call} \left( K^i, X_{n,m}^i(T_n), \sqrt{\int_0^{T_n} \eta_{n,m}^i(t)^2} \right) \\
&= \sum_{i=n+1}^m \delta_{i-1} B(0, T_i) \sum_{i=1}^M \lambda_i B t^{call} \left( K + \eta_{n,m}^i, S_{n,m}^i(T_n) + \eta_{n,m}^i, \sqrt{\int_0^{T_n} \eta_{n,m}^i(t)^2} \right).
\end{aligned} \tag{6.11}$$

# 7. Shifted Libormarkt Modell mit stochastischer Volatilität

Eine weitere Möglichkeit zur Modellierung eines Volatilitätssmiles ist die Verwendung eines stochastischen Volatilitätsprozesses. Im zuvor betrachteten Shifted Libormarkt Modell mit unbestimmten Parametern wird eine zufällige Volatilitätsfunktion aus einer Menge von deterministischen Funktionen verwendet. Die zufällige Wahl lässt sich als Wahl eines Marktszenarios mit den zugehörigen Parametern interpretieren.

Im Modell mit stochastischer Volatilität wird nur eine Volatilitätsfunktion betrachtet, welche durch einen stochastischen Prozess gegeben ist. Dabei treffen wir die Annahme, dass Marktunsicherheiten einen Einfluss auf die Volatilität der Forwardraten haben. Ist die Unsicherheit groß, so sind die Volatilitäten groß und umgekehrt. Wir nehmen an, dass die Volatilität extern durch einen Wiener Prozess beeinflusst wird.

## 7.1. Das Modell

Wir betrachten ein ähnliches Setting wie beim Modell mit deterministischer Volatilität. Wir erweitern den zugrunde liegenden Wiener Prozess  $(B^{(1)}, \dots, B^{(N-1)})$  und die dazugehörige Filtration um einen Wiener Prozess  $Z$ , welcher die Volatilität treibt. Dann können wir das Modell unter dem Terminalmaß  $\mathbb{P}_N$  wie zuvor mit Hilfe von stochastischen Differentialgleichungen beschreiben:

$$dL_k(t) = (L_k(t) + \gamma_k) \left( \mu_k(t)dt + \sum_{i=1}^n \sqrt{V(t)} \eta_k^{(i)}(t) dB_N^{(i)}(t) \right) \quad (7.1)$$

$$= (L_k(t) + \gamma_k) \left( \mu_k(t)dt + \sqrt{V(t)} \|\eta_k(t)\| dW_N^{(k)}(t) \right) \quad (7.2)$$

$$dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \varepsilon \sqrt{V(t)} dZ_N(t). \quad (7.3)$$

Dabei gilt

1.  $B(t) = (B_N^{(1)}, \dots, B_N^{(N-1)})$  ist ein  $N - 1$ -dimensionaler  $\mathbb{P}_N$ -Wiener Prozess
2. Für  $k = 1, \dots, N - 1$  sind  $W_N^{(k)}$  1-dimensionale  $\mathbb{P}_N$ -Wiener Prozesse definiert durch

$$dW_N^{(k)} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\eta_k^{(i)}(t)}{\|\eta_k(t)\|} dB_N^{(i)}(t) \quad (7.4)$$

deren Korrelation durch  $d\langle W_N^{(i)}, W_N^{(j)} \rangle_t = \rho_{i,j}(t)dt$  gegeben ist.

3.  $\eta_k : [0, T_k] \mapsto \mathbb{R}^N$  ist eine beschränkte messbare Funktion
4.  $Z_N(t)$  ist ein  $\mathbb{P}_N$ -Wiener Prozess, mit

$$d\langle Z_N, W_N^{(i)} \rangle_t = \rho_i(t)dt. \quad (7.5)$$

Dabei beeinflusst  $\rho_j(t)$  die Form der impliziten Volatilitätsfläche (s. Abbildung 7.1).

5.  $\kappa, \theta, \varepsilon$  sind positive Konstanten.

Wir modellieren die Volatilität der Forwardrate also durch eine deterministische und eine stochastische Komponente. Der stochastische Volatilitätsprozess wird wie eingangs erwähnt durch einen Wiener Prozess getrieben. Die verwendete Dynamik 7.3 entspricht der eines Cox-Ingersoll-Ross Prozesses. Dadurch unterliegt der Drift Term des Volatilitätsprozesses einem Mean-Reversion Effekt mit Mean-Reversion Level  $\theta$  und Mean-Reversion Speed  $\kappa$ . Aufgrund der Positivität von  $\kappa$  ist der Prozess nicht-negativ. Gilt zusätzlich die Bedingung  $2\kappa\theta \geq \varepsilon$  so ist der Volatilitätsprozess sogar fast sicher positiv.

In Abbildung 7.1 ist der Zusammenhang zwischen der Form der impliziten Volatilität und der Korrelation zwischen den Wiener-Prozessen  $Z_N(t)$  und  $W_N^{(k)}$  zu erkennen. Es wurde eine Monte-Carlo Simulation der gemeinsamen Dynamik (s. Gleichung 7.24 und 7.25) von einer Forwardrate und dem Volatilitätsprozess unter dem äquivalenten Forwardmartingalmaß für verschiedene Strikes und Werte von  $\rho$  durchgeführt. Die Abbildung zeigt, dass, um einen ähnlichen Verlauf der impliziten Volatilitätskurve zu erhalten, im geshifteten Modell eine höhere Korrelation gewählt werden muss als im ungeschifteten. Dies ist konsistent mit dem Einfluß des Shift Parameters auf die implizite Volatilität im Modell mit deterministischer Volatilität (vgl. Abschnitt 2.2). Der positive Shift erzeugt eine fallenden Volatilitätsskew. Diesem wirkt der Einfluß der Korrelation entgegen.

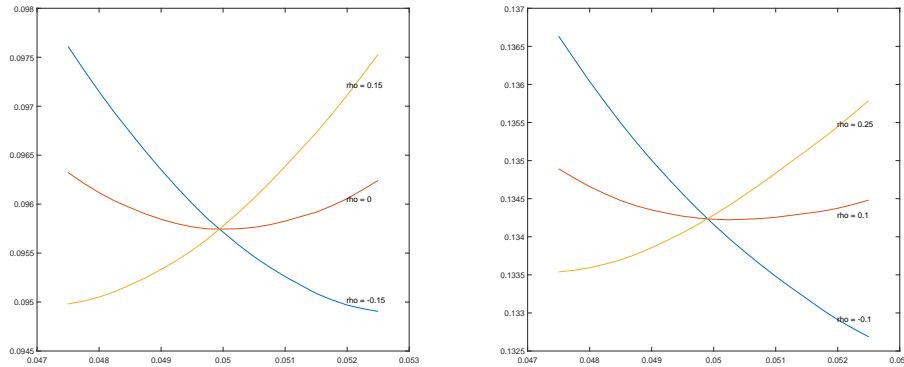


Abbildung 7.1.: Form der impliziten Volatilität in Abhängigkeit der Korrelation  $\rho_j$  für  $\gamma = 0$  (links) und  $\gamma = 2\%$  (rechts). Es wurde eine Monte-Carlo Simulation für die Auszahlung einer Call-Option mit Maturität  $T = 0.25$  durchgeführt. Dazu wurden  $M = 500000$  Pfade mit jeweils  $N = 250$  Schritten simuliert. Die weiteren verwendeten (zeitkonstanten) Parameter sind:  $L(0) = 0.05, V(0) = 0.04, \varepsilon = 0.17, \theta = 0.03, \kappa = 3, \xi = 1, \|\eta\| = 0.5$

## 7.2. Caplet Preis

Um die Preise von Caplets bestimmen zu können, wollen wir nun die Dynamik der Volatilitätsfunktion  $V(t)$ , sowie der entsprechenden Forwardrate  $L_j(t)$  unter ihrem Forwardmartingalmaß bestimmen. Dazu folgen wir den Ausführungen in [WZ06] und erweitern diese um einen Shiftparameter  $\gamma_j$ .

### 7.2.1. Dynamik unter dem Forwardmartingalmaß

Da Forwardraten unter ihrem Forwardmartingalmaß Martingale sind, ergibt sich die Dynamik der Forwardrate  $L_j(t)$  unter  $\mathbb{P}_{j+1}$  direkt zu:

$$dL_j(t) = (L_j(t) + \gamma_j) \sqrt{V(t)} \|\eta_j(t)\| dW_{j+1}(t). \quad (7.6)$$

Dabei ist  $W_{j+1}(t)$  ein 1-dimensionaler  $\mathbb{P}_{j+1}$  Wiener Prozess. Wir benötigen jedoch auch die Dynamik des Volatilitätsprozesses unter  $\mathbb{P}_{j+1}$ . Dazu bestimmen wir die Gestalt von Wiener Prozessen unter einem Forwardmartingalmaß.

**Satz 7.2.1.** *Definieren wir  $Z_{j+1}$  und  $B_{j+1}$  durch*

$$B_{j+1}^{(i)}(t) = B_N^{(i)}(t) - \sum_{k=j+1}^{N-1} \int_0^t X_k^{(i)}(s) ds \quad (7.7)$$

$$Z_{j+1}(t) = Z_N(t) - \sum_{k=j+1}^{N-1} \int_0^t \|X_k(s)\| \rho_k(s) ds, \quad (7.8)$$

wobei  $X_k(t) = \frac{\delta_k(L_k(t)+\gamma_k)\sqrt{V(t)}}{\delta_k L_k(t)+1} \eta_k(t)$  gilt, so handelt sich bei  $B_{j+1}$  um einen  $N-1$ -dimensionalen und bei  $Z_{j+1}$  um einen 1-dimensionalen  $\mathbb{P}_{j+1}$ -Wiener Prozess.

*Beweis.* Wir gehen ähnlich wie bei der Herleitung der arbitragefreien Gestalt des Drifts im Shifted Libormarkt Modell (Proposition 2.3.3) vor.

Sei zunächst  $j = N - 2$ . Für den Dichtequotientenprozess von  $\mathbb{P}_{N-1}$  bezüglich  $\mathbb{P}_N$  gelten auch im Fall der stochastischen Volatilität Proposition 2.3.2 und Gleichung 2.19. Damit ergibt sich:

$$\left. \frac{d\mathbb{P}_{N-1}}{d\mathbb{P}_N} \right|_{F_t} := R_{N-1}(t) = \frac{\delta_{N-1} L_{N-1}(t) + 1}{\delta_{N-1} L_{N-1}(0) + 1}. \quad (7.9)$$

Wie zuvor stellen wir den Prozess  $R_{N-1}(t)$  als exponentielles  $\mathbb{P}_N$ -Martingal dar:

$$\begin{aligned} dR_{N-1}(t) &= \frac{\delta_{N-1} dL_{N-1}(t)}{\delta_{N-1} L_{N-1}(0) + 1} \\ &\stackrel{7.1}{=} \frac{\delta_{N-1} (L_{N-1}(t) + \gamma_{N-1}) \sqrt{V(t)} \eta_{N-1}(t) dB_N(t)}{\delta_{N-1} L_{N-1}(0) + 1} \\ &= R_{N-1}(t) \frac{\delta_{N-1} (L_{N-1}(t) + \gamma_{N-1}) \sqrt{V(t)} \eta_{N-1}(t) dB_N(t)}{\delta_{N-1} L_{N-1}(t) + 1} \\ &= R_{N-1}(t) X_{N-1}(t) dB_N(t) \end{aligned} \quad (7.10)$$

Dabei wird bei der 2. Gleichheit auch benutzt, dass  $L_{N-1}(t)$  ein  $\mathbb{P}_N$ -Martingal ist. Der Prozess  $X_{N-1}(t)$  ist wie im Satz definiert. Für die Gestalt von  $R_{N-1}$  folgt somit:

$$R_{N-1}(t) = \exp \left( \int_0^t X_{N-1}(s) dB_N(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|X_{N-1}(s)\|^2 ds \right). \quad (7.11)$$

Dann folgt mit dem Satz von Girsanov, dass der Prozess  $B_{N-1}$  definiert durch

$$\begin{aligned} B_{N-1}^{(i)}(t) &= B_N^{(i)}(t) - \left\langle B_N^{(i)}(\cdot), \int_0^\cdot X_{N-1}^{(i)}(s) dB_N^{(i)}(s) \right\rangle_t \\ &= B_N^{(i)}(t) - \int_0^t X_{N-1}^{(i)}(s) ds \end{aligned} \quad (7.12)$$

ein  $\mathbb{P}_{N-1}$ -Wiener Prozess ist. Damit haben wir den ersten Teil der Aussage bewiesen.

Wir können wie in Gleichung 7.4 1-dimensionale  $\mathbb{P}_{N-1}$  Wiener Prozesse  $W_{N-1}^{(i)}$  durch

$$dW_{N-1}^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\eta_k^{(i)}(t)}{\|\eta_k(t)\|} dB_{N-1}^{(i)}(t) \quad (7.13)$$

definieren. Aufgrund der Darstellung 7.12 von  $B_{N-1}$  erhalten wir:

$$d\langle W_{N-1}^{(k)}(\cdot), Z_N(\cdot) \rangle_t = d\langle W_N^{(k)}(\cdot), Z_N(\cdot) \rangle_t = \rho_k(t) dt. \quad (7.14)$$

Die Korrelation der Forwardraten mit dem volatilitätstreibenden Prozess hat sich also nicht geändert.

Für den volatilitätstreibenden Wiener Prozess  $Z_N$  erhalten wir mit dem Satz von Girsanov, dass

$$\begin{aligned} Z_{N-1}(t) &= Z_N(t) - \left\langle Z_N(\cdot), \int_0^\cdot X_{N-1}(s) dB_N(s) \right\rangle_t \\ &\stackrel{7.12}{=} Z_N(t) - \left\langle Z_N(\cdot), \int_0^\cdot X_{N-1}(s) dB_{N-1}(s) \right\rangle_t \end{aligned} \quad (7.15)$$

ein lokales  $\mathbb{P}_{N-1}$  Martingal ist. Nun zeigen wir, dass es sich bei  $Z_{N-1}$  auch um einen  $\mathbb{P}_{N-1}$ -Wiener Prozess handelt. Für den quadratischen Variationsterm in obiger

Gleichung gilt:

$$\begin{aligned}
& \left\langle Z_N(\cdot), \int_0^\cdot X_{N-1}(s) dB_{N-1}(s) \right\rangle_t \\
&= \left\langle Z_N(\cdot), \int_0^\cdot \frac{\delta_{N-1}(L_{N-1}(s) + \gamma_{N-1})\sqrt{V(s)}}{\delta_{N-1}L_{N-1}(s) + 1} \|\eta_{N-1}(t)\| \sum_{i=1}^N \frac{\eta_{N-1}^{(i)}(s)}{\|\eta_{N-1}(t)\|} dB_{N-1}^{(i)}(s) \right\rangle_t \\
&\stackrel{7.13}{=} \left\langle Z_N(\cdot), \int_0^\cdot \frac{\delta_{N-1}(L_{N-1}(s) + \gamma_{N-1})\sqrt{V(s)}}{\delta_{N-1}L_{N-1}(s) + 1} \|\eta_{N-1}(t)\| dW_{N-1}^{(N-1)}(s) \right\rangle_t \\
&= \left\langle Z_N(\cdot), \int_0^\cdot \|X_{N-1}(s)\| dW_{N-1}^{(N-1)}(s) \right\rangle_t \\
&= \int_0^t \|X_{N-1}(s)\| d\langle Z_N, W_{N-1}^{(N-1)} \rangle_s \\
&\stackrel{7.14}{=} \int_0^t \|X_{N-1}(s)\| \rho_{N-1}(s) ds. \tag{7.16}
\end{aligned}$$

Damit ist  $Z_{N-1}$  ein stetiger Prozess und mit

$$\langle Z_{N-1}(\cdot), Z_{N-1}(\cdot) \rangle_t = \langle Z_N(\cdot), Z_N(\cdot) \rangle_t = t \tag{7.17}$$

erhalten wir aus Levys Charakterisierung, dass  $Z_{N-1}$  ein  $\mathbb{P}_{N-1}$ -Wiener Prozess ist.

Es gelte nun die Aussage für ein beliebiges  $j$  mit  $1 < j < N - 1$ . Analog wie zuvor erhalten wir, dass der Dichtequotientenprozess von  $\mathbb{P}_{j+1}$  bezüglich  $\mathbb{P}_N$  folgende stochastische Differentialgleichung erfüllt:

$$R_j(t) := \frac{d\mathbb{P}_j}{d\mathbb{P}_{j+1}} \Big|_{F_t} = R_j X_j dB_{j+1}(t), \tag{7.18}$$

mit  $X_j(t) = \frac{\delta_j(L_j(t) + \gamma_j)\sqrt{V(t)}}{\delta_j L_j(t) + 1} \eta_j(t)$ . Damit erhalten wir für  $R_j(t)$  die Darstellung

$$R_j(t) = \exp \left( \int_0^t X_j(s) dB_{j+1}(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \|X_j(s)\|^2 ds \right). \tag{7.19}$$

Wie zuvor erhalten wir, dass  $B_j(t)$ , wie oben definiert, ein  $N - 1$ -dimensionaler

Wiener Prozess ist. Für  $Z_j(t)$  erhalten wir ebenso

$$\begin{aligned}
Z_j(t) &= Z_{j+1}(t) - \left\langle Z_{j+1}(\cdot), \int_0^\cdot X_j(s) dB_{j+1}(s) \right\rangle_t \\
&= Z_N(t) - \sum_{k=j+1}^{N-1} \int_0^t \|X_k(s)\| \rho_k(s) ds \\
&\quad - \left\langle Z_N(\cdot) - \sum_{k=j+1}^{N-1} \int_0^\cdot \|X_k(s)\| \rho_k(s) ds, \int_0^\cdot X_j(s) dB_N(s) - \sum_{k=j+1}^{N-1} \int_0^\cdot X_k^{(i)}(s) ds \right\rangle_t \\
&= Z_N(t) - \sum_{k=j+1}^{N-1} \int_0^t \|X_k(s)\| \rho_k(s) ds - \left\langle Z_N(\cdot), \int_0^\cdot X_j(s) dB_N(s) \right\rangle_t \\
&= Z_N(t) - \sum_{k=j+1}^{N-1} \int_0^t \|X_k(s)\| \rho_k(s) ds - \int_0^t \|X_j(s)\| \rho_j(s) ds, \tag{7.20}
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit analog zu Gleichung 7.16 erfolgt. Wie zuvor erhalten wir mit Levys Charakterisierung, dass  $Z_j(t)$  eine  $\mathbb{P}_{j+1}$ -Wiener Prozess ist.  $\square$

Damit können wir nun die Dynamik von  $V(t)$  unter  $\mathbb{P}_{j+1}$  bestimmen:

$$\begin{aligned}
dV(t) &\stackrel{7.3}{=} \kappa(\theta - V(t))dt + \varepsilon\sqrt{V(t)}dZ_N(t)(t) \\
&\stackrel{7.8}{=} \kappa(\theta - V(t))dt + \varepsilon\sqrt{V(t)} \left( dZ_{j+1}(t) + \sum_{k=j+1}^{N-1} \|X_k(t)\| \rho_k(t) dt \right) \\
&= \kappa \left( \theta - V(t) \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\kappa} \sum_{k=j+1}^{N-1} \frac{\|X_k(t)\|}{\sqrt{V(t)}} \rho_k(t) \right) \right) dt + \varepsilon\sqrt{V(t)}dZ_{j+1}(t) \\
&= \kappa(\theta - \xi_j(t)V(t))dt + \varepsilon\sqrt{V(t)}dZ_{j+1}(t) \tag{7.21}
\end{aligned}$$

mit

$$\xi_j(t) := 1 - \frac{\varepsilon}{\kappa} \sum_{k=j+1}^{N-1} \frac{\delta_k(L_k(t) + \gamma_k)}{\delta_k L_k(t) + 1} \|\eta_k(t)\| \rho_k(t). \tag{7.22}$$

Zur Bestimmung von einer Bewertungsformel frieren wir die Forwardraten, von denen  $\xi_j(t)$  abhängt, ein. Wir setzen also:

$$\tilde{\xi}_j(t) := 1 - \frac{\varepsilon}{\kappa} \sum_{k=j+1}^{N-1} \frac{\delta_k(L_k(0) + \gamma_k)}{\delta_k L_k(0) + 1} \|\eta_k(t)\| \rho_k(t). \tag{7.23}$$

Insgesamt erhalten wir nun die Modelldynamik unter dem Forwardmartingalmaß



$\mathbb{P}_{j+1}$ :

$$\begin{aligned} dL_k(t) &= (L_k(t) + \gamma_k) \sqrt{V(t)} \sum_{i=1}^{N-1} \eta_k^{(i)}(t) dB_{j+1}^{(i)}(t) \\ &= (L_k(t) + \gamma_k) \sqrt{V(t)} \|\eta_k(t)\| dW_{j+1}^{(k)}(t) \end{aligned} \quad (7.24)$$

$$dV(t) = \kappa(\theta - \tilde{\xi}_j(t)V(t))dt + \varepsilon \sqrt{V(t)} dZ_{j+1}(t). \quad (7.25)$$

Damit ist die Dynamik ähnlich zu der Dynamik in einem Heston-Modell. In diesem kann eine geschlossene Formel für Caplets angegeben werden (siehe [Hes93]). Im Folgenden werden wir zur Preisbestimmung von Caplets (und Swaptions) analog zum Heston-Modell vorgehen.

## 7.2.2. Options Preis

Wir bestimmen den Caplet Preis mit Hilfe der Fast Fourier Transformation. Dieses Kapitel basiert auf [CM99] und [WZ06]. Wir betrachten den Forward-Preis einer Call-Option

$$G_j(k) = \mathbb{E}_{T_{j+1}}[(L_j(T_j) + \gamma_j - (K + \gamma_j))^+] = \mathbb{E}_{T_{j+1}}[(e^{X_j(T_j)} - e^k)^+]. \quad (7.26)$$

Dabei ist  $k = \ln(K + \gamma_j)$  und  $X_j(T_j) = \ln(L_j(T_j) + \gamma_j)$ . Wir bezeichnen nun mit  $q_j$  die Dichte von  $X_j(T_j)$  bezüglich  $\mathbb{P}_{j+1}$  und erhalten somit:

$$\begin{aligned} G_j(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{X_j(T_j)} - e^k)^+ d\mathbb{P}_{j+1} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{X_j(T_j)} - e^k)^+ q_j dX_j(T_j) \\ &= \int_k^{\infty} (e^s - e^k) q_j ds. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Die so definierte Funktion  $G_j(k)$  ist jedoch nicht auf  $\mathbb{R}$  integrierbar, da sie für  $k \rightarrow -\infty$  nicht gegen 0 konvergiert. Es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow -\infty} G_j(k) &= \lim_{k \rightarrow -\infty} \left( \int_k^{\infty} e^s q_j ds - \int_k^{\infty} e^k q_j ds \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^s q_j ds \\ &= \mathbb{E}_{T_{j+1}}[L_j(T_j) + \gamma_j] = L_j(0) + \gamma_j > 0. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Damit ist die Fouriertransformierte von  $G_j(k)$  nicht wohldefiniert und wir betrachten eine gedämpfte Modifizierung gegeben durch:

$$g_j(k) = e^{ak} G_j(k) \quad (7.29)$$

mit einem Dämpfungsfaktor  $a > 0$ . Diese ist für geeignete Wahlen von  $a$  integrierbar. Wir werden am Ende des Kapitels auf die Integrierbarkeit eingehen. Zunächst zeigen wir, dass  $g_j(k)$  sogar quadratintegrierbar ist:

**Proposition 7.2.2.** *Ist die gedämpfte Modifizierung  $g_j(k)$  integrierbar, so ist sie sogar quadratintegrierbar.*

*Beweis.* Wir betrachten die Integrale über die negative und positive Halbachse getrennt voneinander. Da  $G_j(k)$  monoton fallend ist erhalten wir für die negative Halbachse:

$$\int_{-\infty}^0 g_j^2(k) dk = \int_{-\infty}^0 e^{2ak} G_j^2(k) dk \leq (L_j(0) + \gamma_j) \int_{-\infty}^0 e^{ak} G_j(k) dk < \infty. \quad (7.30)$$

Bei der ersten Ungleichung fließt  $k < 0$  mit ein, wodurch die Exponentialfunktion nach oben durch 1 beschränkt ist, die zweite Ungleichung ist die vorausgesetzte Integrierbarkeit von  $g_j(k)$ .

Ebenfalls aus der Integrierbarkeit von  $g_j(k)$  erhalten wir, dass ein  $k_0$  existiert, so dass  $g_j(k) \leq 1$  für alle  $k \geq k_0$ . Damit ergibt sich für die positive Halbachse:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} g_j^2(k) dk &= \int_0^{k_0} g_j^2(k) dk + \int_{k_0}^{\infty} g_j^2(k) dk \\ &\leq \int_0^{k_0} g_j^2(k) dk + \int_{k_0}^{\infty} g_j(k) dk < \infty. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Dabei ist der letzte Schritt die Integrierbarkeit von  $g_j(k)$ . □

Damit ist  $g_j(k) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  und sowohl die Fouriertransformierte als auch ihre Rücktransformierte sind wohldefiniert (siehe zum Beispiel [Wer11], Abschnitt V.2).

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\psi_j(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuk} g_j(k) dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuk} e^{ak} \int_k^{\infty} (e^s - e^k) q_j ds dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} q_j \int_{-\infty}^s (e^{s+k(a+iu)} - e^{k(1+a+iu)}) dk ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} q_j \left( \frac{e^{(a+1+iu)s}}{a+iu} - \frac{e^{(a+1+iu)s}}{a+1+iu} \right) ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} q_j \frac{e^{(a+1+iu)s}}{(a+iu)(a+1+iu)} ds \\
&= \frac{\phi_j(a+1+iu)}{(a+iu)(a+1+iu)}. \tag{7.32}
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im dritten Schritt den Satz von Fubini-Tonelli angewendet, da  $g_j(t)$  per Voraussetzung integrierbar und per Definition positiv ist.  $\phi_j(s)$  bezeichnet die momenterzeugende Funktion von  $X_j(T_j)$ . Damit können wir nun bei Kenntniss dieser den Caplet Preis bestimmen.

**Satz 7.2.3.** *Der Preis eines Caplets zum Intervall  $[T_j, T_{j+1}]$  und Strike  $K$  im Shifted Libormarkt Modell mit stochastischer Volatilität ist gegeben durch:*

$$\begin{aligned}
B(0, T_{j+1}) \delta_j G_j(k) &= B(0, T_{j+1}) \delta_j e^{-ak} g_j(k) \\
&= B(0, T_{j+1}) \delta_j \frac{e^{-ak}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-iuk} \psi_j(u) du. \tag{7.33}
\end{aligned}$$

Im folgenden Abschnitt wollen wir eine Bewertung von Swaptions vornehmen. Dabei werden wir ähnlich wie bei der Bewertung von Swaptions im Modell mit deterministischer Volatilität vorgehen und die Dynamik der Swaprate approximieren. Dann lässt sich der Swaptionpreis analog zum Caplet Preis bestimmen. Anschließend betrachten wir, wie sich die momenterzeugende Funktion  $\phi_j(s)$  bestimmen lässt. Zunächst betrachten wir jedoch noch die Wahl von  $a$  und die damit zusammenhängende Integrierbarkeit von  $g_T(k)$ . Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_j(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} g_j(k) e^{i0k} dk = \psi_j(0) = \frac{\phi_j(a+1)}{a(a+1)}. \tag{7.34}$$

Damit ist die Integrierbarkeit genau dann gegeben, wenn

$$\phi_j(a+1) = \mathbb{E}[e^{(a+1)X_j(T_j)}] = \mathbb{E}[(L_j(T_j) + \gamma_j)^{a+1}] < \infty \tag{7.35}$$

gilt. Dies ist vollkommen analog zum ungeshifteten Modell.

### 7.3. Swaption Preis

Im Folgenden wollen wir den Swaption Preis bestimmen. Wir erinnern an die Definition der Swaprate

$$S_{n,m}(t) = \frac{B(t, T_n) - B(t, T_m)}{A_{n,m}(t)} \quad (7.36)$$

und die Auszahlung einer Swaption zu einem Zeitintervall  $[T_n, T_m]$  mit Strike  $K$  zum Zeitpunkt  $T_n$ :

$$A_{n,m}(T_n)(S_{n,m}(T_n) - K)^+. \quad (7.37)$$

Analog zur Preisbestimmung der Caplets wollen wir zunächst die Gestalt von Wiener Prozessen unter dem Forwardswapmaß  $\mathbb{P}_{n,m}$  herleiten.

**Proposition 7.3.1.** *Definieren wir den  $N - 1$ -dimensionalen Prozess  $B_{n,m}(t)$  und den 1-dimensionalen Prozess  $Z_{n,m}(t)$  durch*

$$B_{n,m}(t) = B_N(t) - \int_0^t \sqrt{V(t)} \sigma_{n,m}(t) dt \quad (7.38)$$

$$Z_{n,m}(t) = Z_N(t) - \int_0^t \sqrt{V(t)} \xi_{n,m}(t) dt \quad (7.39)$$

$$\sigma_{n,m}(t) = \sum_{j=n}^{m-1} \alpha_j(t) \sum_{i=j+1}^{N-1} \frac{\delta_i(L_i(t) + \gamma_i)}{\delta_i L_i(t) + 1} \eta_i \quad (7.40)$$

$$\alpha_j(t) = \frac{\delta_j \prod_{k=j+1}^{N-1} (\delta_k L_k(t) + 1)}{\sum_{a=n}^{m-1} \delta_a \prod_{b=a+1}^{N-1} (\delta_b L_b(t) + 1)} \quad (7.41)$$

$$\xi_{n,m}(t) = \sum_{j=n}^{m-1} \sum_{i=j+1}^{N-1} \alpha_j(t) \frac{\delta_i(L_i(t) + \gamma_i)}{\delta_i L_i(t) + 1} \|\eta_i(t)\| \rho_i(t), \quad (7.42)$$

so handelt es sich dabei um Wiener Prozesse unter dem Forwardswapmaß.

*Beweis.* Wir erhalten für den Dichtequotientenprozess vom Forwardswapmaß bezüglich des Terminalmaßes

$$\left. \frac{d\mathbb{P}_{n,m}}{dP_N} \right|_{F_t} = \frac{B(0, T_N)}{A_{n,m}(0)} \frac{A_{n,m}(t)}{B(t, T_N)}. \quad (7.43)$$

Wie zuvor wollen wir für den Dichtequotientenprozess eine Exponentialgestalt herleiten, um den Satz von Girsanov verwenden zu können. Dazu betrachten wir ihn

als stetige Funktion der Forwardraten:

$$\begin{aligned}
R_{n,m}(t) &= \frac{B(0, T_N)}{A_{n,m}(0)} \sum_{j=n}^{m-1} \delta_j \frac{B(t, T_{j+1})}{B(t, T_N)} \\
&= \frac{B(0, T_N)}{A_{n,m}(0)} \sum_{j=n}^{m-1} \delta_j \prod_{k=j+1}^{N-1} (\delta_k L_k(t) + 1).
\end{aligned} \tag{7.44}$$

Bei der Anwendung der Ito-Formel benötigen wir die partiellen Ableitungen des Dichtequotientenprozesses bezüglich der Forwardraten. Für diese gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{n,m}(t)}{\partial L_i(t)} &= \frac{B(0, T_N)}{A_{n,m}(0)} \sum_{j=n}^{m-1} \delta_j \frac{\partial}{\partial L_i(t)} \prod_{k=j+1}^{N-1} (\delta_k L_k(t) + 1) \\
&= \frac{B(0, T_N)}{A_{n,m}(0)} \sum_{j=n}^{m-1} \delta_j \delta_i \prod_{k=j+1, k \neq i}^{N-1} (\delta_k L_k(t) + 1) \mathbb{1}_{N-1 \geq i \geq j+1} \\
&= \frac{B(0, T_N)}{A_{n,m}(0)} \sum_{j=n}^{m-1} \delta_j \frac{\delta_i}{\delta_i L_i(t) + 1} \prod_{k=j+1}^{N-1} (\delta_k L_k(t) + 1) \mathbb{1}_{N-1 \geq i \geq j+1}.
\end{aligned} \tag{7.45}$$

Da wir wissen, dass der Dichtequotientenprozess ein  $\mathbb{P}_N$ -Martingal ist, wird der Driftterm bei der Ito-Formel außer Acht gelassen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
dR_{n,m}(t) &= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{B(0, T_N)}{A_{n,m}(0)} \sum_{j=n}^{m-1} \mathbb{1}_{N-1 \geq i \geq j+1} \delta_j \frac{\delta_i}{\delta_i L_i(t) + 1} \prod_{k=j+1}^{N-1} (\delta_k L_k(t) + 1) dL_i(t) \\
&= \frac{B(0, T_N)}{A_{n,m}(0)} \sum_{j=n}^{m-1} \delta_j \prod_{k=j+1}^{N-1} (\delta_k L_k(t) + 1) \sum_{i=j+1}^{N-1} \frac{\delta_i (L_i(t) + \gamma_i)}{\delta_i L_i(t) + 1} \sqrt{V(t)} \eta_i dB_N(t).
\end{aligned} \tag{7.46}$$

Dabei sind  $\eta_i$  und  $W_N(t)$  mehrdimensionale Prozesse. Wir erweitern nun obige Gleichung mit dem Term

$$\frac{\sum_{a=n}^{m-1} \delta_a \prod_{b=a+1}^{N-1} (\delta_b L_b(t) + 1)}{\sum_{a=n}^{m-1} \delta_a \prod_{b=a+1}^{N-1} (\delta_b L_b(t) + 1)}. \tag{7.47}$$

Der Zähler des obigen Bruches ergibt mit  $\frac{B(0, T_N)}{A_{n,m}(0)}$  wieder den Dichtequotientenprozess  $R_{n,m}(t)$ . Den Nenner fassen wir mit den anderen Vorfaktoren zusammen:

$$\alpha_j(t) = \frac{\delta_j \prod_{k=j+1}^{N-1} (\delta_k L_k(t) + 1)}{\sum_{a=n}^{m-1} \delta_a \prod_{b=a+1}^{N-1} (\delta_b L_b(t) + 1)}. \tag{7.48}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} dR_{n,m}(t) &= R_{n,m}(t) \sum_{j=n}^{m-1} \alpha_j(t) \sum_{i=j+1}^{N-1} \frac{\delta_i(L_i(t) + \gamma_i)}{\delta_i L_i(t) + 1} \sqrt{V(t)} \eta_i dW_N(t) \\ &= R_{n,m}(t) \sqrt{V(t)} \sigma_{n,m}(t) dB_N(t). \end{aligned} \quad (7.49)$$

Als Lösung dieser stochastischen Differentialgleichung hat der Dichtequotientenprozess eine Exponentialgestalt gegeben durch

$$R_{n,m}(t) = \exp \left( \int_0^t \sqrt{V(s)} \sigma_{n,m}(s) dB_N(s) - \frac{1}{2} \int_0^t V(s) \|\sigma_{n,m}(s)\|^2 ds \right) \quad (7.50)$$

und wir erhalten, dass folgende Prozesse Wiener Prozesse unter  $\mathbb{P}_{n,m}$  sind:

$$\begin{aligned} B_{n,m}^{(i)}(t) &= B_N^{(i)}(t) - \left\langle B_N^{(i)}(\cdot), \int_0^\cdot \sqrt{V} \sigma_{n,m}^{(i)} dB_N^{(i)} \right\rangle_t \\ &= B_N^{(i)}(t) - \int_0^t \sqrt{V(s)} \sigma_{n,m}^{(i)}(s) ds \end{aligned} \quad (7.51)$$

$$\begin{aligned} Z_{n,m}(t) &= Z_N(t) - \left\langle Z_N(\cdot), \int_0^\cdot \sqrt{V(s)} \sigma_{n,m}(s) dB_N(s) \right\rangle_t \\ &= Z_N(t) - \left\langle Z_N(\cdot), \int_0^\cdot \sqrt{V(s)} \sum_{j=n}^{m-1} \alpha_j(s) \sum_{i=j+1}^{N-1} \frac{\delta_i(L_i(s) + \gamma_i)}{\delta_i L_i(s) + 1} \eta_i(s) dB_N \right\rangle_t \\ &\stackrel{7.4}{=} Z_N(t) - \sum_{j=n}^{m-1} \sum_{i=j+1}^{N-1} \left\langle Z_N(s), \int_0^\cdot \sqrt{V(s)} \alpha_j(s) \frac{\delta_i(L_i(s) + \gamma_i)}{\delta_i L_i(s) + 1} \|\eta_i(s)\| dW_N^{(i)}(s) \right\rangle_t \\ &\stackrel{7.5}{=} Z_N(t) - \sum_{j=n}^{m-1} \sum_{i=j+1}^{N-1} \int_0^t \sqrt{V(s)} \alpha_j(s) \frac{\delta_i(L_i(s) + \gamma_i)}{\delta_i L_i(s) + 1} \|\eta_i(s)\| \rho_i(s) ds \\ &= Z_N(t) - \int_0^t \sqrt{V(s)} \xi_{n,m}(s) ds. \end{aligned} \quad (7.52)$$

□

Damit sind wir nun in der Lage, die gemeinsame Dynamik der Forwardraten und

der stochastischen Volatilität unter dem Forwardswapmaß zu bestimmen:

$$\begin{aligned} dL_k(t) &= (L_k(t) + \gamma_k) \left( \mu_k(t)dt + \sqrt{V(t)}\eta_k(t)dB_N(t) \right) \\ &= (L_k(t) + \gamma_k) \left( (\mu_k(t) + V(t)\sigma_{n,m}(t)\eta_k(t))dt + \sqrt{V(t)}\eta_k(t)dB_{n,m}(t) \right) \end{aligned} \quad (7.53)$$

$$\begin{aligned} dV(t) &= \kappa(\theta - V(t))dt + \varepsilon\sqrt{V(t)}dZ(t) \\ &= \kappa(\theta - V(t))dt + V(t)\varepsilon\xi_{n,m}(t)dt + \varepsilon\sqrt{V(t)}dZ_{n,m}(t) \\ &= \kappa(\theta - \tilde{\xi}_{n,m}(t)V(t))dt + \varepsilon\sqrt{V(t)}dZ_{n,m}(t). \end{aligned} \quad (7.54)$$

Dabei ist  $\tilde{\xi}_{n,m}(t) = 1 - \frac{\xi_{n,m}(t)\varepsilon}{\kappa}$ . Zur Bestimmung von Swaptionpreisen wollen wir nun die Dynamik der Swaprate unter dem Forwardswapmaß bestimmen.

**Satz 7.3.2.** *Für die Swaprate gilt:*

$$dS_{n,m}(t) = \sqrt{V(t)} \sum_{j=n}^{m-1} \frac{\partial S_{n,m}(t)}{\partial L_j(t)} (L_j(t) + \gamma_j)\eta_j(t)dB_{n,m}(t) \quad (7.55)$$

mit

$$\frac{\partial S_{n,m}(t)}{\partial L_j(t)} = \eta_j(t) + \frac{\delta_j}{1 + \delta_j L_j(t)} \sum_{i=n}^{j-1} \eta_i(t)(L_i(t) - S_{n,m}(t)). \quad (7.56)$$

*Beweis.* Die erste Gleichung ergibt sich sofort aus einer Anwendung der Ito-Formel und der Tatsache, dass die Forwardswaprate ein  $\mathbb{P}_{n,m}$ -Martingal ist. Für die partiellen Ableitungen erhalten wir mit der Produktregel zunächst:

$$\frac{\partial S_{n,m}(t)}{\partial L_j(t)} \stackrel{3.35}{=} \frac{\partial}{\partial L_j(t)} \sum_{i=n}^{m-1} \eta_i(t)L_i(t) = \eta_j(t) + \sum_{i=n}^{m-1} \frac{\partial \eta_i(t)}{\partial L_j(t)} L_i(t). \quad (7.57)$$

Für  $\eta_i$  gilt:

$$\eta_i = \frac{\delta_i B(t, T_{i+1})}{B(t, T_N)} \frac{B(t, T_N)}{A_{n,m}(t)} = \frac{\delta_i \prod_{j=i+1}^{N-1} \delta_j L_j(t) + 1}{\sum_{l=n}^{m-1} \delta_l \prod_{j=l+1}^{N-1} \delta_j L_j(t) + 1}. \quad (7.58)$$

Für die Ableitung des Zählers erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial L_k(t)} \delta_i \prod_{j=i+1}^{N-1} \delta_j L_j(t) + 1 = \delta_i \frac{\delta_k}{\delta_k L_k(t) + 1} \prod_{j=i+1}^{N-1} (\delta_j L_j(t) + 1) \mathbb{1}_{k>i}. \quad (7.59)$$

Für die Ableitung des Nenners gilt:

$$\frac{\partial}{\partial L_k(t)} \sum_{l=n}^{m-1} \delta_l \prod_{j=l+1}^{N-1} \delta_j L_j(t) + 1 = \sum_{l=n}^{k-1} \delta_l \frac{\delta_k}{\delta_k L_k(t) + 1} \prod_{j=l+1}^{N-1} (\delta_j L_j(t) + 1). \quad (7.60)$$

Dabei ergibt sich die veränderte Grenze der ersten Summe aus der Indikatorfunktion für das Ereignis  $\{k > l\}$ . Nun können wir die Ableitung der Gewichte berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta_i(t)}{\partial L_k(t)} &= \left( \delta_i \frac{\delta_k}{\delta_k L_k(t) + 1} \prod_{j=i+1}^{N-1} (\delta_j L_j(t) + 1) \mathbb{1}_{k>i} \frac{A_{n,m}(t)}{B(t, T_N)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta_i B(t, T_{i+1})}{B(t, T_N)} \sum_{l=n}^{k-1} \delta_l \frac{\delta_k}{\delta_k L_k(t) + 1} \prod_{j=l+1}^{N-1} (\delta_j L_j(t) + 1) \right) \frac{B(t, T_N)^2}{A_{n,m}(t)^2} \\ &= \frac{\delta_k}{\delta_k L_k(t) + 1} \left( \frac{\delta_i B(t, T_{i+1})}{B(t, T_N)} \mathbb{1}_{k>i} \frac{A_{n,m}(t)}{B(t, T_N)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta_i B(t, T_{i+1})}{B(t, T_N)} \sum_{l=n}^{k-1} \delta_l \prod_{j=l+1}^{N-1} (\delta_j L_j(t) + 1) \right) \frac{B(t, T_N)^2}{A_{n,m}(t)^2} \\ &\stackrel{7.58}{=} \frac{\delta_k}{\delta_k L_k(t) + 1} \left( \eta_i(t) \mathbb{1}_{k>i} - \eta_i \sum_{l=n}^{k-1} \frac{\delta_l B(t, T_{l+1})}{B(t, T_N)} \frac{B(t, T_N)}{A_{n,m}(t)} \right) \\ &= \frac{\delta_k}{\delta_k L_k(t) + 1} \eta_i(t) \left( \mathbb{1}_{k>i} - \sum_{l=n}^{k-1} \eta_l \right). \end{aligned} \quad (7.61)$$

Einsetzen von 7.61 in 7.57 ergibt für die partiellen Ableitungen der Swaprate:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{n,m}(t)}{\partial L_j(t)} &\stackrel{7.61}{=} \eta_j(t) + \frac{\delta_j}{1 + \delta_j L_j(t)} \sum_{i=n}^{m-1} \eta_i(t) \left( \mathbb{1}_{j>i} - \sum_{l=n}^{j-1} \eta_l \right) L_i(t) \\ &= \eta_j(t) + \frac{\delta_j}{1 + \delta_j L_j(t)} \left( \sum_{i=n}^{j-1} \eta_i(t) L_i(t) - \sum_{l=n}^{j-1} \eta_l(t) \sum_{i=n}^{m-1} \eta_i(t) L_i(t) \right) \\ &\stackrel{3.35}{=} \eta_j(t) + \frac{\delta_j}{1 + \delta_j L_j(t)} \sum_{i=n}^{j-1} \eta_i(t) (L_i(t) - S_{n,m}(t)). \end{aligned} \quad (7.62)$$

□

Aufgrund der Komplexität der hergeleiteten Dynamik gestaltet sich eine direkte Bestimmung des Optionspreises als schwierig. Daher werden wir, wie im Modell mit deterministischer Volatilität, Freezing durchführen. Wir ersetzen dabei die Forwardraten durch ihren Wert zur Zeit 0. Für die stochastische Volatilität erhalten wir



somit:

$$dV(t) \approx \kappa(\theta - \tilde{\xi}_{n,m}^0(t)V(t))dt + \varepsilon\sqrt{V(t)}dZ_{n,m}(t) \quad (7.63)$$

mit

$$\tilde{\xi}_{n,m}^0(t) = 1 - \frac{\varepsilon}{\kappa} \sum_{j=m}^{n-1} \alpha_j(0) \sum_{i=j+1}^{N-1} \frac{\delta_i(L_i(0) + \gamma_i)}{\delta_i L_i(0) + 1} \|\eta_i(t)\| \rho_i(t). \quad (7.64)$$

Dies ist auch für die Forwardraten notwendig. Zusätzlich erweitern wir mit einer geshifteten Swaprate  $S_{n,m}(t) + \gamma_{n,m}$ . Dabei kann man sich unter dem Shift  $\gamma_{n,m}(t)$  der Swaprate einen gewichteten Shift, wie bei Gleichung 3.36 vorstellen oder man betrachtet den Fall, dass der Shift aller Forwardraten gleich ist und verwendet dann auch diesen für die Swaprate. Wie erhalten somit:

$$\begin{aligned} dS_{n,m}(t) &\stackrel{7.55}{=} \sqrt{V(t)} \sum_{j=n}^{m-1} \frac{\partial S_{n,m}(t)}{\partial L_j(t)} (L_j(t) + \gamma_j) \eta_j(t) dB_{n,m}(t) \\ &= (S_{n,m}(t) + \gamma_{n,m}) \sqrt{V(t)} \sum_{j=n}^{m-1} \frac{\partial S_{n,m}(t)}{\partial L_j(t)} \frac{L_j(t) + \gamma_j}{S_{n,m}(t) + \gamma_{n,m}} \eta_j(t) dB_{n,m}(t) \\ &\approx (S_{n,m}(t) + \gamma_{n,m}) \sqrt{V(t)} \sum_{j=n}^{m-1} \frac{\partial S_{n,m}(0)}{\partial L_j(0)} \frac{L_j(0) + \gamma_j}{S_{n,m}(0) + \gamma_{n,m}} \eta_j(t) dB_{n,m}(t) \\ &= (S_{n,m}(t) + \gamma_{n,m}) \sqrt{V(t)} \sum_{j=n}^{m-1} \omega_j(0) \eta_j(t) dB_{n,m}(t). \end{aligned} \quad (7.65)$$

Wir erinnern an die Bewertung einer Swaption

$$V_{Swaption}^{n,m}(0) = A_{n,m}(0) \mathbb{E}_{n,m}[(S_{n,m}(T_n) - K)^+]. \quad (7.66)$$

Dies entspricht einem Call auf die Swaprate. Da die gemeinsame Verteilung der Swaprate und der stochastischen Volatilität unter dem Forwardswapmaß der Verteilung einer Forwardrate unter ihrem Forwardmartingalmaß entspricht, kann die Bewertung von Swaptions nun genauso wie die Bewertung von Caplets über eine inverse Fouriertransformation erfolgen.

## 7.4. Herleitung der momenterzeugenden Funktion

In diesem Abschnitt wollen wir die momenterzeugende Funktion der transformierten Forwardraten  $X_j(t)$  und Swapraten  $X_{n,m}(t) = \ln(X_{n,m}(t) + \gamma_{n,m})$  unter ihren jeweiligen Maßen herleiten. Die Ausführungen basieren dabei auf [Hes93], [Pau15]

und [WZ06]. Nach Heston eignet sich das verwendete Vorgehen auch, um bedingte Wahrscheinlichkeiten und bedingte Wahrscheinlichkeitsdichten zu bestimmen.

**Proposition 7.4.1.** *Die momenterzeugenden Funktionen  $\phi(x, V, t, \lambda)$  der Forwardraten und der Swaprate erfüllen die folgende Kolmogorov Forwardgleichung auf  $[0, T]$ :*

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \kappa(\theta - \xi V) \frac{\partial \phi}{\partial V} - \frac{1}{2} \eta^2 V \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 V \frac{\partial^2 \phi}{\partial V^2} + \varepsilon \rho \eta V \frac{\partial^2 \phi}{\partial V \partial x} + \frac{1}{2} V \eta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (7.67)$$

mit der Endbedingung  $\phi(x, V, T, \lambda) = e^{\lambda x}$ . Dabei nehmen  $\xi$ ,  $\lambda$  und  $\rho$  verschiedene Werte für Forwardraten bzw. Swapraten an. Für Forwardraten gilt:

$$\xi = \tilde{\xi}_j(t), \eta = \|\eta_j(t)\|, \rho = \rho_j(t), T = T_j. \quad (7.68)$$

Für Swapraten gilt:

$$\xi = \tilde{\xi}_{n,m}^0, \eta = \left\| \sum_{j=n}^{m-1} \omega_j(0) \eta_j(t) \right\|, \rho = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=n}^{m-1} \omega_j(0) \|\eta_j(t)\| \rho_j(t), T = T_n. \quad (7.69)$$

*Beweis.* Wir folgen [Hes93] und [Pau15]. Zunächst betrachten wir die Forwardraten und bestimmen die Verteilung von  $X_j(t)$  unter  $\mathbb{P}_{j+1}$ . Mit Ito's Formel erhalten wir:

$$dX_j(t) = d\log(L_j(t) + \gamma_j) = \frac{1}{L_j(t) + \gamma_j} dL_j(t) - \frac{1}{2(L_j(t) + \gamma_j)^2} d\langle L_j(\cdot) \rangle_t \quad (7.70)$$

$$\stackrel{7.24}{=} \sqrt{V(t)} \|\eta_j(t)\| dW_{j+1}^{(j)}(t) - \frac{1}{2} V(t) \|\eta_j(t)\|^2 dt$$

$$dV(t) = \kappa(\theta - \xi_j(t)V(t))dt + \varepsilon \sqrt{V(t)} dZ_{j+1}(t). \quad (7.71)$$

Existiert eine eindeutige starke Lösung  $(X, V)$  so gilt für diese die Markoveigenschaft ([Pau15]). Im Anhang (A.3.1) zeigen wir, dass die Koeffizienten die Wachstumsbedingung und die Voraussetzungen für den Satz von Yamada Watanabe erfüllen. Für die quadratische Kovariation von  $X_j(t)$  und  $V(t)$  gilt:

$$\begin{aligned} \langle X_j(\cdot), V(\cdot) \rangle_t &= \left\langle \int_0^\cdot \sqrt{V(s)} \|\eta_j(s)\| dW_{j+1}^{(j)}(s), \int_0^\cdot \varepsilon \sqrt{V(s)} dZ_{j+1}(s) \right\rangle_t \\ &= \int_0^t V(s) \|\eta_j(s)\| \varepsilon d\langle W_{j+1}^{(j)}(\cdot), Z_{j+1}(\cdot) \rangle_t \\ &= \int_0^t V(s) \|\eta_j(s)\| \varepsilon \rho_j(s) ds. \end{aligned} \quad (7.72)$$

Für  $g_\lambda(x, v) = e^{\lambda x}$  betrachten wir eine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $f$

definiert durch

$$\begin{aligned} f(t, x, v) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{j+1}}[g(X_j(T), V(T)) | X_j(t) = x, V(t) = v] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{j+1}}[g(X_j(T), V(T)) | \mathcal{F}_t]. \end{aligned} \quad (7.73)$$

Dabei gilt die letzte Gleichheit aufgrund der Markoveigenschaft von  $(X_j(t), V(t))$ . Damit ergibt sich auch, dass  $(f(t, Z(t), V(t)))_{0 \leq t \leq T}$  ein  $\mathbb{P}_{j+1}$ -Martingal ist. Abkürzend werden wir  $f(t, Z(t), V(t))$  mit  $f(t)$  bezeichnen und verzichten auf den Index  $j$ .

Mit der Ito-Formel gilt dann für  $f(t)$ :

$$\begin{aligned} df(t) &= \partial_t f(t) dt + \partial_x f(t) dX_j(t) + \partial_v f(t) dV(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_x^2 f(t) d\langle X_j(\cdot) \rangle_t + \frac{1}{2} \partial_v^2 f(t) d\langle V(\cdot) \rangle_t + \partial_v \partial_x f(t) d\langle X, V \rangle_t \\ &= \partial_x f(t) \left( \sqrt{V(t)} \|\eta_j(t)\| dW_{j+1}^{(j)}(t) - \frac{1}{2} V(t) \|\eta_j(t)\|^2 dt \right) \\ &\quad + \partial_v f(t) \left( \kappa(\theta - \xi_j(t)V(t)) dt + \varepsilon \sqrt{V(t)} dZ_{j+1}(t) \right) + \partial_t f(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_x^2 f(t) V(t) \|\eta_j(t)\|^2 dt + \frac{1}{2} \partial_v^2 f(t) \varepsilon^2 V(t) dt \\ &\quad + \partial_v \partial_x f(t) V(t) \|\eta_j(t)\| \varepsilon \rho_j(t) dt. \end{aligned} \quad (7.74)$$

Aufgrund der Martingaleigenschaft von  $f$  muss der Anteil beschränkter Variation in obiger Gleichung sein sind:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2} \partial_x f(t) V(t) \|\eta_j(t)\|^2 \\ &\quad + \partial_v f(t) \kappa(\theta - \xi_j(t)V(t)) + \partial_t f(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_x^2 f(t) V(t) \|\eta_j(t)\|^2 + \frac{1}{2} \partial_v^2 f(t) \varepsilon^2 V(t) \\ &\quad + \partial_v \partial_x f(t) V(t) \|\eta_j(t)\| \varepsilon \rho_j(t). \end{aligned} \quad (7.75)$$

Nun betrachten wir die Swaprate und gehen dabei analog vor. Zunächst bestimmen

wir die gemeinsame Verteilung von  $X_{n,m}(t)$  und  $V(t)$  unter  $\mathbb{P}_{n,m}(t)$ .

$$dX_{n,m}(t) = \frac{1}{S_{n,m}(t) - \gamma_{n,m}} dS_{n,m}(t) - \frac{1}{2(S_{n,m}(t) - \gamma_{n,m})^2} d\langle S_{n,m}(\cdot) \rangle_t \quad (7.76)$$

$$\stackrel{7.65}{=} \sqrt{V(t)} \sum_{j=n}^{m-1} \omega_j(0) \eta_j(t) dB_{n,m}(t) - \frac{1}{2} V(t) \sum_{j=n}^{m-1} \omega_j(0)^2 \|\eta_j(t)\|^2 dt$$

$$dV(t) = \kappa(\theta - \tilde{\xi}_{n,m}^0(t)V(t))dt + \varepsilon \sqrt{V(t)} dZ_{n,m}(t). \quad (7.77)$$

Bei der letzten Gleichheit gehen wir von den Prozessen  $B_{n,m}$  und  $Z_{n,m}$  zu den Prozessen  $W_N$  und  $Z_N$  über. Für die quadratische Kovariation von  $X_{n,m}(t)$  und  $V(t)$  gilt:

$$\begin{aligned} \langle X_{n,m}(\cdot), V(\cdot) \rangle_t &= \left\langle \int_0^\cdot \sqrt{V(s)} \sum_{j=n}^{m-1} \omega_j(0) \eta_j(s) dB_{n,m}(s), \int_0^\cdot \varepsilon \sqrt{V(s)} dZ_{n,m}(s) \right\rangle_t \\ &= \int_0^t V(s) \varepsilon \sum_{j=n}^{m-1} \omega_j(0) d \left\langle \sum_{i=1}^{N-1} \eta_j^{(i)}(\cdot) B_{n,m}^{(i)}(\cdot), Z_{n,m}(\cdot) \right\rangle_s \\ &= \int_0^t V(s) \varepsilon \sum_{j=n}^{m-1} \omega_j(0) \|\eta_j(s)\| \rho_j(s). \end{aligned} \quad (7.78)$$

Wir können die Funktion  $f$  analog zu oben definieren und erhalten:

$$\begin{aligned} df(t) &= \partial_t f(t) dt + \partial_x f(t) dX_{n,m}(t) + \partial_v f(t) dV(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_x^2 f(t) d\langle X_{n,m}(\cdot) \rangle_t + \frac{1}{2} \partial_v^2 f(t) d\langle V(\cdot) \rangle_t + \partial_v \partial_x f(t) d\langle V, X_{n,m} \rangle_t \\ &= \partial_x f(t) \left( \sqrt{V(t)} \sum_{j=n}^{m-1} \omega_j(0) \eta_j(t) dB_{n,m}(t) - \frac{1}{2} V(t) \sum_{j=n}^{m-1} \omega_j(0)^2 \|\eta_j(t)\|^2 dt \right) \\ &\quad + \partial_v f(t) \left( \kappa(\theta - \tilde{\xi}_{n,m}^0(t)V(t)) dt + \varepsilon \sqrt{V(t)} dZ_{n,m}(t) \right) + \partial_t f(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_x^2 f(t) V(t) \sum_{j=n}^{m-1} \omega_j^2(0) \|\eta_j(t)\|^2 dt + \frac{1}{2} \partial_v^2 f(t) \varepsilon^2 V(t) dt \\ &\quad + \partial_v \partial_x f(t) V(s) \varepsilon \sum_{j=n}^{m-1} \omega_j(0) \|\eta_j(s)\| \rho_j(s). \end{aligned} \quad (7.79)$$

Aufgrund der Martingaleigenschaft (A.3.2) gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= -\partial_x f(t) \frac{1}{2} V(t) \sum_{j=n}^{m-1} \omega_j(0)^2 \|\eta_j(t)\|^2 dt \\
&\quad + \partial_v f(t) \kappa(\theta - \tilde{\xi}_{n,m}^0(t) V(t)) dt + \partial_t f(t) dt \\
&\quad + \frac{1}{2} \partial_x^2 f(t) V(t) \sum_{j=n}^{m-1} \omega_j^2(0) \|\eta_j(t)\|^2 dt + \frac{1}{2} \partial_v^2 f(t) \varepsilon^2 V(t) dt \\
&\quad + \partial_v \partial_x f(t) V(s) \varepsilon \sum_{j=n}^{m-1} \omega_j(0) \|\eta_j(s)\| \rho_j(s). \tag{7.80}
\end{aligned}$$

□

Nun wollen wir eine Lösung der Gleichung 7.67 bestimmen. Wir nehmen den Ansatz

$$f(t, x, v) = \exp(C_\lambda(T-t) + D_\lambda(T-t)v + \lambda x) \tag{7.81}$$

und bilden die relevanten partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\partial_x f(t) &= \lambda f(t) \\
\partial_x^2 f(t) &= \lambda^2 f(t) \\
\partial_v f(t) &= D_\lambda(T-t) f(t) \\
\partial_v^2 f(t) &= D_\lambda^2(T-t) f(t) \\
\partial_t f(t) &= (-C'_\lambda(T-t) - D'_\lambda(T-t)v) f(t) \\
\partial_x \partial_v f(t) &= \lambda D_\lambda(T-t) f(t)
\end{aligned}$$

Einsetzen des gewählten Ansatzes in die Differentialgleichung 7.67 liefert:

$$\begin{aligned}
0 &= (-C'_\lambda(T-t) - D'_\lambda(T-t)v) f(t) + \kappa(\theta - \xi V) D_\lambda(T-t) f(t) \\
&\quad - \frac{1}{2} \lambda V \eta^2 f(t) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 V D_\lambda^2(T-t) f(t) \\
&\quad + \varepsilon \rho \eta V \lambda D_\lambda(T-t) f(t) + \frac{1}{2} V \eta^2 \lambda^2 f(t). \tag{7.82}
\end{aligned}$$

Eine Betrachtung der Summanden, die von  $V$  abhängig bzw. nicht abhängig sind, liefert die beiden Differentialgleichungen:

$$C'_\lambda(T-t) = D_\lambda(T-t) \kappa \theta \tag{7.83}$$

$$D'_\lambda(T-t) = \frac{1}{2} \varepsilon^2 D_\lambda^2(T-t) + (\varepsilon \rho \eta \lambda - \kappa \xi) D_\lambda(T-t) + \frac{1}{2} \eta^2 (\lambda^2 - \lambda) \tag{7.84}$$

mit den Randwertbedingungen  $\lim_{t \rightarrow T} C_\lambda(T-t) = 0 = \lim_{t \rightarrow T} D_\lambda(T-t)$ . Hat man  $D$  bestimmt, so lässt sich  $C$  einfach durch Integration bestimmen:

$$C_\lambda(T-t) = \int_0^{T-t} D_\lambda(s) \kappa \theta. \quad (7.85)$$

Bei der Gleichung für  $D$  handelt es sich um eine Ricatti-Differentialgleichung. Für allgemeine Koeffizienten ist keine analytische Lösung bekannt, für konstante Koeffizienten gibt es jedoch eine analytische Lösung. Die Ricatti-Differentialgleichungen können nun entweder numerisch gelöst werden oder wir nehmen an, dass  $\eta_j(t)$  und  $\rho_j(t)$  stückweise konstante Funktionen sind. Dann lässt sich rekursiv eine Lösung der Ricatti-Differentialgleichung bestimmen.

**Proposition 7.4.2.** *Seien die Funktionen  $\eta(\tau)$  und  $\rho(\tau)$  stückweise konstant (und damit auch  $\xi(\tau)$ ), das heißt es existiert ein  $m \in \mathbb{N}$  und Zeitpunkte  $0 = \tau_0 < \dots < \tau_m = T$ , so dass:*

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \eta(\tau_k) \mathbb{1}_{\tau_k \leq t < \tau_{k+1}} \\ \rho(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \rho(\tau_k) \mathbb{1}_{\tau_k \leq t < \tau_{k+1}}. \end{aligned} \quad (7.86)$$

Dann existiert eine eindeutige Lösung gegeben durch

$$C_\lambda(\tau) = C_\lambda(\tau_j) + \frac{\kappa \theta}{\varepsilon^2} \left( (a+d)(\tau - \tau_j) - 2 \ln \left[ \frac{1 - g_j e^{d(\tau - \tau_j)}}{1 - g_j} \right] \right), \quad (7.87)$$

$$D_\lambda(\tau) = D_\lambda(\tau_j) + \frac{(a+d - \varepsilon^2 D_\lambda(\tau_j))(1 - e^{d(\tau - \tau_j)})}{\varepsilon^2 (1 - g_j e^{d(\tau - \tau_j)}), \quad (7.88)$$

für  $\tau_j \leq \tau < \tau_{j+1}$ ,  $j = 0, 1, \dots, m-1$ . Dabei gilt

$$a = \kappa \xi - \rho \varepsilon \lambda \eta \quad (7.89)$$

$$d = \sqrt{a^2 - \eta^2 \varepsilon^2 (\lambda^2 - \lambda)} \quad (7.90)$$

$$g_j = \frac{a + d - \varepsilon^2 D_\lambda(\tau_j)}{a - d - \varepsilon^2 D_\lambda(\tau_j)} \quad (7.91)$$

Die Annahme der stückweise konstanten Funktionen stellt dabei nach Wu und Zhang bei der numerischen Anwendung keine Einschränkung dar.

## 8. Fazit

Ziel dieser Arbeit war es, die Modellierung negativer Zinsraten mit Hilfe eines Shifted Libormarkt Modells zu untersuchen. Wir haben gesehen, dass ein solches Modell genauso wie das Libormarkt Modell mit Hilfe einer stochastischen Differentialgleichung beschrieben werden kann und diese auch ähnlich hergeleitet werden kann. Weiterhin ist es zur Bewertung von Caplets und Swaptions im Shifted Libormarkt Modell möglich, das Vorgehen des Libormarkt Modells zu verwenden. Für einen Shift von 0 vereinfachen sich die so erhaltenen Bewertungsformeln zu den aus dem Libormarkt Modell bekannten Formeln. Damit lässt sich das Libormarkt Modell als Spezialfall des Shifted Libormarkt Modells ansehen und die einfache Optionsbewertung bleibt erhalten.

Weiterhin haben wir uns mit einer Kalibrierung des Shifted Libormarkt Modells beschäftigt. Wir haben gesehen, dass die gemeinsame Kalibrierung an Caplets und Swaptions für einen festgelegten Shift aller Forwardraten auf das Shifted Libormarkt Modell übertragbar ist. Eine zusätzliche Kalibrierung des Shifts oder sogar individueller Shifts jeder Forwardrate anhand von Marktdaten ist denkbar.

Auch wenn das Shifted Libormarkt Modell zur Modellierung von Volatilitätsskews verwendet wird, ist es genau wie das Libormarkt Modell nicht in der Lage alle am Markt beobachtbaren Volatilitätsflächen zu modellieren. Die Tatsache, dass wir das Modell zur Modellierung negativer Zinsraten verwenden wollen, schränkt die mit dem Shifted Libormarkt Modell modellierbaren Volatilitätsflächen noch weiter ein.

Daher haben wir zwei Modellerweiterungen betrachtet, bei denen wir die Annahme treffen, dass die Volatilität stochastisch ist. Beim Shifted Libormarkt Modell mit unbestimmten Parametern handelt es sich um eine einfache Erweiterung, so dass auch in diesem Modell die Bewertungsformeln analog zum Libormarkt Modell mit deterministischer Volatilität hergeleitet werden können.

Beim Shifted Libormarkt Modell mit stochastischer Volatilität wird die Volatilität als zeitstetiger stochastischer Prozess modelliert. Das betrachtete Modell von Wu

und Zhang sieht dabei eine Korrelation zwischen Volatilität und Forwardraten vor. Zur Herleitung der Bewertungsformeln approximieren sie das Modell mit einer Folge von Heston-Modellen. Wir haben gezeigt, dass dies auf das geshiftete Modell übertragbar ist. Die dabei erhaltenen Formeln sind wie beim Modell mit deterministischer Volatilität eine einfache Erweiterung der Formeln des Libormarkt Modells.

Insgesamt haben wir gesehen, dass das Shifted Libormarkt Modell eine Erweiterung des Libormarkt Modells ist. Die analytische Nachvollziehbarkeit bei der Optionsbewertung bleibt erhalten. Einfach ausgedrückt muss bei der Anwendung von Blacks Formel zu Forwardrate und Strike nur der Shift addiert werden. Dies ist auch bei der approximativen Bewertung von Swaptions der Fall. Dabei muss jedoch unterschieden werden, ob ein einziger Shift für alle Forwardraten und damit auch für die Swaprate verwendet wird, oder ob aus den individuellen Shifts der Forwardraten ein gewichteter Shift für die Swaprate berechnet wird.



# A. Anhang

## A.1. Diffusionsterm und Korrelation unter äquivalentem Maßwechsel

**Proposition A.1.1.** *Es sei ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  mit Wiener Filtration gegeben. Wir betrachten einen stochastischen Prozess  $X$ , definiert durch:*

$$dX_t = \mu_{\mathbb{P}}(t)dt + \sigma(t)dW_{\mathbb{P}}(t).$$

*Dabei ist  $\sigma(t)$  eine deterministische Funktion und  $W$  ist eine Familie paarweiser korrelierte Wiener Prozesse. Ist  $\mathbb{Q}$  ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß, so erfüllt  $X$  unter  $\mathbb{Q}$  eine stochastische Differentialgleichung mit gleichem Volatilitätsterm:*

$$dX_t = \mu_{\mathbb{Q}}(t)dt + \sigma(t)dW_{\mathbb{Q}}(t)$$

*Dabei ist  $W_{\mathbb{Q}}$  eine Familie paarweiser korrelierter Wiener Prozesse, mit gleicher Korrelation wie  $W_{\mathbb{P}}$ .*

*Beweis.* Da  $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$  ist, ist der Dichtequotientenprozess

$$R(t) = \left. \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} \tag{A.1}$$

ein positives Martingal. Aufgrund der Positivität können wir eine Differentialgleichung für den Dichtequotienten herleiten, wie wir es in Abschnitt 2 für die Forwardraten getan haben. Für  $X(t) = \ln(R(t))$  gilt:

$$dX(t) = \frac{1}{R(t)}dR(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{R^2(t)}d\langle R(\cdot) \rangle_t \tag{A.2}$$

Mit dem Semimartingal  $Y(t) = \int_0^t \frac{1}{R(s)} dR(s)$  erhalten wir:

$$X(t) - X(0) = Y(t) - \frac{1}{2} \langle Y \rangle_t \quad (\text{A.3})$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} R(t) &= R(0) \exp \left( \ln \frac{R(t)}{R(0)} \right) \\ &= R(0) \exp (X(t) - X(0)) \\ &= R(0) \exp \left( Y(t) - \frac{1}{2} \langle Y \rangle_t \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Damit erfüllt  $R(t)$  die stochastische Differentialgleichung

$$dR(t) = R(t) dY(t) \quad (\text{A.5})$$

Als Semimartingal besitzt  $Y(t)$  eine Zerlegung  $Y(t) = M(t) + C(t)$ , wobei  $M$  ein lokales Martingal und  $C$  ein Prozess beschränkter Variation ist. Wir erhalten, dass  $R(t)$  die stochastische Differentialgleichung

$$dR(t) = R(t)(C(t) + M(t)) \quad (\text{A.6})$$

erfüllt. Da der Dichtequotient ein Martingal ist, muss  $C(t)$  konstant sein. Aufgrund der Normiertheit folgt weiterhin  $C(t) = C = 0$ . Mit dem Martingaldarstellungssatz gilt dann:

$$dR(t) = R(t) \sum_{i=1}^{N-1} \sigma^{(i)} dB_{\mathbb{P}}^{(i)} \quad (\text{A.7})$$

Wir erhalten mit dem Girsanov Theorem, dass  $W_{\mathbb{Q}}$  definiert durch

$$W_{\mathbb{Q}}^{(i)}(t) = W_{\mathbb{P}}^{(i)}(t) - \int_0^t \sigma^{(i)}(s) ds \quad (\text{A.8})$$

ein lokales  $\mathbb{Q}$ -Martingal ist. Mit

$$\langle W_{\mathbb{Q}}^{(i)}, W_{\mathbb{Q}}^{(j)} \rangle_t = \langle W_{\mathbb{P}}^{(i)}, W_{\mathbb{P}}^{(j)} \rangle_t \quad (\text{A.9})$$

und dem Satz von Levy folgt, dass  $\mathbb{Q}$  eine Familie paarweiser korrelierter Wiener Prozesse ist. Setzen wir diese in die Dynamik von  $X$  ein, so ergibt sich die Behauptung.  $\square$

## A.2. Integrationsterm

$$\begin{aligned}
& \int \psi_j(t, a, b, c, d) \psi_k(t, a, b, c, d) dt \\
&= d^2 t + \frac{ad}{c} (e^{-c(T_k-t)} + e^{-c(T_j-t)}) + \frac{db}{c^2} [(e^{-c(T_j-t)}(c(T_j-t) + 1)) \\
&\quad + (e^{-c(T_k-t)}(c(T_k-t) + 1))] + \frac{1}{4c^3} e^{2ct-c(T_k+T_j)} \\
&\quad [2a^2c^2 + 2abc(c(-2t + T_k + T_j) + 1) + b^2(2c^2(t - T_j)(t - T_k) + c(-2t + T_k + T_j) + 1)].
\end{aligned} \tag{A.10}$$

## A.3. Starke Lösbarkeit

Wir wollen die Existenz einer eindeutigen starken Lösung der stochastischen Differentialgleichung zeigen. Für die Existenz zeigen wir dazu, dass die Koeffizienten die Wachstumsbedingung erfüllen. Da die Wurzelfunktion nicht Lipschitzstetig ist, verwenden wir für die Eindeutigkeit das Theorem von Yamada und Watanabe ([YW71]).

### A.3.1. Caplet

Wir haben eine zweidimensionale stochastische Differentialgleichung mit den Koeffizienten

$$b(t; x, v) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}v \|\eta_j(t)\|^2 \\ \kappa(\theta - \tilde{\xi}_j(t)v) \end{pmatrix}; \quad \sigma(t; x, v) = \begin{pmatrix} \sqrt{v} \|\eta_j(t)\| & 0 \\ 0 & \varepsilon\sqrt{v} \end{pmatrix} \tag{A.11}$$

gegeben. Da  $\eta_j(t)$  nach Voraussetzung eine beschränkte Funktion ist, können wir  $\|\eta_j(t)\| \leq \eta_j$  verwenden. Die Zeitabhängigkeit von  $\tilde{\xi}_j(t)$  resultiert aus der Abhängigkeit von  $\eta_j(t)$  und  $\rho_j(t)$ . Beide können wir sowohl nach oben, als auch nach unten abschätzen. Damit können wir  $\tilde{\xi}_j(t)$  nach oben und unten gegen einen zeitunabhängigen Term abschätzen. Dann erhalten wir für die einzelnen Koeffizienten:

$$\|\sigma(t; x, v)\|^2 \leq v(\varepsilon^2 + \eta_j^2) \tag{A.12}$$

$$\|b(t; x, v)\|^2 \leq \left( \frac{1}{4}\eta_j^4 + \kappa^2\tilde{\xi}_j^2 \right) v^2 - 2\kappa^2\theta\tilde{\xi}_j v + \kappa^2\theta^2 \tag{A.13}$$

$$\leq c_1 v^2 + c_2 v + c_3 \tag{A.14}$$

Dabei ist  $c_i$  jeweils eine Konstante. Wir erhalten weiter:

$$\begin{aligned}
\|\sigma(t; x, v)\|^2 + \|b(t; x, v)\|^2 &\leq c_1 v^2 + c_4 v + c_3 = c_1(v^2 + c_5 v + c_6) \\
&= c_1\left(v + \frac{c_5}{2}\right)^2 + c_1\left(c_6 - \frac{c_5^2}{4}\right) \leq c_1 \frac{c_5^2}{4}(V(t) + 1)^2 + c_7 \\
&\leq c_8(V(t) + 1)
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Die Funktion  $p(x) = (\eta + \varepsilon)\sqrt{x}$  ist auf  $\mathbb{R}^+$  positiv, wachsend und erfüllt  $\int_0^\infty p^{-2}(u)du = \infty$ , sowie

$$|\sigma_1(t; x, v_1) - \sigma_1(t; x, v_2)| = |(\sqrt{v_1} - \sqrt{v_2}) \|\eta_j(t)\| | \leq \eta \sqrt{|v_1 - v_2|} \leq p(|v_1 - v_2|) \tag{A.16}$$

$$|\sigma_2(t; x, v_1) - \sigma_2(t; x, v_2)| = |(\sqrt{v_1} - \sqrt{v_2})\varepsilon| \leq \varepsilon \sqrt{|v_1 - v_2|} \leq p(|v_1 - v_2|). \tag{A.17}$$

Wir bezeichnen die zeitunabhängige Abschätzung von  $\tilde{\xi}_j(t)$  nach oben mit  $\tilde{\xi}$ . Die Funktion  $k(x) = (\eta_j + \kappa\tilde{\xi})x$  ist positiv, wachsend, konkav und erfüllt  $\int_0^\infty k^{-1}(u)du = \infty$ , sowie

$$|b_1(t; x, v_1) - b_1(t; x, v_2)| = \frac{1}{2} \|\eta_j(t)\|^2 |v_1 - v_2| \leq k(|v_1 - v_2|) \tag{A.18}$$

$$|b_2(t; x, v_1) - b_2(t; x, v_2)| = |\kappa\tilde{\xi}_j(t)(v_1 - v_2)| \leq k(|v_1 - v_2|). \tag{A.19}$$

### A.3.2. Swaption

Wir haben eine zweidimensionale stochastische Differentialgleichung mit den Koeffizienten

$$b(t; x, v) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}V(t) \sum_{j=n}^{m-1} \omega_j(0)^2 \|\eta_j(t)\|^2 \\ \kappa(\theta - \tilde{\xi}_{n,m}^0(t)V(t)) \end{pmatrix} \tag{A.20}$$

$$\sigma(t; x, v) = \begin{pmatrix} \sqrt{V(t)} \sum_{j=n}^{m-1} \omega_j(0)\eta_j(t) & 0 \\ 0 & \varepsilon\sqrt{V(t)} \end{pmatrix} \tag{A.21}$$

gegeben. Der Faktor  $\tilde{\xi}_{n,m}^0(t)$  ist ebenfalls nur aufgrund von  $\eta_j(t)$  und  $\rho_j(t)$  zeitabhängig. Damit können wir ihn wieder nach oben und unten gegen einen zeitunabhängigen Term abschätzen. Wegen der Beschränktheit von  $\eta_j(t)$  gilt das auch für die beiden Summen. Dann können wir sowohl für die Wachstumsbedingung, auch als für die Bedingungen für Yamada-Watanabe vollkommen analog zu Abschnitt A.3.1 vorgehen.

## A.4. Vollständige Marktdaten

An dieser Stellen wollen wir die noch fehlenden Zwischenergebnisse und Swaptionvolatilitäteten angeben.

$i$	$S_{0,i}(0)$	$i$	$S_{0,i}(0)$	$i$	$S_{0,i}(0)$	$i$	$S_{0,i}(0)$
0	-0.21	10	-0.04	20	0.45	30	0.76
1	-0.21	11	0	21	0.49	31	0.78
2	-0.21	12	0.05	22	0.53	32	0.8
3	-0.2	13	0.1	23	0.56	33	0.82
4	-0.19	14	0.15	24	0.6	34	0.83
5	-0.18	15	0.2	25	0.64	35	0.84
6	-0.16	16	0.25	26	0.67	36	0.85
7	-0.14	17	0.3	27	0.7	37	0.86
8	-0.11	18	0.35	28	0.72	38	0.87
9	-0.08	19	0.4	29	0.74	39	0.88

Tabelle A.1.: Wert der interpolierten Swapraten in Prozent (auf 2 Nachkommastellen gerundet)

$i$	$B(0, T_i)$	$i$	$B(0, T_i)$	$i$	$B(0, T_i)$	$i$	$B(0, T_i)$
1	1.0011	11	1.002	21	0.9536	31	0.8854
2	1.0021	12	0.9998	22	0.9463	32	0.879
3	1.0031	13	0.9966	23	0.9402	33	0.8731
4	1.004	14	0.9929	24	0.9339	34	0.8671
5	1.0047	15	0.9887	25	0.9264	35	0.8614
6	1.0053	16	0.9841	26	0.9186	36	0.8556
7	1.0055	17	0.9787	27	0.9119	37	0.8504
8	1.0055	18	0.9729	28	0.9049	38	0.8451
9	1.0048	19	0.9669	29	0.8984	39	0.8397
10	1.0038	20	0.9604	30	0.8917	40	0.8343

Tabelle A.2.: Wert der interpolierten Bondpreise (auf 4 Nachkommastellen gerundet)

$i$	$L_i$	$i$	$L_i$	$i$	$L_i$	$i$	$L_i$
1	-0.21	11	0.45	21	1.54	31	1.47
2	-0.2	12	0.64	22	1.29	32	1.35
3	-0.19	13	0.74	23	1.36	33	1.38
4	-0.14	14	0.85	24	1.61	34	1.32
5	-0.12	15	0.95	25	1.7	35	1.35
6	-0.04	16	1.09	26	1.48	36	1.23
7	0	17	1.2	27	1.54	37	1.26
8	0.14	18	1.24	28	1.45	38	1.28
9	0.2	19	1.34	29	1.5	39	1.3
10	0.36	20	1.44	30	1.42		

Tabelle A.3.: Wert der berechneten Forwardraten in Prozent (auf 2 Nachkommastellen gerundet)

$i$	$\sigma_{1,i}^{Cap}$	$i$	$\sigma_{1,i}^{Cap}$	$i$	$\sigma_{1,i}^{Cap}$	$i$	$\sigma_{1,i}^{Cap}$
1	0	11	0.44	21	0.61	31	0.65
2	0.2	12	0.47	22	0.62	32	0.65
3	0.22	13	0.49	23	0.62	33	0.65
4	0.24	14	0.51	24	0.63	34	0.65
5	0.26	15	0.53	25	0.63	35	0.65
6	0.3	16	0.55	26	0.64	36	0.65
7	0.33	17	0.57	27	0.64	37	0.65
8	0.36	18	0.58	28	0.64	38	0.65
9	0.38	19	0.59	29	0.65	39	0.65
10	0.41	20	0.6	30	0.65	40	0.65

Tabelle A.4.: Wert der berechneten Cap-Volatilität in Prozent (auf 2 Nachkommastellen gerundet)

$i$	$\sigma_i^{Caplet}$	$i$	$\sigma_i^{Caplet}$	$i$	$\sigma_i^{Caplet}$	$i$	$\sigma_i^{Caplet}$
1	25.09	11	50.7	21	29.85	31	30.12
2	30.33	12	42.76	22	34.13	32	31.6
3	31.15	13	40.63	23	32.86	33	30.86
4	38.57	14	41.8	24	29.01	34	31.54
5	47.65	15	41.46	25	27.8	35	30.89
6	48.84	16	37.5	26	30.88	36	32.41
7	49.71	17	34.78	27	29.8	37	31.9
8	46.65	18	34.34	28	30.96	38	31.43
9	49.34	19	32.75	29	30.01	39	31.01
10	50.37	20	31.36	30	30.98		

Tabelle A.5.: Wert der berechneten Caplet-Volatilität in Prozent (auf 2 Nachkommastellen gerundet) für einen Shift iHv 1%

i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	18.69	20.96	24.71	29.82	35.18	39.5	43.42	46.52	49.59	52.48
2	21.51	24.1	27.76	32.72	37.69	41.6	45.61	49.08	52.11	54.84
4	29.08	32.73	36.81	40.3	44.25	47.64	50.95	53.72	56.32	58.67
6	38.89	41.52	44.72	47.74	50.81	53.55	56.16	58.28	60.21	61.78
8	48.12	49.82	51.99	54.28	56.38	58.21	59.93	61.46	62.71	63.92
10	55.29	56.46	57.77	59.13	60.22	61.41	62.57	63.56	64.43	65.37
12	59.46	60.41	61.35	62	62.69	63.52	64.18	64.89	65.56	66.1
14	62.99	63.64	64.16	64.38	64.76	65.14	65.66	66.08	66.37	66.46
16	64.28	64.99	65.16	65.48	65.76	66	66.24	66.37	66.5	66.38
18	65.47	65.97	66.16	66.34	66.49	66.54	66.64	66.59	66.51	66.29

Tabelle A.6.: Wert der Normal Swaption-Volatilität in Basispunkten vom 19.10.2016, Quelle: Bloomberg

# Literaturverzeichnis

- [AB05] L. Andersen, R. Brotherton-Ratcliffe, *Extended libor market models with stochastic volatility*, The journal of computational finance 2005, 9
- [AL03] C. Alexander, D.Lvov, *Statistical Properties of Forward Libor Rates*
- [AP06] L. Andersen, V.Piterbarg, *Moment explosions in stochastic volatility models*, Springer Verlag, 2006
- [AP10] L.Andersen, V.Piterbarg, *Interest Rate Modeling, Volume 1: Foundations and vanilla models*, Atlantic Financial Press, First Edition, 2010
- [Cœu16] B. Cœuré, *Assessing the implications of negative interest rate*, Rede vom 28. Juli 2016, <https://www.ecb.europa.eu/press/key/date/2016/html/sp160728.en.html> (abgerufen am 23.11.2016)
- [Bjö04] T.Björk, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, Second Edition, 2004
- [BM01] D. Brigo, F.Mercurio, *Interest Rate Models Theory and Practice*, Springer Verlag, 2001
- [CM99] P.Carr, D.Madan, *Option valuation using the fast Fourier transform*, Journal of Computational Finance, Volume 2(4):61-73, 1999
- [EMM04] E.Errais, G.Mauri, F.Mercurio, *Capturing the Skew in Interest Rate Derivatives: A Shifted Lognormal LIBOR Model with Uncertain Parameters*
- [Gov12] HM Treasury, *The Wheatley Review of LIBOR: initial discussion paper*, [https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment\\_data/file/191763/condoc\\_wheatley\\_](https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/191763/condoc_wheatley_)



review.pdf (abgerufen am 22.11.2016)

- [Gov16] HM Treasury, *The Wheatley Review*, <https://www.gov.uk/government/publications/the-wheatley-review> (abgerufen am 14.11.2016)
- [Hes93] S.Heston, *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Option*, *The Review of Financial Studies*, Volume 6(2):327-343, <http://www.jstor.org/stable/2962057>, 1993
- [HK05] P.Hunt, J. Kennedy, *Financial derivatives in theory and practice*, Wiley, Revised Edition, 2005
- [Hul15] J.Hull, *Optionen, Futures und andere Derivate*, Springer Verlag, 9. Auflage, 2015
- [IBA16] ICE Benchmark Administration, *LIBOR: Frequently Asked Questions*, [https://www.theice.com/publicdocs/IBA\\_LIBOR\\_FAQ.pdf](https://www.theice.com/publicdocs/IBA_LIBOR_FAQ.pdf) (abgerufen am 14.11.2016)
- [JR03] M.Joshi, R.Rebonato, *A displaced-diffusion stochastic volatility LIBOR market model: motivation, definition and implementation*, *Quantitative Finance*, Volume 3:458–469,2003
- [KP92] P.Kloeden, E.Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer Verlag, 1992
- [KS88] I. Karatzas, S.Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer Verlag, 1988
- [Lut11] M. Lutz, *Libor Market Models with Stochastic Volatility and CMS Spread Option Pricing*, PhD Thesis, Universität Ulm, 2011, <http://dx.doi.org/10.18725/OPARU-1801> (abgerufen am 22.11.2016)
- [LW09] R.Lee, D.Wang, *Displaced Lognormal Volatility Skews: Analysis and Applications to Stochastic Volatility Simulations*, *Annals of Finance* 2012, Volume 8(2):159-181,2009
- [MM05] M.Musiela, M.Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modeling*, Springer Verlag, 2005

- [Pau15] V.Paulsen, *Handschriftliches Skript zur Vorlesung Höhere Finanzmathematik*, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Sommersemester 2015
- [Reb02] R.Rebonato, *Modern Pricing of Interest-Rate Derivatives*, Princeton University Press, 2002
- [Reb04] R.Rebonato: *Volatility and Correlation: The perfect Hedger and The Fox*, Wiley, 2.Auflage, 1999
- [SC03] J. Schoenmakers, B.Coffey, *Systematic Generation of Correlation Structures for the Libor Market Model*, International Journal of Theoretical and Applied Finance, Volume 6(5):507-519,2003
- [Sch02] J.Schoenmakers, *Calibration of LIBOR models to caps and swaptions: a way around intrinsic instabilities via parsimonious structures and a collateral market criterion*, <http://www.wias-berlin.de/people/schoenma/> (zuletzt abgerufen am 26.11.2016)
- [ST08] W.Schachermayer, J.Teichmann, *How close are the option pricing formulas of Bachelier and Black-Merton-Scholes?*, Mathematical Finance, Volume 18(1):155-170, 2008
- [Wer11] D.Werner, *Funktionalanalysis*, Springer Verlag, 7. Auflage, 2002
- [WSJ16] Homepage The Wall Street Journal, *London Interbank Offered Rates*, [http://www.wsj.com/mdc/public/page/2\\_3020-libor.html](http://www.wsj.com/mdc/public/page/2_3020-libor.html) (abgerufen am 25.11.2016)
- [WZ06] L.Wu, F.Zhang, *Libor market model with stochastic volatility*, Journal of Industrial and Management Optimization, Volume 2(2):199-227, 2006
- [YW71] T.Yamada, S.Watanabe, *On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations*, Kyoto Journal of Mathematics, Volume 11(1):169-180, 1971
- [RY05] Continous martingales and Brownian Motion, Daniel Revuz and Marc Yor